

туальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск : УП «Технопринт», 2001. – С. 486–491.

3 Шигабутдинов, Ф. Г. Распространение упругих продольно-поперечных волн, возникающих при продольном ударе абсолютно твердым телом по изотропной цилиндрической оболочке переменной толщины / Ф. Г. Шигабутдинов, Р. З. Муртазин, Р. Ф. Мухутдинов // Тр. междунар. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». Т. 4. – Ульяновск, 2007. – С. 244–249.

F. G. SHIGABUTDINOV, R. Z. MURTAZIN, R. F. MUHUTDINOV.

BUCKLING OF ELASTIC CYLINDRICAL SHELLS WITH IRREGULAR CROSS-SECTION SHAPE BY LONGITUDINAL IMPACT

The work is devoted to the investigation of lateral motion forms for the isotropic cylindrical shell with the irregular cross-section shape by absolute solid impact. The differential equations of thin cylindrical shell motion by Timoshenko model in geometrically nonlinear statement with shift and rotary inertia taken into account are accepted. The problem is set up and solved in the asymmetric statement. The finite difference method has been used. The received results allow to judge shell deformation behavior and to obtain its allowable deflection by thickness variation.

Получено 15.05.2008

**ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009**

УДК 539.3

*Ф. Г. ШИГАБУТДИНОВ, Т. К. ХАМИТОВ, А. Ф. ШИГАБУТДИНОВ
Казанский государственный архитектурно-строительный университет*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ПО «СТАТИЧЕСКОМУ» КРИТЕРИЮ

В данной работе приводятся результаты решения задач о потере устойчивости упругих стержней, к одному из торцов которых прикладывается продольная ударная сила, зависящая от времени по прямоугольному и треугольному закону. Учитывается волновой характер распространения продольных возмущений вдоль стержня, вызывающих неоднородность напряженного состояния по длине. Предполагается, что потеря устойчивости происходит при первом прохождении волны сжатия вдоль стержня.

Постановка задачи. Пусть к левому торцу тонкого прямолинейного стержня длины l (рисунок 1) в момент времени $t = 0$ прикладывается продольная сила $P = P(t)$. От нагруженного торца стержня начинает распространяться

продольная волна со скоростью a_0 . Будем предполагать, что время возрастания нагрузки τ меньше времени, за которое упругая волна проходит длину стержня, и потеря устойчивости происходит при первом прохождении волны вдоль стержня. Процесс деформирования можно условно разбить на две стадии: накопление деформаций сжатия и потеря устойчивости. При этом, как принято в классической теории устойчивости стержней, до достижения критических параметров процесса прогибы в стержнях отсутствуют, что позволяет пренебрегать влиянием прогибов на продольное деформирование. Для заданного закона нагружения на торце с учетом неоднородности напряженного состояния, вызванного продольной волной нагружения, требуется определить критическую силу потери устойчивости стержня в зависимости от длины сжатого участка стержня (т.е. длины, на которую продвинулась продольная волна). Дифференциальные уравнения движения элемента стержня запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad a_0 = \sqrt{E/\rho}; \quad (1)$$

$$-\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad N(x, t) = EF \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ – продольное и поперечное перемещения точек оси стержня соответственно; E , ρ – модуль упругости и плотность материала стержня; a_0 – скорость продольной волны в стержне (скорость звука в материале); $N(x, t)$ – функция распределения продольных сил по сечениям стержня; F , J – площадь поперечного сечения и наименьший главный момент инерции сечения.

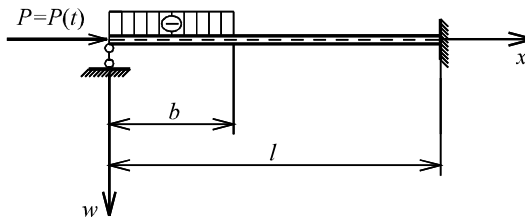


Рисунок 1

Решение. Решение уравнения (1) будем считать известным. Решение уравнения (2) будем представлять рядами Фурье, удовлетворяющими граничным условиям задачи. Рассмотрим потерю устойчивости стержня для шести вариантов граничных условий на торцах.

1 Разложение функции прогиба $w(x, t)$ и соответствующие граничные условия

1.1 Левый конец подвижно заделан, правый конец шарнирно оперт:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos \lambda_{2k-1} x; \quad (3)$$

$$\lambda_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \quad (k=1, 2, 3 \dots);$$

$$x=0: w=f, \quad w'_x=0; \quad x=l: w=0, \quad w''_{xx}=0.$$

1.2 Левый конец подвижно заделан, правый – жестко заделан:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2} \left[1 + \cos \lambda_{2k-1} x \right]; \quad (4)$$

$$\lambda_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{l}, \quad (k=1, 2, 3 \dots);$$

$$x=0: w=f, \quad w'_x=0; \quad x=l: w=0, \quad w'_x=0.$$

1.3 Левый конец подвижно заделан, на правом конце жесткая заделка:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left[1 - \cos \lambda_{2k} x \right]; \quad (5)$$

$$\lambda_{2k} = \frac{2\pi k}{l}, \quad (k=1, 2, 3 \dots);$$

$$x=0: w=0, \quad w'_x=0; \quad x=l: w=0, \quad w'_x=0.$$

1.4 Левый конец шарнирно оперт, на правом конце скользящая заделка:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_{2k-1} x; \quad (6)$$

$$\lambda_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \quad (k=1, 2, 3 \dots);$$

$$x=0: w=0, \quad w''_{xx}=0; \quad x=l: w=f, \quad w'_x=0.$$

1.5 Левый конец подвижно заделан, на правом конце скользящая заделка:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2} \left[1 - \cos \lambda_{2k-1} x \right]; \quad (7)$$

$$\lambda_{2k-1} = \frac{\pi(2k-1)}{l}, \quad (k=1, 2, 3 \dots);$$

$$x=0: w=0, \quad w'_x=0; \quad x=l: w=f, \quad w'_x=0.$$

1.6 Левый конец подвижно заделан, на правом конце подвижная шарнирная опора:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k [1 - \cos \lambda_{2k-1} x]; \quad (8)$$

$$\lambda_{2k-1} = \frac{\pi(2k-1)}{2l}, \quad (k=1, 2, 3 \dots);$$

$$x=0: w=0, \quad w'_x=0; \quad x=l: w=f, \quad w''_{xx}=0.$$

2 Разложение функции нагрузки $P = P(x)$ в ряды Фурье. На рисунке 2 изображены два варианта диаграммы $P-t$. Эпюры продольных сжимающих сил, соответствующих каждому виду импульса, показаны на рисунке 3. На рисунке 3 обозначены: l – длина стержня, b – длина его загруженной части.

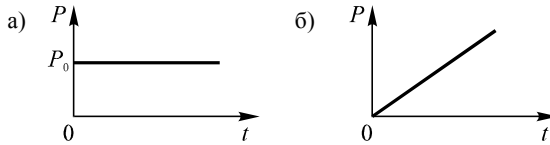


Рисунок 2

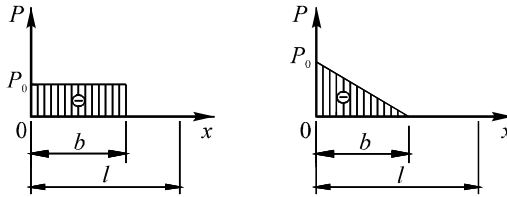


Рисунок 3

2.1 Случай мгновенного возрастания нагрузки (см. рисунок 2, а):

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq b, \quad P \\ b \leq x \leq l, \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x, \quad (9)$$

$$a_0 = P \frac{b}{l}, \quad a_k = \frac{2P}{k\pi} \sin \lambda_k b, \quad (k=1, 2, 3 \dots).$$

2.2 Случай линейного возрастания нагрузки (см. рисунок 2, б):

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq b, \quad P \left(1 - \frac{x}{b}\right) \\ b \leq x \leq l, \quad 0 \end{array} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x, \quad (10)$$

$$a_0 = P \frac{b}{2l}, \quad a_k = \frac{2P}{l\lambda_k^2 b} [1 - \cos \lambda_k b], \quad (k=1, 2, 3 \dots).$$

Ряды (3)–(10) подставляются в уравнение (2). Условие равенства нулю бесконечных тригонометрических рядов приводит к бесконечной системе однородных алгебраических уравнений. Условие существования нетривиальных решений полученных систем позволяет определить критические силы, как силы обращающие частоту колебаний в ноль. В статических задачах устойчивости этот критерий называется динамическим. Применительно к задачам удара мы назовем его "статическим".

Для примера рассмотрим структуру определителя, который получится при вариантах п.1.1 и п.1.6.

После подстановки рядов (5), (10) в (2) получается бесконечные ряды. Структура этих рядов такова:

$$\begin{aligned} & \cos \lambda_1 x [f_1 \Omega_1 - f_2 (a_1 - a_2) \lambda_1 \lambda_3 - f_3 (a_2 - a_3) \lambda_1 \lambda_5 - \dots - f_n (a_{n-1} - a_n) \lambda_1 \lambda_{2n-1}] + \\ & + \cos \lambda_3 x [f_2 \Omega_2 - f_1 (a_1 - a_2) \lambda_3 \lambda_1 - f_3 (a_1 - a_4) \lambda_3 \lambda_5 - \dots - f_n (a_{n-2} - a_{n-1}) \lambda_3 \lambda_{2n-1}] + \\ & \dots + \\ & + \cos \lambda_{2n-1} x [-f_1 (a_{n-1} - a_n) \lambda_{2n-1} \lambda_1 - f_2 (a_{n-2} - a_{n-1}) \lambda_{2n-1} \lambda_3 - \dots + f_n \Omega_n] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Omega_k = \frac{1}{2} E J \lambda_{2k-1}^4 - 2 a_0 \lambda_{2k-1}^2 + a_{2k-1} \lambda_{2k-1}^2$.

Формулу (11) можно записать более компактно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_{2k-1} x \left[f_k \Omega_k - \lambda_{2k-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_{2i-1} f_i (a_{i-k} - a_{i+k-1}) - \lambda_{2k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{2i-1} f_i (a_{k-i} - a_{i+k-1}) \right] = 0. \quad (12)$$

Условие существования нетривиальных решений системы (12) приводит к равенству нулю её определителя:

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 & -\lambda_1 \lambda_3 (a_1 - a_2) & -\lambda_1 \lambda_5 (a_2 - a_3) \dots \\ -\lambda_1 \lambda_3 (a_1 - a_2) & \Omega_2 & -\lambda_3 \lambda_5 (a_1 - a_4) \dots \\ -\lambda_1 \lambda_5 (a_2 - a_3) & -\lambda_3 \lambda_5 (a_1 - a_4) & \Omega_3 \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Числовые примеры. Рассмотрена потеря устойчивости стержня со следующими характеристиками: $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $J = 17,9$ см⁴, $F = 12$ см², $l = 4$ м.

При вычислении критических сил путем решения уравнений вида (13) для обеспечения точности рассматривались определители до десятого порядка. В таблице 1 приведены значения $P / P_{\text{эйл}}$ для различных видов нагружений в зависимости от η . Здесь: P – сила, определяемая из условия равенства нулю определителя; $P_{\text{эйл}}$ – статическая критическая (эйлерова) сила для рассматриваемого стержня; $\eta = \frac{b}{l}$ – отношение длины сжатого участка к полной длине стержня; нагружение 2.1 соответствует прямоугольному импульсу, показан-

ному на рисунке 3, а, нагружение 2.2 соответствует треугольному импульсу, показанному на рисунке 3, б.

Таблица 1

Номер нагружения	$\eta = \frac{b}{l}$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
<i>1 Левый конец подвижно заделан, на правом конце неподвижная шарнирная опора</i>										
1	103,0	25,06	11,11	6,251	4,0	2,778	2,041	1,562	1,234	1,0
2	351,7	79,42	35,29	19,85	12,705	8,823	6,482	4,963	3,921	3,176
<i>2 Левый конец подвижно заделан, на правом конце жесткая заделка</i>										
1	50,12	12,5	5,555	3,125	2,0	1,429	1,167	1,049	1,006	1,0
2	158,8	39,70	17,64	9,926	6,353	4,417	3,299	2,644	2,249	2,0
<i>3 Оба конца заделаны</i>										
1	14,93	4,607	2,662	2,092	2	1,898	1,487	1,162	1,024	1,0
2	45,41	13,21	6,992	4,803	3,841	3,348	2,977	2,591	2,246	2,0
<i>4 Левый конец шарнирно оперт, на правом конце скользящая заделка</i>										
1	4,342	2,335	1,683	1,372	1,199	1,099	1,042	1,013	1,002	1
2	8,505	4,465	3,133	2,478	2,095	1,848	1,679	1,56	1,473	1,409
<i>5 Левый конец подвижно заделан, на правом конце скользящая заделка</i>										
1	50,12	12,5	5,555	3,125	2,0	1,429	1,167	1,049	1,006	1,0
2	158,8	39,70	17,64	9,926	6,353	4,417	3,299	2,644	2,249	2,0
<i>6 Левый конец подвижно заделан, на правом конце подвижная шарнирная опора</i>										
1	103,0	25,06	11,11	6,251	4,0	2,778	2,041	1,562	1,234	1,0
2	351,7	79,42	35,29	19,85	12,705	8,823	6,482	4,963	3,921	3,176

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Мовсисян, Л. А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе / Л. А. Мовсисян // ДАН Арм.ССР – 1969. – Т. 16. – № 3. – С. 124–130.

2 Шигабутдинов, Ф. Г. Влияние формы импульса на критическую нагрузку потери устойчивости при продольном ударе / Ф. Г. Шигабутдинов, Т. К. Хамитов // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники : тр. междунар. конф. КЛИН-2004. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – Т. 7. – С. 205–207.

F. G. SHIGABUTDINOV, T. K. HAMITOV, A. F. SHIGABUTDINOV

EVALUATION OF CRITICAL FORCES FOR LOSS STABILITY OF ELASTIC RODS AT LONGITUDINAL IMPACT BY STATIC CRITERION

In this work the problem solution results on loss of elastic rods stability are given. The longitudinal impact is applied to one of the butt ends and is time-dependant in right-and three-angled laws. Wave-like behavior of longitudinal-along rod-disturbance propagation which causes the irregularity of length stress state has taken into account. The loss of stability is supposed to happen during the first compression-along rod-wave passing.

Получено 15.05.2008