ISBN 978-985-468-276-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 1. Гомель, 2007

УДК 531.77

С. А. ГОЛЯКЕВИЧ, Д. В. ГАПАНЮК, В. С. ВИХРЕНКО
Белорусский государственный технологический университет, Минск

ВЛИЯНИЕ СООТНОШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УГЛОВОЙ И ЛИНЕЙНОЙ СКОРОСТЕЙ НА ДВИЖЕНИЕ КОЛЬЦА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрено движение кольца по горизонтальной плоскости под действием сил трения, пропорциональных нормальному давлению. После перехода к безразмерным переменным задача сведена к одному управляющему параметру – отношению начальных значений угловой и линейной скоростей. Установлено, что вращательное и поступательное движения кольца прекращаются одновременно вне зависимости от конкретного значения указанного параметра.

Динамика сыпучих материалов в значительной мере определяется действием сил трения при соприкосновении отдельных частиц. Поэтому задача о взаимном движении тел при учете трения между ними имеет важное прикладное значение. В последние годы было исследовано движение диска по шероховатой плоскости и установлена интересная особенность – его вращательное и поступательное движения взаимосвязаны и прекращаются одновременно [1, 2]. Возникает вопрос, сохранится ли эта особенность и при движении тонкостенного кольца.

Рассмотрим тонкое однородное кольцо радиусом R, расположенное на горизонтальной шероховатой поверхности (рисунок 1).

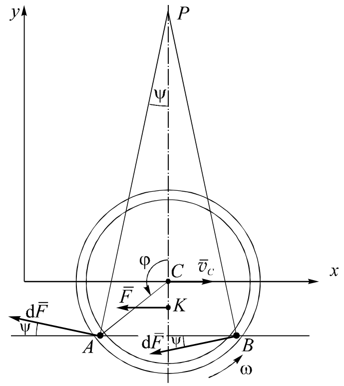

Рисунок 1 – Распределение сил трения, действующих на кольцо

На выделенный элементарный участок кольца размером dφ действует элементарная сила трения

$$\mathrm{d}F = \frac{fG}{2\pi}\mathrm{d}\varphi ,$$

где f – коэффициент трения кольца о поверхность, G – вес кольца, φ – угол, определяющий положение элементарного участка и отсчитываемый против хода часовой стрелки от прямой, перпендикулярной начальной скорости $\overline{v}_{C0}$ центра масс кольца C (от направления оси y). В дальнейшем этот угол будет определять и угловую координату движения кольца.

Направление элементарной силы трения противоположно скорости соответствующей точки кольца или, другими словами, перпендикулярно мгновенному радиусу, соединяющему эту точку и мгновенный центр скоростей (МЦС) – точку P.

Проекции элементарных сил трения на ось y для элементов кольца с одинаковыми по величине, но противоположными по знаку углами φ также одинаковы и противоположны по знаку. Поэтому суммарная сила в проекции на ось y равна нулю, и центр масс должен двигаться прямолинейно вдоль направления его начальной скорости.

В проекции на ось Ox для элементарной силы трения

$$\mathrm{d}F_x = -\mathrm{d}F\cos\psi = -\frac{fG}{2\pi}\cos\psi\,\mathrm{d}\varphi , \qquad (1)$$

где ψ – угол между направлением действия элементарной силы трения и осью Ox, определяемый по формуле (см. рисунок 1)

$$\cos\psi = \frac{b - R\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\varphi}} , \qquad (2)$$

$b = PC = \dfrac{v_C}{\omega}$ – расстояние от МЦС до центра кольца, v_C – скорость центра кольца, ω – угловая скорость кольца.

Проинтегрируем выражение для F_x по углу φ, учитывая, что распределение сил трения симметрично относительно диаметра кольца, параллельного оси y. Поэтому интегрирование выполняем по половине кольца и результат удваиваем:

$$F_x = -\frac{fG}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{b - R\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi = -\frac{fG}{\pi\sqrt{1+\beta^2}}\int_0^{\pi}\frac{\beta - \cos\varphi}{\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi , \qquad (3)$$

где $\beta = b/R$, $\gamma = 2\beta/(1+\beta^2)$.

Элементарный момент сил трения относительно МЦС запишется в следующем виде:

$$\mathrm{d}M_P = (fG/2\pi)\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= (fGR/2\pi)\sqrt{1+\beta^2 - 2\beta\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = (fGR/2\pi)\sqrt{1+\beta^2}\,\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi. \quad (4)$$

Проинтегрировав записанное выше выражение по углу φ, получим:

$$M_P = f\,\frac{mgR}{\pi}\sqrt{1+\beta^2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,. \quad (5)$$

Интеграл, который входит в состав этого выражения

$$I_1(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,, \quad (6)$$

где $0 \le \gamma \le 1$, вычислить аналитически не представляется возможным. Он может быть представлен через эллиптические интегралы [3], которые не входят в стандартное математическое обеспечение многих широко используемых программных пакетов. Поэтому воспользуемся разложением подынтегрального выражения (6) в ряд по $\cos\varphi$ и последующим интегрированием, сохраняя первые 6 членов:

$$I_1(\gamma) = 1 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{8}\gamma^2 - \frac{1}{16}\gamma^3 - \frac{5}{128}\gamma^4 - \frac{7}{256}\gamma^5\,. \quad (7)$$

Таким образом, выражение (5) для момента сил трения запишем в виде

$$M_P = fmgR\sqrt{1+\beta^2}\,I_1(\gamma)\,. \quad (8)$$

Для вычисления силы трения согласно соотношениям (1) и (2) введем соответствующие интегралы:

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi; \quad I_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\gamma\cos\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi, \quad (9)$$

и вновь прибегнем к разложениям подынтегральных выражений в ряд по $\cos\varphi$ и последующему интегрированию:

$$I_2(\gamma) = 1 + \frac{3}{16}\gamma^2 + \frac{105}{1024}\gamma^4 - \frac{1155}{16384}\gamma^6\,; \quad I_3(\gamma) = \frac{1}{4}\gamma + \frac{15}{128}\gamma^3 - \frac{315}{4096}\gamma^5\,. \quad (10)$$

Подставив соотношения (9) в выражение (3), получим

$$F_x = -fmg(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma))/\sqrt{1+\beta^2}\,. \quad (11)$$

Так как линия действия равнодействующей элементарных сил трения может не проходить через центр масс, то момент сил трения относительно центра масс можно записать в виде

$$M_C = M_P - F_x CP ,$$

где $CP = b$ – расстояние между центром масс кольца и мгновенным центром скоростей, относительно которого перемещается кольцо в заданный момент времени.

После преобразований получим

$$M_C = -\sqrt{1+\beta^2}\left[\beta I_1(\gamma) - \frac{\gamma}{2}(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma))\right]. \tag{12}$$

Запишем систему дифференциальных уравнений движения кольца:

$$\begin{cases} mR^2 \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_C, \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = F_x. \end{cases} \tag{13}$$

Чтобы исключить из конечных выражений коэффициент трения f и ускорение свободного падения g, введем безразмерные скорость $U = v_C / v_{C0}$, угловую скорость $\Omega = \omega R / v_{C0}$ и время $\tau = (fg / v_{C0})t$.

Используя выражения (11) и (12) для силы и момента сил относительно центра масс, запишем систему дифференциальных уравнений движения кольца по шероховатой поверхности:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Omega = -\sqrt{1+\beta^2}\left[\beta I_1(\gamma) - \dfrac{\gamma}{2}\big(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma)\big)\right]\mathrm{d}\tau, \\ \mathrm{d}U = -\left\{\big[\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma)\big] / \sqrt{1+\beta^2}\right\}\mathrm{d}\tau. \end{cases} \tag{14}$$

Таким образом, задача сведена к исследованию поведения кольца при фиксированной начальной безразмерной скорости центра масс $U_0 = 1$ и произвольной безразмерной угловой скорости, являющейся в данном случае единственным управляющим параметром задачи.

Формулировке задачи можно придать более общий вид, если предположить, что на кольце расположено дополнительное тело (центр его масс совпадает с центром кольца), что приводит к изменению центрального момента инерции. Пусть суммарный центральный радиус инерции кольца и тела равен ρ. Это приведет лишь к переопределению безразмерной угловой скорости $\Omega = (\omega R / v_C)(\rho^2 / R^2)$.

Полученные результаты могут быть легко трансформированы в размерные физические величины по соотношениям, использованным в процессе обезразмеривания. В частности, переход от безразмерного времени движения τ_s до остановки кольца к реальному времени осуществляется по соотношению $t_s = (v_{C0} / fg)\tau_s$. Время движения до остановки оказывается пропорциональным начальной скорости движения центра кольца и обратно пропорциональным коэффициенту трения и ускорению свободного падения. Коэффициент пропорциональности зависит от безразмерной начальной угловой скорости $\tau_s = \tau_s(\Omega_0)$. Отметим, что при отсутствии вращательного движения кольца $\tau_s = 1$. Поэтому получаемые значения τ_s можно интерпретировать как время остановки в долях от значения при $\Omega_0 = 0$.

Решение полученной системы дифференциальных уравнений проводилось в среде MathCAD. С помощью оператора цикла *for* полученная выше система дифференциальных уравнений (14) была численно проинтегрирована по схеме Эйлера с шагом 0,001. Поскольку система диссипативна, алгоритм Эйлера оказался устойчивым и при выбранном шаге обеспечил высокую точность интегрирования.

Результаты интегрирования для двух значений Ω_0, одно из которых больше, а второе меньше единицы, представлены на рисунках 2 и 3 (на вставках заключительный этап движения представлен в увеличенном масштабе). Аналогичный вид эти зависимости имеют и при других начальных условиях. Отметим, что при $\Omega_0 = 1$ обе линии совпадают и образуют прямую, пересекающую горизонтальную ось при $\tau_s = 1{,}544$. Это означает, что движение кольца является равнозамедленным как по поступательной, так и по вращательной степеням свободы, но модуль линейного ускорения меньше, чем при чисто поступательном движении, поскольку в последнем случае $\tau_s = 1$. Вращательное движение приводит к уменьшенному, в данном случае более чем в полтора раза, эффективному коэффициенту трения.

Та скорость, начальное безразмерное значение которой больше, убывает с течением времени практически равномерно, тогда как вторая скорость поначалу изменяется медленно и лишь в конце движения темп ее изменения увеличивается. Это означает, что более энергетически насыщенная степень свободы поддерживает движение менее насыщенной, пока их энергии не станут сопоставимыми.

Во всех случаях предел отношения Ω / U в момент остановки равнялся единице, другими словами, вращательное и поступательное движения кольца прекращались одновременно, как и диска в работах [1, 2]. Для однородного диска указанное выше отношение было равным 1,53 [1]. Для диска с дополнительным телом будет справедливым предельное отношение

$$\lim_{\tau \to \tau_s} \frac{\omega R}{v_C} = \frac{\rho^2}{R^2}\,. \tag{15}$$

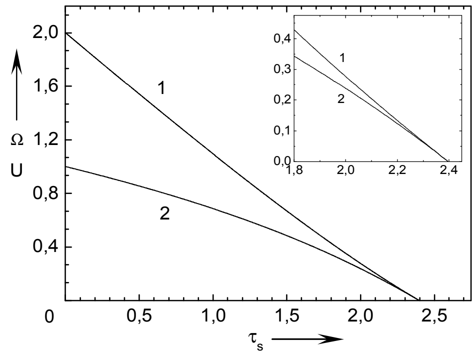

Рисунок 2 – Зависимость безразмерных угловой (кривая 1) и линейной (2) скоростей от безразмерного времени при $\Omega_0 = 2$

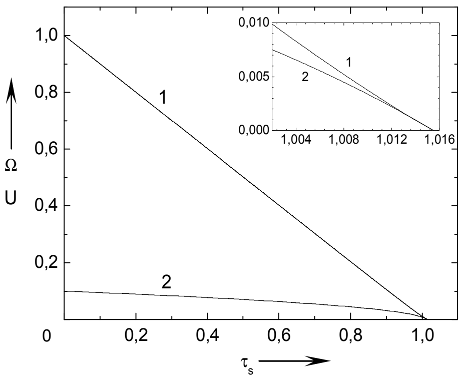

Рисунок 3 – Зависимость безразмерных линейной (кривая 1) и угловой (2) скоростей от безразмерного времени при $\Omega_0 = 0,1$

На зависимости времени движения кольца до остановки от начальной угловой скорости (рисунок 4) можно выделить три участка: малых угловых скоростей ($\Omega_0 << 1$), сопоставимых с безразмерной линейной ($\Omega_0 \approx 1$) и больших угловых скоростей ($\Omega_0 >> 1$). На первом участке время остановки очень медленно растет с увеличением угловой скорости. Этот факт объясняется тем, что в выражение для кинетической энергии угловая скорость входит квадратично и при малых ее значениях вклад в кинетическую энергию оказывается очень малым.

На третьем участке время остановки кольца практически линейно растет с увеличением Ω_0. Для более подробного исследования этого участка следует выполнить обезразмеривание по параметру $\tau = (fg / R\omega)t$ и исследовать время остановки в единицах времени прекращения чисто вращательного движения.

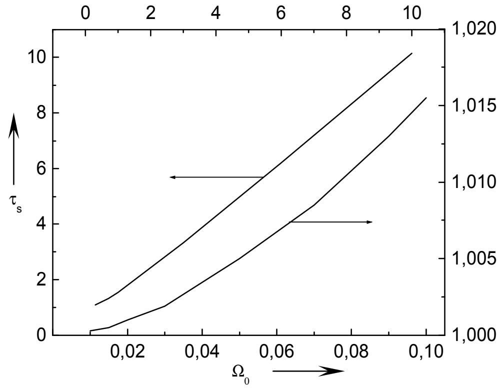

Рисунок 4 – Зависимость безразмерного времени движения кольца до остановки от начальной угловой скорости: нижняя кривая – при малых угловых скоростях, верхняя – при малых и средних значениях угловой скорости

В таблице 1 приведены численные значения времени движения кольца до остановки при ряде значений начальной безразмерной угловой скорости, а также осуществлен переход к размерным величинам при $f = 0{,}2$, $v_{C0} = 4$ м/с и $R = 0{,}1$ м, что позволяет оценить временной масштаб задачи. Отметим, что увеличение угловой скорости в 10 000 раз привело к увеличению времени движения в 100 раз. Это обусловлено тем, что увеличение безразмерной угловой скорости от 0,01 до 1,0 привело всего к полуторакратному увеличению времени движения до остановки.

Для проверки правильности выполненных расчетов использована теорема об изменении кинетической энергии

$$K - K_0 = A, \tag{16}$$

где $K = (U^2 + \Omega^2)/2$ – кинетическая энергия тела в безразмерной форме, K_0 – ее начальное значение.

Таблица 1

Ω_0	0,01	0,05	0,1	0,7	1	6	10	100
τ_s	1,0003	1,005	1,016	1,325	1,544	6,22	10,15	100,03
ω_0 ,рад/с	0,4	2	4	28	40	240	400	4000
t_s , с	2,04	2,05	2,07	2,7	3,15	12,7	20,7	204

Мощность сил трения определяется произведением момента сил трения относительно МЦС на угловую скорость. В безразмерной форме можно записать

$$N = \sqrt{1+\beta^2}\, I_1 \Omega . \tag{17}$$

Работа определяется интегрированием мощности по безразмерному времени. На основании (16) можно записать $\xi = (K - A)/K_0 = 1$. При всех исследованных начальных условиях в диапазоне $0,01 < \Omega_0 < 100$ это соотношение выполнялось с большой точностью, что свидетельствует о достаточной точности представления интегралов рядами (7), (10) и адекватном функционировании разностной схемы интегрирования системы дифференциальных уравнений (14).

Таким образом, по сформулированным в работе дифференциальным уравнениям движения выполнено исследование взаимовлияния вращательного и поступательного движений кольца под действием сил трения и установлено, что оба вида движения прекращаются одновременно. Полученные результаты показывают, что движение кольца в качественном отношении такое же, как и движение диска [1, 2]. Предел отношения безразмерных угловой и линейной скоростей, как и в работе [2], зависит от радиуса инерции тела. В рассматриваемом случае это отношение равно квадрату отношения центрального радиуса инерции тела к радиусу кольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Farkas, Z.** Frictional coupling between sliding and spinning disks / Z. Farkas, G. Bartels, D. E. Wolf, T. Unger // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 90, № 24. – P. 248–302.

2 **Weidman, P.** Regimes of terminal motion of sliding spinning disks / P. Weidman, C. Malhotra // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95, № 26. – P. 264–303.

3 **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: ГИФМЛ, 1963.– 1100 с.

Получено 22.05.2006