

Таким образом, из сказанного можно сделать вывод о том, что теоретическая механика в учебном плане должна находиться после дисциплин описательных курсов, тогда ее изучение приобретет особую значимость в подготовке специалистов, умеющих принимать взвешенные инженерные решения. Автор этой статьи выносит данный вопрос для дискуссии.

О. А. BOBER

ENGINEERING MECHANICS: ITS PLACE IN THE EDUCATIONAL PROCESS

The author of paper tables/proposes “About the place of engineering mechanics teaching in educational process” question for the discussion. By general conclusion and the analysis of long-term testing of first- and third-year students – future mechanical engineers and construction engineers - studying Engineering Mechanics and also long-term methodical experience it was concluded that it is reasonable to study Engineering Mechanics after the descriptive courses and chosen specialities.

Получено 27.05.2008

**ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009**

УДК 531.8/534

В. В. ДУБИНИН, В. В. ВИТУШКИН, Г. И. ДУБРОВИНА

г. Москва, Московский государственный университет им. Н.Э. Баумана

ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В МЕХАНИКЕ

Описаны разработанные авторами автоматизированные комплексы для проведения лекционных демонстраций и лабораторных работ по теоретической механике. Комплект оборудования включает комплексы для изучения плоского движения (качения), гироскопического момента, динамических реакций связей, свободных и вынужденных колебаний систем твердых тел.

В настоящее время развитие информационных технологий в различных областях науки и в высшем образовании достигло уровня, когда возможно выделить определенные научные направления, оценить уровень их развития, определить значение и приоритетную важность, четко сформулировать наименования самого направления. Информационные технологии предполагают создание математических моделей физических процессов, их оптимизацию и управление этими процессами в рамках математического моделирования.

Направление более высокого уровня предполагает органичное соединение математического моделирования с физическим экспериментом. Это направление в течение ряда лет успешно развивается на кафедре теоретической механики МГТУ им. Н. Э. Баумана. Разработанный сотрудниками кафедры исследовательский комплекс предполагает наличие физической (механической) установки, программного комплекса оптимизации и управления работой установки, необходимых приборов замера и контроля работы установки, ЭВМ и необходимых технических устройств записи и обработки данных. Такой комплекс не только обеспечивает математический анализ физического явления, но и позволяет экспериментально проверить проведенное моделирование. Работа на кафедре по этому направлению велась как для развития учебного процесса, так и для создания научного комплекса, используемого при обеспечении безопасности работы АЭС (атомных электростанций).

Дополнение комплексов физической установкой, конечно, удорожает исследовательскую систему. Но надо иметь в виду, что «малой» физической установкой моделируется работа только основных узлов больших промышленных комплексов. Для этих установок легко создать любые физические модели процессов, которые имеются в промышленной установке (нелинейности, обратные связи т.д.). Модель-установка в этом случае будет достаточно точно моделировать работу реальных дорогостоящих узлов промышленной установки.

В представленной статье изложены результаты этой работы для учебного процесса. Она привела к созданию автоматизированной лаборатории, которая введена в учебный процесс по курсам теоретической механики и теории колебаний. Лаборатория работает уже более десяти лет. Лаборатория была отмечена медалями ВВЦ в 2001, 2005, 2006 годах.

Комплект лабораторного оборудования, соответствующего современному высокому уровню развития информационных технологий и методик научных исследований, разрабатывался в соответствии с «Требованиями к материально-техническому обеспечению учебного процесса по дисциплине цикла ЕС «Теоретическая механика» высшего профессионального образования», утвержденным Министерством образования России в 2002 году.

Каждый элемент этого комплекта представляет собой автоматизированный комплекс, содержащий экспериментальную установку, снабженную датчиками механических величин (сил, перемещений, скоростей и т.д.), аналого-цифровым преобразователем и ПЭВМ. Такой комплекс позволяет автоматизировать проводимые эксперименты – вводить и обрабатывать параметры исследуемых процессов, задавать и поддерживать режимы работы установок. В основу построения лабораторных установок заложен принцип выявления взаимосвязи между теоретическим описанием процесса (явления), результатами его математического моделирования и данными экспериментального исследования. Результаты экспериментов обрабатываются на ПЭВМ и отображаются в реальном масштабе времени.

Использованный в данной работе подход к построению программного обеспечения лабораторных установок заключается в применении оригинальных и существующих аппаратно-программных средств автоматизации экспериментов, (в частности, LabView), а также автоматизации проектирования систем управления производственными процессами на основе так называемых SCADA – систем (например, Tracе Mode) и т.д. Использование этой оболочки возможно как непосредственно в лаборатории, так и в режиме удаленного доступа.

Лабораторный комплекс для исследования плоскопараллельного движения твердого тела «**Наклонная плоскость (ТМЛ-03М)**» представлен на рисунке 1, а. Он содержит экспериментальную установку, включающую в себя две наклонные плоскости и пару цилиндрических тел с одинаковыми массами и габаритными размерами, но с различными осевыми моментами инерции. Установка позволяет: визуально наблюдать различие кинематических параметров движения тел, а также экспериментально определять эти параметры путем преобразования и обработки электрических сигналов, вырабатываемых датчиками положения центров масс тел.

Результаты испытаний в виде зависимостей от времени напряжений на датчиках, перемещений и скоростей центров масс тел, а также отношения этих скоростей, полученных при моделировании, показаны на рисунке 1, б.

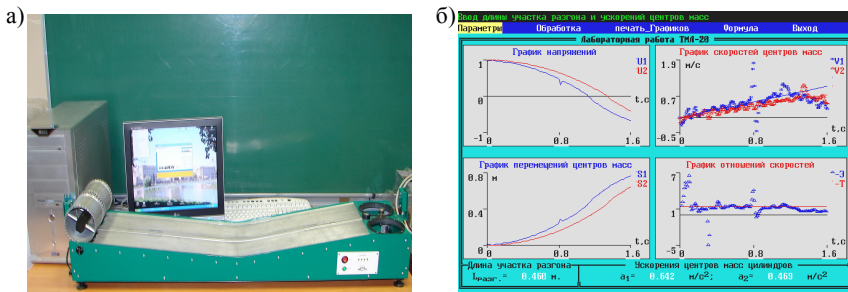


Рисунок 1 – Общий вид комплекса «Наклонная плоскость» (а) и результаты измерений параметров движения (б)

Установка «**Двухстепенной гироскоп**» для исследования прецессионного движения и гироскопических моментов (рисунок 2) лабораторного комплекса (ТМЛ-09М) представляет собой модель двухстепенного гироскопа, которая может быть использована в качестве измерителя угловой скорости (гиротахометр).

В данной установке маховику (ротору) 1 (см. схему установки на рисунке 2) сообщается собственная угловая скорость ω_1 . Маховик установлен на оси АВ и может вращаться вокруг нее на шарикоподшипниках, установленных в его корпусе. В виду малого трения в подшипниках маховика и короткого

времени эксперимента можно считать $|\bar{\omega}_1| = \text{const}$. Ось AB установлена в опорах 2 внутренней рамки 3. Рамка 3, в свою очередь, может поворачиваться вокруг оси 4, закрепленной во внешней рамке 5. На рамке 2 жестко укреплена пружина 6, а на рамке 5 установлены упоры 7. При повороте рамки 2 вокруг оси 4 пружина 6 опирается своим плечом на один из упоров 7.

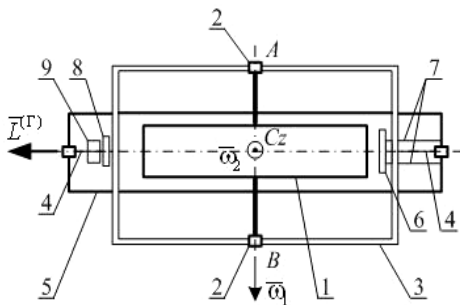


Рисунок 2 – Общий вид и схема экспериментальной установки «Двухступенной гироскоп»

После приведения во вращение маховика рамке 5 посредством электродвигателя, установленного в корпусе установки, сообщается постоянная угловая скорость $\bar{\omega}_2$ вокруг вертикальной оси Cz , в результате чего появляется гироскопический момент $\bar{L}^{(r)}$. Рамка 2 поворачивается на небольшой угол, пропорциональный $\bar{\omega}_2$. Этому повороту рамки препятствует момент упругих сил пружин, равный гироскопическому моменту, и тогда определяется угловая скорость $\bar{\omega}_2$.

Экспериментальная установка лабораторного комплекса «Бегуны» (ТМЛ-04М) представляет собой модель мельничных бегунов и позволяет проводить исследования по определению гироскопических давлений, создаваемых "бегунами" (связкой двух "бегунов") при вращении их с заданной угловой скоростью вокруг вертикальной оси (рисунок 3).

Лабораторная установка комплекса оснащена специальными датчиками для замера угловой скорости вращения "бегунов" вокруг вертикальной оси (переносной угловой скорости) и осадки платформы, по которой они перекатываются. «Бегуны» приводятся во вращение вокруг вертикальной оси с помощью электродвигателя и, перекатываясь по платформе, получают угловую скорость вокруг собственной оси симметрии, что приводит к появлению динамического (гироскопического) давления на платформу. Платформа выполнена в виде тонкого диска и подпружинена относительно неподвижного основания установки так, что один конец пружины упирается в нее, а второй –

в основание. На рисунке 4 представлен отдельный "бегун" и платформа с действующими на них внешними силами.



Рисунок 3 – Общий вид лабораторного комплекса «Бегуны»

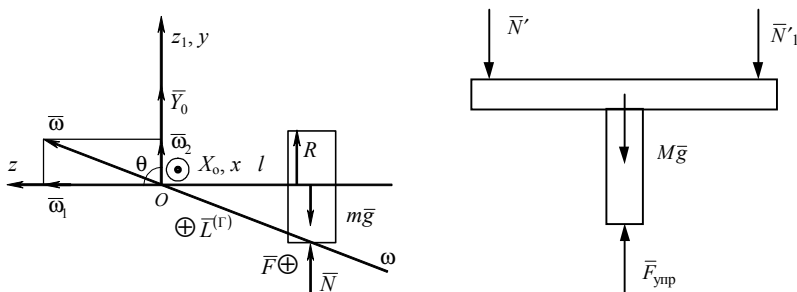


Рисунок 4 – Силы, действующие на "бегун" и платформу

Абсолютная угловая скорость "бегуна" $\bar{\omega}$ равна векторной сумме двух составляющих (см. рисунок 4) – $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$, где $\bar{\omega}_1$ – угловая скорость собственного вращения, $\bar{\omega}_2$ – угловая скорость прецессии.

Силы нормального давления на платформу со стороны "бегунов" \bar{N}' и \bar{N}'_1 одинаковы в силу симметрии установки, т. е. $\bar{N}'_1 = \bar{N}' = \bar{N}$. Сила упругой деформации пружины определяется соотношением:

$$F_{\text{упр}} = c\lambda_{\Sigma},$$

где $\lambda_{\Sigma} = \lambda_{\text{ст}} + \lambda$, $\lambda_{\text{ст}}$ – статическая деформация пружины в состоянии покоя установки, λ – дополнительная деформация пружины при вращении "бегунов".

Запишем теперь выражение для гироскопического момента при вращении "бегуна":

$$\bar{L}^{(r)} = J_z (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2),$$

где J_z – момент инерции "бегуна" (вместе с его осью) относительно собственной оси вращения Oz (см. рисунок 4), угол нутации (угол между осями Oz и Oz_1) $\theta = 90^\circ$.

Применяем принцип Даламбера для отдельного "бегуна":

$$\vec{L}_O^{(u)} + \vec{L}_O^{(e)} = 0,$$

где $\vec{L}_O^{(u)}$ – главный момент сил инерции "бегуна", $\vec{L}_O^{(e)}$ – главный момент внешних сил, при этом $\vec{L}_O^{(u)} \cong \vec{L}_O^{(r)}$, и, следовательно, $\vec{L}_O^{(r)} + \vec{L}_O^{(e)} = 0$.

Для величины гироскопического давления "бегуна" на платформу имеем:

$$N^{(r)} = \frac{J_z \omega_1 \omega_2}{I} = \frac{J_z \omega_2^2}{R} \quad \text{или} \quad N^{(r)} = \frac{c\lambda}{2}.$$

Для построения теоретической кривой определяем осадку пружины платформы в зависимости от значений ω_2 , используя соотношение:

$$\lambda = \frac{N_\Sigma}{c} = 0,11476 \frac{\omega_2^2}{c},$$

где $N_\Sigma = 2N^{(r)}$ – суммарное гироскопическое давление бегунов на платформу.

Экспериментальные же значения ω_2 и λ определяются с помощью имеющихся на установке датчиков угловой скорости и вертикального смещения платформы и экспериментальная кривая $\lambda = \lambda(\omega_2)$ строится по результатам этих измерений.

Программное обеспечение комплекса ТМЛ-04М выполнено в среде Lab-View 7.0 в виде виртуального прибора «ТМЛ-04М.vi» (рисунок 5), на экране которого отображаются расчетные зависимости и экспериментальные данные. Расчетные кривые $\lambda = \lambda(\omega_2)$ представлены на экране виртуального прибора для двух крайних значений коэффициента жесткости пружин – c_1 и c_2 , полученных экспериментально при тарировке пружины, а экспериментальные данные представлены массивом точек.

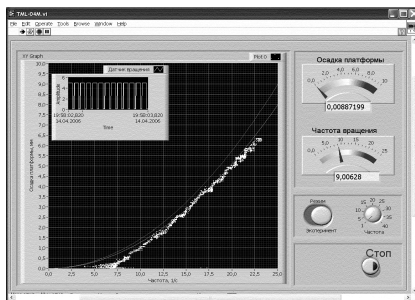


Рисунок 5 – Общий вид панели виртуального прибора «ТМЛ-04М.vi»

Лабораторная установка «Динамические реакции подшипников» (ТМЛ-06М) предназначена для демонстрации и исследования реакций подшипников в динамически несбалансированной механической системе, представляющей собой рамку с грузами, устанавливаемыми в различных положениях, приводимую во вращение вокруг ее продольной оси посредством электропривода (рисунок 6).



Рисунок 6 – Общий вид установки «Динамические реакции подшипников»

Один из подшипников рамки установлен с возможностью перемещения в горизонтальном направлении, перпендикулярном к оси вращения, и снабжен центрирующими пружинами. При изменении угловой скорости вращения рамки регистрируются пропорциональные динамической реакции смещения подшипника, и строится зависимость значений реакции от угловой скорости вращения. Теоретическая кривая выстраивается на основе измеренных параметров установки. Экспериментальные точки и теоретическая кривая выводятся на экран дисплея ПЭВМ (рисунок 7).

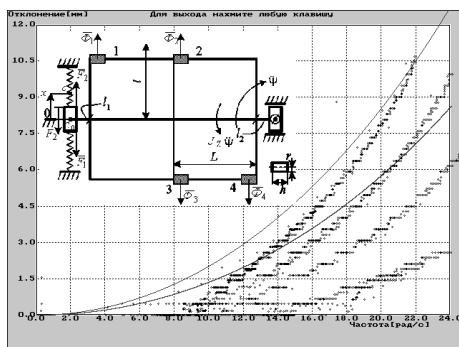


Рисунок 7 – Зависимости динамической реакции от угловой скорости вращения вала

Для определения расчетной зависимости деформации пружины от угловой скорости рамы составим уравнение вращательного движения рамки установки. Грузы принимаем за точечные массы, причем $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi$. Пружины предварительно растянуты и в равновесии $F_1 = F_2$ или $c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2$, где $c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$, – жесткости и деформации пружин. Если $c_1 = c_2$, то $\lambda_1 = \lambda_2$ и для моментов упругих сил имеем (см. рисунок 7):

$$F_1(2L + l_1 + l_2) - F_2(2L + l_1 + l_2) = (2L + l_1 + l_2)(F_1 - F_2) = 2cx(2L + l_1 + l_2).$$

Уравнение вращательного движения рамки вокруг оси z в форме Даламбера (для горизонтального расположения рамки) имеет вид:

$$2(2L + l_1 + l_2)cx - 2m\omega^2 l(L - h) \pm J_z \ddot{\psi} = 0.$$

Если в уравнении (1) пренебречь членом $\pm J_z \ddot{\psi}$ (главным моментом сил инерции самой рамки относительно оси z), то получим

$$cx = km\omega^2 l \quad \text{или} \quad x = A\omega^2,$$

где $k = \frac{L - h}{2L + l_1 + l_2}$, $A = \frac{kml}{c}$ – постоянные коэффициенты установки.

Для сравнения с экспериментальными данными строим по последнему уравнению две теоретические кривые для двух крайних значений коэффициента $k = 0,332...0,5$ (при минимальном и максимальном возможных значениях суммы $l_1 + l_2$). Экспериментальные данные должны лежать в области между этими кривыми. Эти данные (ω и x) фиксируются на экране дисплея ЭВМ в виде массива точек (см. рисунок 7). Здесь приведены четыре экспериментальные зависимости для различных вариантов расположения грузов на рамке.

Лабораторная установка «**Физический маятник**» (ТМЛ-01М) предназначена для исследования свободных колебаний физического маятника (рисунок 8). На оси подвеса маятника установлен датчик углового отклонения, позволяющий отображать на экране монитора процесс колебаний.

В установке однородный стержень OB (см. схему на рисунке 8) прикреплен к вертикальной стойке неподвижного основания при помощи цилиндрического шарнира O , имеющего горизонтальную ось. К стержню OB массой m_c прикрепляется муфта A массой m_m и груз B массой m_r . При этом расстояния a и l от точек крепления муфты и груза до оси шарнира O могут изменяться при проведении экспериментов. Вместе стержень, муфта и груз образуют физический маятник, который может совершать колебательные движения в вертикальной плоскости (плоскости чертежа на рисунке 8). Каждая из двух пружин жесткостью k одним концом закреплена на неподвижном основании, а другим – на муфте A . Пружинам задана начальная (статическая) деформа-

ция, обеспечивающая их работу только на растяжение. В шарнирном узле O расположен датчик, фиксирующий угол φ отклонения стержня OB от вертикали. В качестве чувствительного элемента в датчике применен потенциометр (переменный резистор). Напряжение, пропорциональное углу φ , снимается с подвижного контакта потенциометра и подается на вход аналого-цифрового преобразователя.

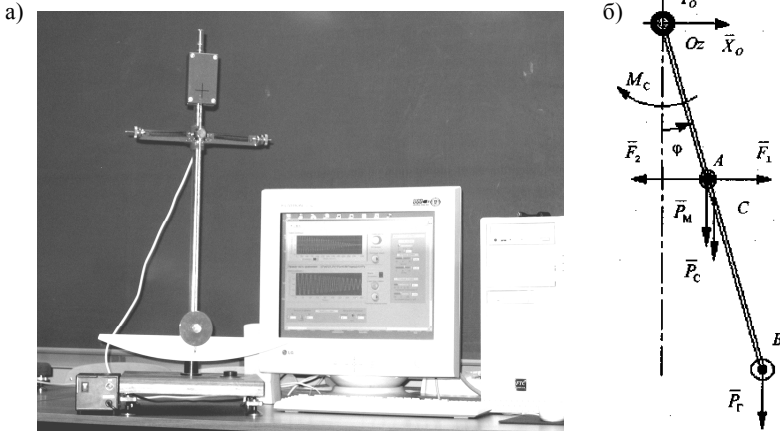


Рисунок 8 – Внешний вид (а) и схема (б) лабораторной установки ТМЛ-01М

Опишем аналитически движение маятника. При составлении дифференциального уравнения необходимо учесть следующие силы: P_B , P_C , P_M – соответственно силы тяжести груза B , стержня OB , муфты A ; F_1 , F_2 – силы натяжения правой и левой пружин; M_c – момент сил сопротивления, возникающих в шарнирном узле O ; X_O , Y_O – реакции в узле O .

Пренебрегая вертикальным смещением точки A и учитывая силы F_0 предварительного натяжения пружин, определим модули сил \bar{F}_1 и \bar{F}_2 :

$$F_1 \approx F_0 - ka \sin \varphi; \quad F_2 \approx F_0 + ka \sin \varphi.$$

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения маятника вокруг оси шарнира O :

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_{O_z}(\bar{F}_x) - \mu \dot{\varphi} - M_c.$$

Для учета сил сопротивления введем две физические модели. В одной модели примем, что основной вклад в рассеяние энергии вносят силы сухого трения, тогда

$$M_c = M_{\text{тр}},$$

где $M_{\text{тр}}$ – момент сил сухого трения.

Во второй модели будем считать, что момент сил сопротивления пропорционален угловой скорости вращения стержня OB :

$$M_{Cz} = -\mu\dot{\phi},$$

где μ – коэффициент сопротивления.

При решении дифференциального уравнения в первом случае маятник будет совершать затухающие колебания, при которых амплитуда будет уменьшаться по линейному закону (рисунок 9, а), а во втором – по экспоненциальному закону (рисунок 9, б).

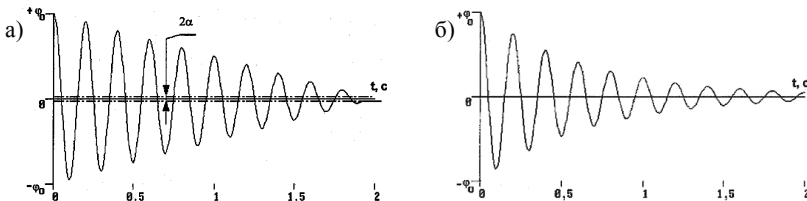


Рисунок 9 – Затухающие колебания маятника

В общем случае в системе могут присутствовать как сухое, так и вязкое трение, тогда движение маятника описывается уравнением

$$\ddot{\phi} + 2n\dot{\phi} + \omega^2[\phi + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\phi})] = 0.$$

Для численного решения дифференциального уравнения его представляют в нормальной форме Коши путем подстановок:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\left[\left(\frac{2\pi}{T_1}\right) + n^2\right] \cdot [x + \alpha \operatorname{sgn}(y)] - 2ny, \end{cases}$$

где $x = \phi T_1$ – условный период затухающих колебаний, который можно определить по графику; n – коэффициент затухания колебаний, оцениваемый по формуле $n = \delta / T_1$; $\delta = \ln(A_i / mA_{i+m})$ – среднее значение логарифмического декремента колебаний; m – произвольное число полных периодов, A_i, A_{i+m} – амплитуды (максимальные отклонения) колебаний;

$$\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + n^2 = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

График затухающих свободных колебаний регистрируется в верхнем графическом окне на экране индикатора панели виртуального прибора ТМЛ-01М.vi (рисунок 10). Построение графика производится в режиме автоматического масштабирования по шкале времени, так что весь процесс регистрируется на экране монитора.

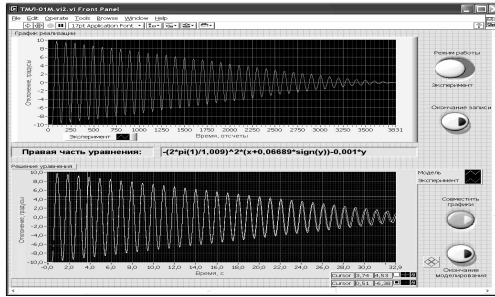


Рисунок 10 – Панель виртуального прибора ТМЛ-01М.ви

Во втором графическом окне при этом отображается результат решения дифференциального уравнения с параметрами, которые в общем случае отличаются от реальных. Правая часть этого уравнения в нотации, принятой в языке LabView, отображается в окне, расположенном в центре панели виртуального прибора между верхним и нижним графиками. Результат численного решения уравнения автоматически обновляется в нижнем графическом окне при каждом изменении уравнения. После этого результат численного решения уравнения накладывают на экспериментальный график путем нажатия кнопки «Совместить графики». Это позволяет оценить соответствие модели эксперименту и путем уточнения параметров уравнения за несколько итераций получить требуемое согласование модельных и экспериментальных данных, т.е. определить коэффициенты сухого и вязкого трения.

Установка «Двойной маятник» (ТМЛ-02М) предназначена для экспериментального и теоретического исследования колебаний парциальных систем и главных колебаний системы с двумя степенями свободы. Общий вид этой установки приведен на рисунке 11.

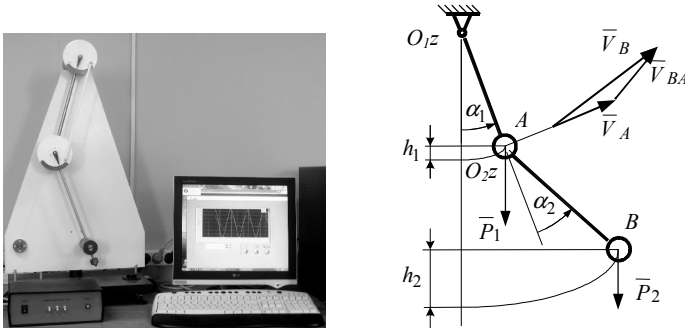


Рисунок 11 – Общий вид лабораторной установки «Двойной маятник» и схема маятника

В этой работе изучается динамика колебаний двойного физического маятника, состоящего из двух тонких стержней, на концах которых сосредоточены точечные массы. В работе исследуются свободные колебания маятника без учета сопротивления, рассматриваются его парциальные системы и главные колебания. Экспериментально определяются парциальные частоты, а также экспериментально и теоретически – собственные частоты двойного маятника и коэффициенты форм главных колебаний.

Запись экспериментальных данных, их обработка и графическое представление разработаны в среде LAB.VIEW.

Будем моделировать колебания двойного маятника с помощью движения двух невесомых шарнирно соединенных между собой стержней $O_1A = l_1$, $O_2B = l_2$ (см. рисунок 11). Стержень $O_1A = l_1$ имеет неподвижную ось вращения $O_1 z$. Массы m_1 и m_2 сосредоточены в точках A и B .

Выберем обобщенные угловые координаты: α_1 отсчитывается от вертикали и определяет положение стержня O_1A ; α_2 отсчитывается от направления первого стержня O_1A . Используем уравнения Лагранжа второго рода для составления дифференциальных уравнений движения системы с двумя степенями свободы.

Определим кинетическую энергию маятника при малых углах $\cos \alpha_2 \approx 1$.
Имеем:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2 \right\} \dot{\alpha}_1^2 + 2m_2 l_2 (l_1 + l_2) \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 \}.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ (m_1 + m_2) l_1 + m_2 l_2 \right\} g \alpha_1^2 + 2m_2 g l_2 \alpha_1 \alpha_2 + m_2 g l_2 \alpha_2^2 \}.$$

Уравнения Лагранжа второго рода для маятника имеют вид:

$$\left[m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2 \right] \ddot{\alpha}_1 + \left[(m_1 + m_2) l_1 + m_2 l_2 \right] g \alpha_1 + m_2 l_2 (l_1 + l_2) \ddot{\alpha}_2 + m_2 l_2 g \alpha_2 = 0;$$

$$m_2 l_2 (l_1 + l_2) \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_2 g \alpha_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\alpha}_2 + m_2 l_2 g \alpha_2 = 0.$$

Далее находим собственные частоты из уравнения

$$\omega^4 - \frac{a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} - 2c_{12}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \omega^2 + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = 0.$$

Для собственных частот получим частные решения:

для частоты ω_1

$$\alpha_1^{(1)} = c_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1), \quad \alpha_2^{(1)} = c_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1);$$

для частоты ω_2

$$\alpha_1^{(2)} = c_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \quad \alpha_2^{(2)} = c_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2).$$

Общее решение представляет собой суммы главных колебаний и имеет вид:

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)};$$

$$\alpha_1(t) = c_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + c_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2);$$

$$\alpha_2(t) = \eta_1 c_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \eta_2 c_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2).$$

Таким образом, движение системы представляет собой гармонические колебания, которые совершаются по каждой координате с одинаковой частотой.

Результаты экспериментов по определению периодов колебаний парциальных систем и периодов свободных колебаний без учета сопротивления двухстепенной системы (двойного маятника), а также результаты обработки экспериментальных данных – определение парциальных и собственных частот исследуемой системы выводятся на экран монитора ПЭВМ. Экспериментально подтвержден тот факт, что парциальные частоты по величине находятся внутри диапазона изменения собственных частот, с которыми совершаются главные колебания системы, т.е. $\omega_1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \omega_2$ (в эксперименте – строгие неравенства).

Лабораторная установка «Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы» (ТМЛ-08М) предназначена для демонстрации и исследования характеристик вынужденных колебаний твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и состоит из экспериментального стенда с блоком управления, АЦП и персональной ЭВМ (рисунок 12). Стенд включает в себя электродвигатель, установленный на неподвижном основании и соединенный через муфту, червячный редуктор и кривошипно-рычажный механизм с регулируемым эксцентриситетом с внешним концом спиральной пружины. Внутренний конец этой пружины закреплен на валу с диском, чем обеспечивается передача возмущающего воздействия от двигателя диску (см. рисунок 12). Угловые отклонения рычага и диска могут быть измерены с помощью потенциометрических датчиков, связанных с осями рычага и диска через зубчатые колеса.



Рисунок 12 – Общий вид лабораторной установки ТМЛ-08М

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний исполнительного элемента диска (уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси OZ) запишем в виде:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + K^2\varphi = \frac{c}{I_{Oz}}\varphi_0\sin(pt + \delta),$$

где $\varphi_0 \sin(pt + \delta)$ – угловое возмущение конца спиральной пружины, K – круговая частота свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления, p – частота вынужденных колебаний системы, n – обобщенный коэффициент сопротивления.

Решение дифференциального уравнения для вынужденных колебаний:

$$\varphi = a \sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

где $a = \varphi_a$ – амплитуда вынужденных колебаний системы; ε – сдвиг фаз между фазой возмущения ψ_e и фазой вынужденных колебаний $\psi_{вк}$,

$$a = \frac{h}{\sqrt{(K^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{\varphi_0}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2/Q^2}}; \quad h = K^2\varphi_0,$$

$Q = K/2\tilde{n}$ – добротность системы; $z = p/\tilde{K}$ – коэффициент расстройки.

Введем нормирование

$$\lambda = \frac{\varphi_a}{\varphi_0}, \text{ т.е. } \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + z^2/Q^2}},$$

кроме того, имеем:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{K^2 - p^2} \text{ или } \varepsilon = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z/Q}{1 - z^2} \right).$$

Последние уравнения определяют соответственно амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ) характеристики системы (рисунок 13).

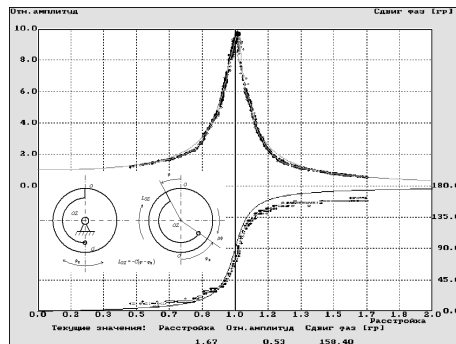


Рисунок 13 – Схема установки. (АЧХ) и (ФЧХ) системы

При построении теоретической зависимости используются K и n , полученные по экспериментальным данным для затухающих колебаний. Экспериментальные данные отображаются в виде совокупности точек, соответствующих оценкам параметров каждого периода вынужденных колебаний при изменении частоты возмущения и нормируются по амплитудному значению возмущения φ_0 . Тогда получим множество точек, положение которых соответствует зависимости $\lambda_{\varphi} = \lambda_{\varphi}(p_{\varphi})$. Лабораторная работа проводится по принципу сравнения экспериментальных данных с теоретическими.

Общий вид лабораторной установки «Вынужденные колебания механической системы с инерционным возмущением» (ТМЛ-07М) приведен на рисунке 14. Установка включает в себя экспериментальный стенд с блоком управления, состоящий из тележки, перемещающейся на неподвижном основании по направляющим (рельсам) в горизонтальном направлении, и закрепленного на тележке маятника, вращающегося вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной направлению движения тележки (см. рисунок 14). Маятник приводится в колебательное движение с помощью двигателя, закрепленного на тележке, и создающего возмущающее воздействие на нее. Установка позволяет получать АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний, а также наблюдать и анализировать особенности движения систем с одной степенью свободы.

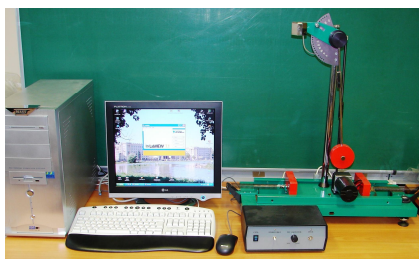


Рисунок 14 – Общий вид лабораторной установки ТМЛ-07М

Для вынужденных колебаний тележки, вызванных возмущением инерционного типа, строят теоретические кривые АЧХ и ФЧХ. На рисунке 15 показаны рассчитанные теоретически кривые АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний тележки, и экспериментальные значения коэффициента динамичности λ и разности фаз вынужденных колебаний и вынуждающего воздействия ε , записанные в виде совокупности точек, образующих размытые линии.

Описанный в данной работе лабораторный комплекс позволяет экспериментально подтвердить теоретические положения ТМ и ТК. Проведение экспериментов на установках комплекса с одновременной обработкой результатов удобно и очень наглядно, при этом лабораторные работы можно совместить с аудиторными упражнениями в студенческой группе.

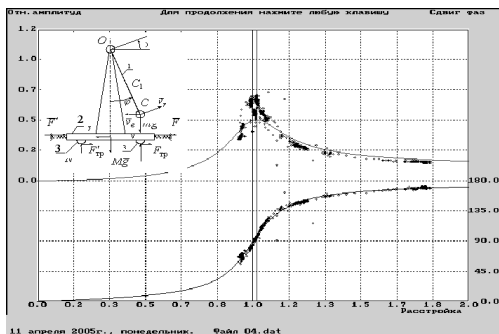


Рисунок15 – Схема установки, амплитудно-частотная (АЧХ) и фазо-частотная (ФЧХ) характеристики системы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **О внедрении новых информационных технологий в учебный процесс по курсу «Теоретическая механика»** / В. В. Дубинин [и др.] // Научно-методическая конференция, посвященная 35-летию образования факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н. Э. Баумана, 20 дек. 1999 г. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – С. 65–66.

2 Использование ЭВМ в учебном процессе при изучении курса «Теоретическая механика» / В. В. Дубинин [и др.]. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 120 с.

3 **Дубинин, В. В.** Физический эксперимент в некоторых задачах механики: труды зонального совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики Центрального и Приволжского федеральных округов РФ. – Ульяновск, 2002. – С. 14–15.

4 **Дубинин, В. В.** Автоматизированный лабораторный комплекс «Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы» / В. В. Дубинин, Ю. Н. Жигулевцев, Б. П. Назаренко : сб. науч. ст., посвященный 125-летию кафедры теоретической механики ИМТУ – МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – С. 48–56.

5 **Дубинин, В. В.** Современный лабораторный комплекс по теоретической механике / В. В. Дубинин, В. В. Витушкин, Б. П. Назаренко // Интеграция образования, науки и производства : материалы секционного заседания Междунар. конф. IX Междунар. форума «Высокие технологии XXI века», 23 апреля 2008 г. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – С. 153–156.

V. V. DUBININ, V. V. VITUSHKIN, G. I. DUBROVINA

PHYSICAL EXPERIMENT, MATHEMATICAL SIMULATION AND INFORMATION DATA PROCESSING METHODS IN MECHANICS

The automated complexes for delivering Engineering Mechanics lectures and laboratory work developed by the authors have been described. The equipment set includes complexes for studying plane motion, a gyroscopic moment, dynamic constraint reactions, free and forced oscillations for systems of solids.

Получено 24.09.2008