3 **Трейф, В. Б.** Конденсация ДНК, вызванная адсорбцией лигандов / В. Б. Трейф, Д. Ю. Ландо // Мол. биол. – 2001. – Т. 35, № 2. – С. 285–297.

4 **Лиманская, Л. А.** S-форма ДНК – суперспиральная ДНК с 1.94–2.19 A расстоянием между парами оснований вдоль оси дуплекса / Л. А. Лиманская, А. П. Лиманский // Мол. биол. – 2006. – Т. 40, № 1. – С. 122–136.

5 **By, Yang Yang** Elastic theory of nucleosomal DNA / Yang Yang By, L. S. Couchman // Proc.R.Soc.Lond.A. – 1997. V.453. – P. 225–254.

6 **Бидерман, В. Л.** Определение натяжения стального каната, навитого на барабан грузоподъемного устройства / В. Л. Бидерман. М. : Машиниздат. – 1985. – Вып. 2. – С. 47–54.

Получено 30.05.2007

ISBN 978-985-468-405-5. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 2. Гомель, 2008

УДК 656.225.073.4

О. В. КОЗУНОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ ОСНОВАНИЯ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается упругая балка конечной длины на упругом физически нелинейном основании под действием нагрузки. Балка симметрична относительно вертикальной оси. Балка массивная, условия прилипания: без отрыва балки от основания. *Граничные условия задачи*: на границе расчетной области основания перемещения равны нулю; на поверхности основания, вне контакта балки с основанием, реактивные давления равны нулю. Нелинейность основания описывается функцией пластичности. Решение краевой задачи строится в перемещениях, численно, с использованием метода последовательных приближений.

Из практики известно, что грунты представляют собой *неоднородное* твердое тело. Поэтому зависимость между напряжениями и деформациями для большинства видов грунтов имеет явно *нелинейный* характер и грунты следует рассматривать как *нелинейно* деформируемую среду, подчиняющуюся общим закономерностям теории малых упругопластических деформаций, разработанной А. А. Ильюшиным, В. В. Соколовским [1, 2].

Постановка краевой задачи. Рассматривается упругая балка конечной длины $2l$, на упругом физически нелинейном основании под действием нагрузки $q(x)$, P. Балка симметрична относительно оси Y, предполагаемая глубина расчетной области $h = 3l$ (рисунок 1).

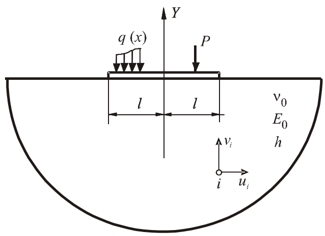

Рисунок 1 – Расчетная схема основания под нагруженной балкой

Между балкой и основанием возникают только нормальные напряжения (реактивные давления). Так как силы трения сцепления на контакте слоев малы, то ими пренебрегают. Балка массивная, условия прилипания: без отрыва балки от основания.

Граничные условия задачи: на границе расчетной области основания перемещения: $u = 0$, $v = 0$; на поверхности основания, вне контакта балки с основанием, реактивные давления: $P_x = P_y = 0$.

Решение краевой задачи строится в перемещениях. *Искомые функции*: $u_i(x)$, $v_i(y)$ – проекции перемещения i–той точки основания на координатные оси; $P_i(x, y)$ – реактивное давление i–той точки основания в зоне контакта балки с основанием; $W_{ik}(x, y)$ – осадка k – того сечения балки в зоне контакта балки с i–той точки основания.

Уравнения теории малых упругопластических деформаций. Напряженно-деформированное состояние упругого основания – плоское, поэтому согласно гипотезам теории малых упругопластических деформаций [3] для решения плоской задачи теории пластичности используются следующие уравнения в напряжениях:

– *уравнения равновесия*

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y = 0; \tag{1}$$

– *уравнение совместности деформаций*

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}; \tag{2}$$

– *физические уравнения, отражающие свойства упругопластического тела,*

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_x; \quad \sigma_y - \sigma_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_y; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}, \tag{3}$$

где σ_i – интенсивность напряжений; ε_i – интенсивность деформаций, σ_0 – среднее напряжение;

– выражения для интенсивности деформаций и зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{6(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y) + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2}\ ;\ \sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)\ , \tag{4}$$

где $\Phi(\varepsilon_i)$ – зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений. Вид этой функции зависит только от материала, а не от вида напряженного состояния тела [3].

Вывод функции пластичности. Зависимость $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ задается произвольно и имеет нелинейный характер, носит название закона нелинейной упругости. График зависимости $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ изображен на рисунке 2.

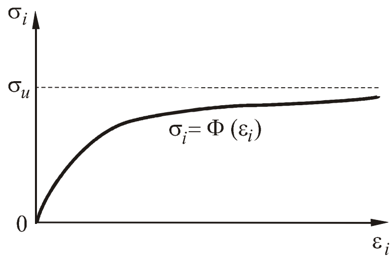

Рисунок 2 – Закон нелинейной упругости основания

Для упругого основания с учетом его нелинейности зависимость $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ выражается как

$$\sigma_i = E_0(1-\omega_i)\,\varepsilon_i\,, \tag{5}$$

где $\omega_i = \omega(\varepsilon_i)$ – функция интенсивности деформации, или *функция пластичности*; E_0 – начальный модуль упругости основания.

Закон нелинейной упругости основания $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ задается в виде

$$\sigma_i = A\,\mathrm{th}(\alpha\varepsilon_i)\ , \tag{6}$$

где A, α – коэффициенты, определяемые в ходе исследования функции $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, а именно $A = \sigma_u$, $\alpha A = E_0$; σ_u – предел прочности основания.

После подстановки A, α зависимость (6) изменяется следующим образом

$$\sigma_i = \sigma_u\,\mathrm{th}\,\frac{E_0}{\sigma_u}\varepsilon_i\ . \tag{7}$$

Соотношение (7) приводится к виду (5), в результате чего функция пластичности выражается формулой

$$\omega_i = 1 - \frac{\sigma_u}{E_0 \varepsilon_i} \operatorname{th} \frac{\varepsilon_i E_0}{\sigma_u} . \tag{8}$$

Метод упругих решений. Рассматриваемая краевая задача содержит уравнения пластичности, решение которых в общем случае весьма сложно. Для решения такого типа нелинейной задачи используется метод упругих решений А. А. Ильюшина, который основан на принципе последовательных приближений. В первом приближении полагаем, что $\omega_i^{(0)} = 0$, и получаем упругое решение искомых функций.

Граничные условия задачи сформулированы в перемещениях, поэтому уравнения, необходимые для ее решения, выражаются также в перемещениях, и уравнения (1)–(4) приводятся к виду [3], а именно:

а) уравнения Ляме

$$(G+\lambda)\frac{\partial \theta}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = GR_x ; \quad (G+\lambda)\frac{\partial \theta}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = GR_y ; \tag{9}$$

где θ – относительное изменение объема, $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y$; G и λ – постоянные Ляме; R_x, R_y – члены правой части уравнений Ляме, содержащие ω_i, причем

$$R_x = \omega_i \nabla^2 u + \frac{1}{3}\omega_i \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial \omega_i}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

$$R_y = \omega_i \nabla^2 v + \frac{1}{3}\omega_i \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{4}{3}\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial \omega_i}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \tag{10}$$

б) уравнения, связывающие напряжения и деформации в любой точке исследуемой области;

в) граничные условия:

$$P_{Nx} + T_x = \left(2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\theta\right) l + G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) m ;$$

$$P_{Ny} + T_y = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) l + \left(2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\theta\right) m , \tag{11}$$

где l, m – косинусы углов между соответствующими осями и нормалью к площадке; $(P_{Nx} + T_x)$, $(P_{Ny} + T_y)$ – поверхностные силы.

К уравнениям (10), (11) добавляем уравнение изгиба балки в контактной зоне

$$\frac{d^4 v_i}{dx^4} = -\frac{P_i - X_i}{EI_б} , \tag{12}$$

где P_i – реактивные давления; X_i – внешние объемные силы (в зоне контакта $X_i \to Y_v$); $EI_б$ – жесткость балки при изгибе.

Сформулированная краевая задача решается методом конечных разностей (МКР), то есть заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями. Разбивка расчетной области представлена на рисунке 3. В настоящее время составлена программа на языке *Mathematica* 5 для реализации указанного подхода, проводится ее апробация для получения численных результатов упругого решения.

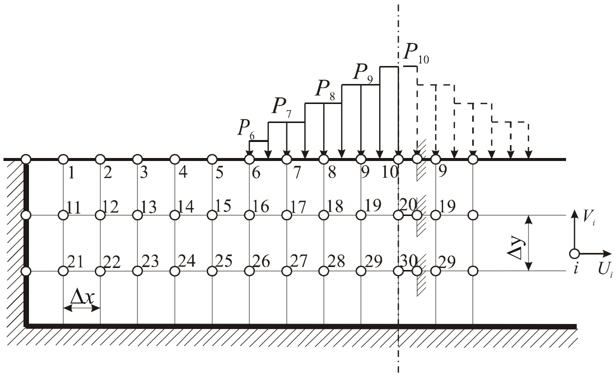

Рисунок 3 – Разбивка расчетной области

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Винокуров, Е. Ф.** Итерационный метод расчета оснований и фундаментов / Е. Ф. Винокуров // Строительство и архитектура Белоруссии. – 1970. – № 1. – С. 31–34.

2 **Винокуров, Е. Ф.** Итерационный метод расчета балок и плит, лежащих на линейно и нелинейно деформируемом анизотропном основании / Е. Ф. Винокуров // Строительство и архитектура Белоруссии. – 1970. – № 3. – С. 26–28.

3 **Рындин, Н. И.** Краткий курс теории упругости и пластичности: учеб. пособие / Н. И. Рындин ; под ред. проф. В. С. Постоева. – Л. : изд-во Ленингр. ун-та, 1974. – 136 с.

4 **Машкова, О. В.** К расчету балок на упругом основании с учетом физической нелинейности основания / О. В. Машкова // VIII Республиканская научно-техническая конференция студентов и аспирантов. – Минск : БНТУ, 2003. – Ч. 4. – С. 72–73.

5 **Босаков, С. В.** Расчет балки на упругой физически нелинейной полуплоскости / С. В. Босаков, О. В. Машкова // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: междунар. сб. науч. тр. – Гомель : УО «БелГУТ», 2005. – С. 40–43.

Получено 20.12.2007