

УДК 534

*Д. В. КОМНАТНЫЙ*

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого*

## **ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

В статье рассматривается возможность включения в курс теоретической механики технического университета изучения отдельных явлений в нелинейных динамических системах с целью сближения программ технического и естественнонаучного университетов. Предлагается ввести изучение синхронизации колебаний нелинейных связанных осцилляторов, поскольку это явление имеет как фундаментальное, так и практическое значение. Разработан способ изложения вывода и анализа уравнений нелинейных колебаний методом медленно меняющихся амплитуд в сочетании с идеей электромеханической аналогии.

В настоящее время курсы теоретической механики университетов включают в себя ряд разделов теории нелинейных колебаний. В учебниках [1, 2] в качестве примера использования различных методов анализа таких колебаний рассматривают маятник Фруда. Но учебный процесс технического вуза направлен главным образом на практическую деятельность, поэтому для подготовки инженеров полезнее изучать не модельные устройства, а явления, которые имеют как фундаментальное, так и прикладное значение.

Таким явлением, по мнению автора, является синхронизация двух и более взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Это явление обнаруживается во многих областях науки [3], поэтому справедливо считается фундаментальным. При этом оно имеет и достаточное число практических приложений [4], которые относятся к области вибрационной техники, автоматики и телемеханики, а именно к проектированию генераторов синхросигналов [4, 5]. Поэтому знание этого явления будет полезным студентам разных специальностей.

Изучение нелинейных колебаний требует применения специальных математических методов, которые, как правило, не входят в программы технических университетов. В работе [6] предложен метод исследования синхронизации колебаний на основе электромеханической аналогии, однако вывод основных уравнений реализован там крайне небрежно. Поэтому нами предлагается проводить анализ процессов в связанных нелинейных осцилляторах методом медленно меняющихся амплитуд [7].

Перед рассмотрением данного материала студенты должны получить сведения об аналогии между параметрами механических и электрических ос-

цилляторов: индуктивность – масса, омическое сопротивление – коэффициент сопротивления, емкость – коэффициент упругости [8].

Материал излагается на примере задачи Гюйгенса о синхронизации хода двух механических осцилляторов (маятников часов), укрепленных на подвижной балке [9]. Вначале указывается на аналогию в колебаниях часов и электронных генераторов электрических колебаний (механических и электрических осцилляторов), которая заключается в следующем. Часовой механизм получает энергию от ударно-возвратного механизма привода (гиревого или пружинного) импульсами, также и некоторые типы электронных генераторов возбуждаются импульсами мощности от источника энергии. Отметим, что более строгое обоснование этой аналогии проведено в [9].

Затем рассматриваются колебания в электронном генераторе, схема которого приведена на рисунке 1. Параметры схемы генератора являются аналогами параметров механического осциллятора по электромеханической аналогии, упомянутой выше [6, 8]. Для целей нашего анализа достаточно рассмотреть контур с электронной лампой, заменив ее нелинейным сопротивлением и предположив, что в контуре действует сторонняя ЭДС. Так получаем приведенную на рисунке схему замещения.

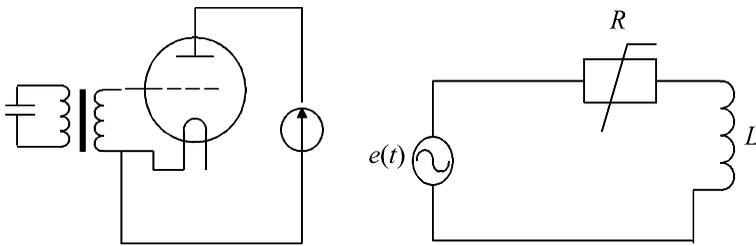


Рисунок 1 – Электронный генератор и схема замещения его контура

Нелинейное сопротивление зависит от тока в контуре по закону

$$R(i) = R \left( 1 - \frac{I_0}{I} \right). \quad (1)$$

В контуре действует сторонняя переменная ЭДС, изменяющаяся по закону,

$$e(t) = E \cos(\omega_c t + \varphi_0). \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение для тока в контуре в соответствии со вторым законом Кирхгофа имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t). \quad (3)$$

Ищем решение этого уравнения методом медленно меняющихся амплитуд в виде

$$i(t) = A(t) \cos \xi(t), \quad (4)$$

где  $\xi(t) = \omega_c t + \varphi_a$ .

Подставим (4) и (2) в уравнение (3), получим:

$$L\dot{A} \cos(\omega_c t + \varphi_a) - LA\dot{\xi} \sin(\omega_c t + \varphi_a) + RA \cos(\omega_c t + \varphi_a) = E \cos(\omega_c t + \varphi_0). \quad (5)$$

Используем известные выражения для синуса и косинуса суммы и приравняем коэффициенты при  $\cos \omega_c t$  и  $\sin \omega_c t$ . Таким образом получим два уравнения:

$$L\dot{A} \cos^2 \varphi_a - LA\dot{\xi} \sin \varphi_a + RA \cos \varphi_a = E \cos \varphi_0; \quad (6)$$

$$-L\dot{A} \sin \varphi_a - LA\dot{\xi} \cos \varphi_a - RA \sin \varphi_a = E \sin \varphi_0. \quad (7)$$

Уравнение (6) умножим на  $\cos \varphi_a$ , а (7) – на  $\sin \varphi_a$ , после чего вычтем (6) из (7). Получим уравнение для изменяющейся амплитуды:

$$L\dot{A} + RA = E \cos(\varphi_0 - \varphi_a). \quad (8)$$

С учетом (1) уравнение (8) можно записать

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{R}{L}(A - A_0) + \frac{E}{L} \cos(\varphi_0 - \varphi_a). \quad (9)$$

Уравнение (6) умножим на  $\sin \varphi_a$ , а уравнение (7) на  $\cos \varphi_a$  и сложим эти уравнения. Получим

$$-LA\dot{\xi} = -E \sin(\varphi_0 - \varphi_a) \quad (10)$$

или

$$\dot{\xi} = \frac{E \sin(\varphi_0 - \varphi_a)}{LA}. \quad (11)$$

С учетом того, что  $\dot{\xi} = \omega_c - \dot{\varphi}_a$ , уравнение (11) приводится к виду:

$$\frac{d\varphi_a}{dt} = \omega_c - \frac{E \sin(\varphi_0 - \varphi_a)}{LA}. \quad (12)$$

Если сторонняя ЭДС в контур наводится путем магнитной связи с таким же контуром, как показано на рисунке 2, то выражение для сторонней ЭДС имеет вид [10]:

$$e(t) = \omega M A \cos\left(\omega t + (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\pi}{2}\right). \quad (13)$$

Тогда система уравнений для амплитуд и фаз в связанных колебательных контурах имеет вид:

$$\frac{dA_1}{dt} = -\frac{R}{L}(A_1 - A_0) + \frac{\omega M A_2}{L} \cos\left((\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{R}{L}(A_2 - A_0) + \frac{\omega MA_1}{L} \cos\left((\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\pi}{2}\right); \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega_1 - \frac{\omega MA_2 \sin\left((\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\pi}{2}\right)}{LA_1}; \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega_2 - \frac{\omega MA_1 \sin\left((\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{\pi}{2}\right)}{LA_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

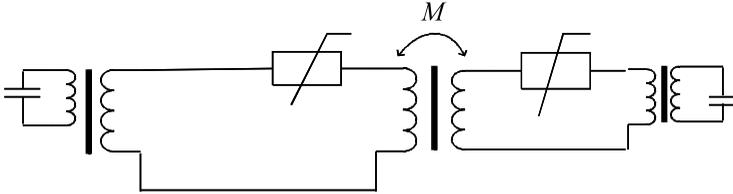


Рисунок 2 – Связанные электрические контуры

Введем следующие обозначения:

$$\omega_1 - \omega_2 = \Delta, \quad \frac{A_2}{A_1} = \rho, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi, \quad \frac{2L\Delta}{\omega M} = \varepsilon, \quad \frac{\omega M}{R} = \mu.$$

Тогда систему уравнений (14) можно привести к виду [6]

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\Delta\rho}{\mu\varepsilon} \left[ (1-\rho) \frac{A_2}{A_0} - \mu \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi \right]; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Delta \left[ 1 + \frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{\varepsilon \cos \varphi} \right]. \quad (15)$$

Считая, что энергия в системе генераторов не рассеивается, на основе закона Джоуля –Ленца получим условие для амплитуд колебаний:

$$R \left( 1 - \frac{A_0}{A_1} \right) A_1^2 + R \left( 1 - \frac{A_0}{A_2} \right) A_2^2 = 0. \quad (16)$$

Тогда

$$\frac{A_0}{A_2} = \frac{1 + \rho^2}{1 + \rho}. \quad (17)$$

Исключая время из системы (15), с учетом (17) получим уравнение характеристик

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{1+\rho^2}{\mu} \frac{\frac{1-\rho}{1+\rho} - \mu \sin \varphi}{\varepsilon + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \cos \varphi}. \quad (18)$$

В системе координат  $\rho - \varphi$  построим кривые, соответствующие нулю числителя и знаменателя правой части равенства (18) (рисунок 3). Отмеченные на графике точки  $F_1$  и  $F_2$  являются точками режима запираания колебаний в связанных контурах. Они реализуются при  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ , то есть если колебания в связанных генераторах осуществляются в противофазе.

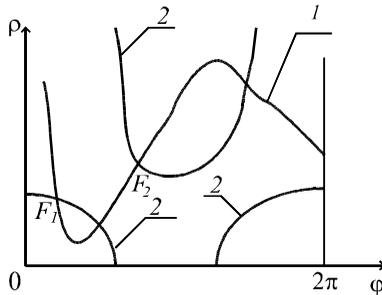


Рисунок 3 – График характеристик уравнения (18):  
1 – числитель обращается в ноль; 2 – знаменатель обращается в ноль

Таким образом, показано, что в слабо связанных электрических, а следовательно, и в аналогичных механических осцилляторах возможно возникновение колебаний, происходящих в противофазе с одинаковой частотой. Именно такие колебания маятниковых часов, укрепленных на упругой балке, наблюдались в опытах Гюйгенса и в опытах, поставленных в институте «Механобр» [9]. При этом неодинаковые по своим параметрам осцилляторы синхронизируются на частоте, отличающейся от собственных частот обоих осцилляторов. Осцилляторы с незначительно различающимися параметрами синхронизируются на частоте, близкой к частоте собственных колебаний. Методами теории Ляпунова можно показать, что режим синхронизированных колебаний устойчив. Следует обратить внимание студентов на тот факт, что синхронизироваться могут колебания только в нелинейных системах. Примером нелинейной механической колебательной системы являются часы.

Рассмотренный способ анализа колебаний в нелинейных системах позволяет выявить главные особенности режима синхронизации колебаний при помощи достаточно простого математического аппарата. Применяя его, можно рассматривать в курсе теоретической механики достаточно сложные явления в нелинейных колебательных системах и, таким образом, расширить и

углубить познания студентов в современных разделах механики и теории колебаний. Причем полученные знания могут послужить основой для применения синхронизации колебаний на практике.

Автор считает своим долгом сообщить, что данная работа выполнена по инициативе и при поддержке доцента кафедры «Техническая физика и теоретическая механика» БелГУТа Александра Николаевича Дубко, оставившего после себя светлую память для всех, кто имел возможность с ним работать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Лойцянский, Л. Г.** Курс теоретической механики : в 2 т. / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Наука, 1983. – Т. 2. Динамика: учеб. пособие для вузов. – 640 с.
- 2 **Ольховский, И. И.** Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Изд-во МГУ, 1974. – 569 с.
- 3 **Пиковский, А.** Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Курже. – М. : Техносфера, 2003. – 496 с.
- 4 **Блехман, И. И.** Синхронизация в природе и технике / И. И. Блехман. – М. : Наука, 1981. – 359 с.
- 5 **Шполянский, В. А.** Хронометрия / В. А. Шполянский. – М. : Машиностроение, 1974. – 655 с.
- 6 **Пиппард, А. Б.** Физика колебаний / А. Б. Пиппард. – М. : Высш. шк., 1985. – 456 с.
- 7 **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 511 с.
- 8 **Яблонский А. А.** Курс теории колебаний / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. – М. : Высш. шк., 1966. – 255 с.
- 9 **Блехман, И. И.** Синхронизация динамических систем / И. И. Блехман. – М. : Наука, 1971. – 896 с.
- 10 **Основы электротехники** / К. А. Круг [и др.]. – М. : Госэнергоиздат, 1952. – 432 с.

*D. V. KOMNATNY*

## STUDY OF NONLINEAR DYNAMICS IN THE COURSE OF ENGINEERING MECHANICS AT TECHNICAL UNIVERSITY

In the paper the potentiality of introducing some phenomena in non-linear dynamic systems in the course of Engineering Mechanics at Technical University to adjust the programs of technical and natural-science universities is being considered. It is offered to introduce the study of nonlinear tied oscillator synchronization. This phenomenon has fundamental and practical importance. The conclusion and analysis modes of equations for non-linear oscillations by slowly varying amplitudes method in combination with the idea of electro-mechanical analogy have been developed.

Получено 29.09.2008