

УДК 531.77

С. А. ГОЛЯКЕВИЧ, Д. В. ГАПАНЮК, В. С. ВИХРЕНКО

Белорусский государственный технологический университет, Минск

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОЛЬЦА ПО НАКЛОННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СООТНОШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УГЛОВОЙ И ЛИНЕЙНОЙ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрено движение тонкого однородного кольца по наклонной поверхности под действием сил трения, пропорциональных нормальному давлению. После перехода к безразмерным переменным задача сведена к двум управляющим параметрам – коэффициенту трения скольжения и отношению начальных значений угловой и линейной скоростей. Выполнено исследование взаимовлияния вращательного и поступательного движений кольца и установлено, что оба вида движения прекращаются одновременно.

Динамика сыпучих материалов в значительной мере определяется действием сил трения при соприкосновении отдельных частиц. Это явление определяет тот факт, что механические свойства потока сыпучих веществ значительно отличаются от механических свойств жидкостей.

Ранее считалось, что влияние сил трения при вращении незначительно по сравнению с силами трения, возникающими при поступательном движении. Однако оказалось, что в некоторых ситуациях действие этих сил может заметно отразиться на характере движения сыпучих веществ. В этой связи задача о взаимном движении тел при учете трения между ними имеет важное прикладное значение. В последние годы было исследовано движение диска по шероховатой плоскости и установлена интересная особенность – его вращательное и поступательное движения взаимосвязаны и прекращаются одновременно [1, 2]. Возникает вопрос, сохранится ли эта особенность и при движении тонкостенного кольца.

В работе [3] было рассмотрено движение тонкого однородного кольца радиуса R по шероховатой горизонтальной поверхности и получены соотношения для проекции силы трения на ось Ox и момента сил трения относительно мгновенного центра скоростей:

$$F_x = -fmg(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma)) / \sqrt{1 + \beta^2}; \quad (1)$$

$$M_P = -fmgR\sqrt{1 + \beta^2} I_1(\gamma), \quad (2)$$

где f – коэффициент трения кольца о поверхность; mg – сила тяжести кольца; $b = V_C / \omega$ – расстояние от МЦС до центра кольца; $\beta = b / R$; $\gamma = 2\beta / (1 + \beta^2)$; $I(\gamma)$ – функции вида:

$$I_1(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \gamma \cos \varphi} \, d\varphi; \quad I_2(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma \cos \varphi}} \, d\varphi;$$

$$I_3(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \gamma \cos \varphi}} \, d\varphi. \quad (3)$$

Если же придать плоскости некоторый уклон, то элементарная сила трения:

$$dF = \frac{fmg \cos \alpha}{2\pi} d\varphi, \quad (4)$$

где α – угол между наклонной и горизонтальной плоскостями; φ – угол, определяющий положение рассматриваемого участка кольца на наклонной плоскости.

Следует также принять во внимание проекции силы тяжести G , действующую на кольцо, на направление движения центра тяжести кольца, т.е. $G \sin \alpha$. Тогда выражения (1) и (2) примут вид:

$$F_x = - \frac{fmg(\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma))}{\sqrt{1 + \beta^2}} \cos \alpha + mg \sin \alpha; \quad (5)$$

$$M_p = -fmgR \sqrt{1 + \beta^2} I_1(\gamma) \cos \alpha. \quad (6)$$

Введя безразмерные скорость $U = V_C / V_{C0}$, угловую скорость $\Omega = \omega R / V_{C0}$ и время $\tau = (fg / V_{C0})t$, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение кольца по наклонной шероховатой поверхности:

$$\begin{cases} d\Omega = -\sqrt{1 + \beta^2} \left[I_1(\gamma) - \frac{\gamma}{2} (\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma)) \right] \cos \alpha \, d\tau, \\ dU = - \left[\frac{[\beta I_2(\gamma) - I_3(\gamma)]}{\sqrt{1 + \beta^2}} \cos \alpha - \frac{1}{f} \sin \alpha \right] d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Как видим, исключить коэффициент трения f из системы дифференциальных уравнений (7) полностью не удалось. Исходя из представления о конусе трения, для того чтобы кольцо имело возможность остановиться, необходимо выполнение условия $f \geq \operatorname{tg} \alpha$. Учитывая данное условие, коэффициент трения f будет являться дополнительным входным параметром в ранее разработанном алгоритме расчета, накладывающим ограничения на варьируемые значения угла α ($0 \leq \alpha \leq \operatorname{arctg} f$).

Алгоритм решения системы дифференциальных уравнений в пакете Mathcad был модифицирован в соответствии с (7). Как и в случае с горизонтальной поверхностью [3], предел отношения Ω/U в момент остановки равнялся единице, т. е. вращательное и поступательное движения кольца прекращались одновременно (рисунки 1 и 2). А время до остановки, как и следовало ожидать, – увеличилось.

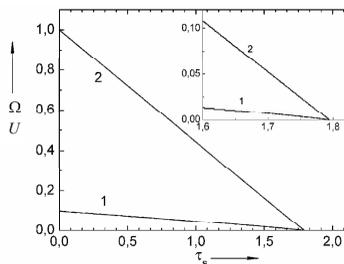


Рисунок 1 – Зависимость безразмерных угловой 1 и линейной 2 скоростей от безразмерного времени при $\Omega_0 = 0,1$

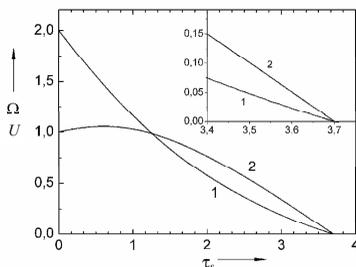


Рисунок 2 – Зависимость безразмерных угловой 1 и линейной 2 скоростей от безразмерного времени при $\Omega_0 = 2$

Расчет производился при фиксированном угле наклона поверхности $\alpha = 5^\circ$ и коэффициенте трения $f = 0,2$. На рисунке 1 представлены графики для случая $\Omega_0 = 0,1$. Отметим, что характер изменения безразмерных скоростей остался схожим со случаем движения кольца по горизонтальной поверхности. Однако при угловых скоростях ($\Omega_0 > 1$) наблюдаются существенные отличия. Наличие угла наклона поверхности α и относительно большая угловая скорость в начале движения увеличивают линейную скорость, хотя оба движения в итоге прекращаются одновременно (см. рисунок 2). Это означает, что более энергетически насыщенная степень свободы передает часть энергии менее насыщенной, пока их энергии не станут сопоставимыми.

В таблице 1 приведены значения безразмерного времени движения кольца до остановки для ряда значений начальной безразмерной угловой скорости при $f=0,2$, $v = 4$ м/с, $R = 0,1$ м и $\alpha = 5^\circ$.

Таблица 1

Ω_0	0,01	0,05	0,1	0,7	1	6	10	100
τ_s^*	1,785	1,787	1,795	2,174	2,482	9,02	14,415	136,46

Для анализа приведенных значений найдем отношение безразмерных времен для наклонной и горизонтальной поверхности τ_s^* / τ_s и представим в виде графической зависимости (рисунок 3).

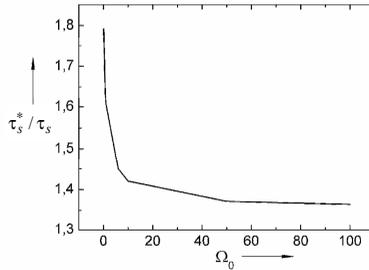


Рисунок 3 – Зависимость отношения безразмерных времен до остановки кольца:

τ_s^* и τ_s – безразмерное время для наклонной и горизонтальной поверхности соответственно

Анализируя приведенный график, отметим, что отношение как безразмерных, так и реальных времен до остановки имеет нелинейную зависимость, это не позволяет ввести коэффициенты пересчета. Однако при $\Omega_0 > 50$ это отношение асимптотически приближается к 1,36.

Для проверки правильности выполненных расчетов использована теорема об изменении кинетической энергии

$$K - K_0 = A, \quad (8)$$

где $K = (U^2 + \Omega^2) / 2$ – кинетическая энергия тела в безразмерной форме, K_0 – ее начальное значение.

Мощность сил трения определяется произведением момента сил трения относительно МЦС на угловую скорость. В безразмерной форме можно записать

$$N = \sqrt{1 + \beta^2} I_1 \Omega. \quad (9)$$

Работа определяется интегрированием мощности по безразмерному времени. На основании (9) можно записать $\xi = (K - A) / K_0 = 1$. При всех исследованных начальных условиях в диапазоне $0,01 < \Omega_0 < 100$ это соотношение выполнялось с большой точностью.

Для наглядного подтверждения правильности расчетов была создана программа в Mathcad, анимирующая движение кольца, в которой демонстрирует-

ся, что остановка вращательного и поступательного движения происходит одновременно.

Таким образом, на основе сформулированных в работе дифференциальных уравнений движения выполнено исследование взаимовлияния вращательного и поступательного движений кольца по наклонной поверхности под действием сил трения. Установлено, что оба вида движения прекращаются одновременно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Farkas, Z.** Frictional coupling between sliding and spinning disks / Z. Farkas, G. Bartels, D. E. Wolf, T. Unger // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – V. 90, № 24. – P. 248–302.

2 **Weidman, P.** Regimes of terminal motion of sliding spinning disks / P. Weidman, C. Malhotra // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – V. 95, № 26. – P.264–303.

3 **Голякевич, С. А.** Влияние соотношения начальных угловой и линейной скоростей на движение кольца по горизонтальной шероховатой поверхности / С. А. Голякевич, Д. В. Гапанюк, В.С. Вихренко // *Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. Вып. 1 / Белорус. гос. ун-т трансп.*; под ред. А. О. Шимановского. – Гомель, 2007. – С. 15–22.

Получено 30.05.2007

**ISBN 978-985-468-405-5. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 2. Гомель, 2008**

УДК 621.873.12

А. Н. ДУБКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

АНАЛИЗ НАГРУЖЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ПОДКРАНОВЫХ ПУТЕЙ КОЗЛОВОГО КРАНА

Выполнен анализ работы козлового крана и элементов подкранового пути. На основе анализа расчетных схем элементов рассматриваемой механической системы: крана, рельса, закладку, полушпалу – получены значения нагрузок, возникающих при различных режимах движения крана. Выявлены причины, влияющие на работоспособность верхнего строения пути.

Постановка задачи. Козловой кран КК-12,5 обслуживает погрузочно-разгрузочную площадку складирования готовой продукции предприятия. Подкрановый путь длиной 50 м имеет железнодорожные рельсы типа Р65, уложенные на железобетонные полушпалы с длиной 120 см, поперечным сечением 22×25 см и армированием в нижней части. Межосевые расстояния – 50 см.