

- 5 Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
- 6 Гамлицкий, Ю. А. Упругий потенциал наполненных резин / Ю. А. Гамлицкий, В. И. Мудрук, М. В. Швачич // Каучук и резина. – 2002. – № 3. – С. 29–39.
- 7 Галушко, А. Г. Корреляция параметров простого упругого потенциала эластомера со структурой сетки и составом резин / А. Г. Галушко, М. Е. Соловьев // Каучук и резина. – 1998. – № 6. – С. 16–19.
- 8 Гаришин, О. К. Исследование структурных напряжений в дисперсно-наполненных эластомерных нанокомпозитах / О. К. Гаришин, С. Н. Лебедев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12. – № 3. – С. 289–299.
- 9 Соловьев, М. Е. Локальная динамика и вязкоупругие свойства вулканизатов бутадиен-нитрильных каучуков / М. Е. Соловьев, О. Ю. Соловьева, А. В. Гопцев // Каучук и резина. – 2005. – № 3. – С. 11–15.
- 10 Свистков, А. Л. Полуэмпирический потенциал свободной энергии полимерной сетки, учитывающий конечность длин полимерных цепей / А. Л. Свистков, Л. А. Свисткова // Высокомолекулярные соединения. Серия А. – 1998. – Т. 40. – № 5. – С. 835–840.
- 11 Шилько, С. В. Особенности деформирования и описание упругих свойств наполненных эластомеров при растяжении / С. В. Шилько, Д. А. Черноус, С. Б. Анфиногенов // Каучук и резина. – 2008. – № 4. – С. 34–38.

*D. A. CHERNOUS*

#### **PROGNOSTIFICATION OF ELASTIC POTENTIAL PARAMETERS FOR ELASTOMERS**

A new mathematical model for filled elastomer deformation process has been developed. On the basis of the developed model the expressions allowing to unite Mooney-Rivlin elastic potential parameters and the molecular weight of an elastomer and a filler volume fraction have been received.

Получено 22.09.2008

---

**ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009**

---

УДК 539.3

*Ф. Г. ШИГАБУТДИНОВ, Р. З. МУРТАЗИН, Р. Ф. МУХУТДИНОВ*  
*Казанский государственный архитектурно-строительный университет*

#### **ВЫПУЧИВАНИЕ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ**

Работа посвящена исследованию форм поперечных движений изотропной цилиндрической оболочки с нерегулярной формой поперечного сечения при ударе абсолютно твердым телом. Приняты дифференциальные уравнения движения тонкой цилиндри-

ческой оболочки по модели Тимошенко, учитывающие сдвиг и инерцию вращения, в геометрически нелинейной постановке. Задача ставится и решается в неосесимметричной постановке. Использован метод конечных разностей. Полученные результаты позволяют судить о характере деформирования оболочки и варьированием толщиной добиваться ее допустимых прогибов.

**Введение.** Цилиндрические оболочки находят широкое применение в технике. Условия эксплуатации этих оболочек часто требуют конструктивного изменения толщины или применение накладок. В случае продольного удара по таким оболочкам появляются неосесимметричные поперечные движения, для которых часто характерна геометрическая нелинейность. Данная работа посвящена исследованию форм поперечных движений цилиндрической оболочки с нерегулярной формой поперечного сечения, что выражено в переменности толщины оболочки. В качестве примера для расчета принимается изотропная оболочка.

**Постановка задачи.** Пусть в начальный момент времени изотропная цилиндрическая оболочка переменной толщины подвергается удару абсолютно твердым телом, ударяющим со скоростью  $v$ . Будем считать удар абсолютно неупругим. Общий вид оболочки показан на рисунке 1. Положения точек поверхности приведения определим продольной координатой  $x$  и угловой координатой  $\varphi$ . Начало правой системы координат  $Oxyz$  расположено на левом торце оболочки, воспринимающем удар. Ось  $Ox$  направлена вправо, ось  $Oz$  в сторону выпуклости оболочки. Угол  $\varphi$  откладывается от вертикали, показанной на рисунке 2.

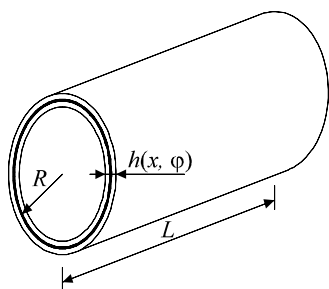


Рисунок 1 – Общий вид оболочки

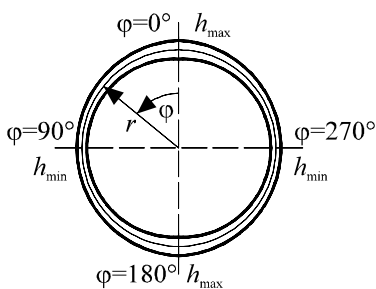


Рисунок 2 – Характер изменения толщины  $h(\varphi)$ .  $h_{\min} = 0,02$  м;  $h_{\max} = 0,05$  м

Начальные условия для перемещений и деформаций приняты нулевыми. Дифференциальные уравнения движения тонкой цилиндрической оболочки по модели Тимошенко, учитывающие сдвиг и инерцию вращения, в геометрически нелинейной постановке, для переменной толщины будут иметь вид [1]:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} &= \rho h(x, \varphi) \ddot{u} \\
\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} &= \rho h(x, \varphi) \ddot{v} \\
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - \frac{T_{22}}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{12}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{22}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \rho h(x, \varphi) \ddot{w} \\
\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} - N_1 &= \frac{\rho(h(x, \varphi))^3}{12} \ddot{\psi}_1 \\
\frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} - N_2 &= \frac{\rho(h(x, \varphi))^3}{12} \ddot{\psi}_2
\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для изотропного линейного упругого материала оболочки в геометрически линейной постановке задачи физические и геометрические уравнения примут вид:

$$T_{11} = K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad T_{12} = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}; \quad T_{22} = K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}); \quad (2)$$

$$M_{11} = D \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right); \quad M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right); \quad M_{22} = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right); \quad (3)$$

$$N_1 = k^2 \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \right); \quad N_2 = k^2 \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \psi_2 \right); \quad (4)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2; \quad (5)$$

$$K = \frac{Eh(x, \varphi)}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{E(h(x, \varphi))^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (6)$$

где  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{12}$  – усилия в срединной поверхности оболочки;  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  – относительные деформации, соответствующие введенной системе координат;  $\nu$ ,  $E$  – коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала оболочки соответственно;  $M_{11}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{12}$  – изгибающие и крутящий моменты в срединной поверхности оболочки;  $\psi_1$  – угол поворота нормали к срединной поверхности вокруг касательной к окружности,  $\psi_2$  – угол поворота нормали к срединной поверх-

ности вокруг нормали к окружности;  $N_1$ ,  $N_2$  – перерезывающие силы;  $k$  – коэффициент сдвига;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – перемещения точек поверхности приведения оболочки.

На торце, воспринимающем удар, удовлетворялись условия подвижной шарнирной опоры, на другом конце – шарнирно-неподвижной опоры.

Системы уравнений (1)–(6) решались методом конечных разностей по явной схеме. Соотношение шагов по пространственным и временной координатам определялось путем расчетных экспериментов. Решения, представленные на рисунках 3–8, получены при  $\Delta x = 0,025$ ;  $\Delta \varphi = 0,157$ ;  $\Delta t = 0,0025$ . Скорость удара выбиралась из условия упругости материала. Для тестирования программы были проведены вычисления при условии неограниченной упругости материала оболочки.

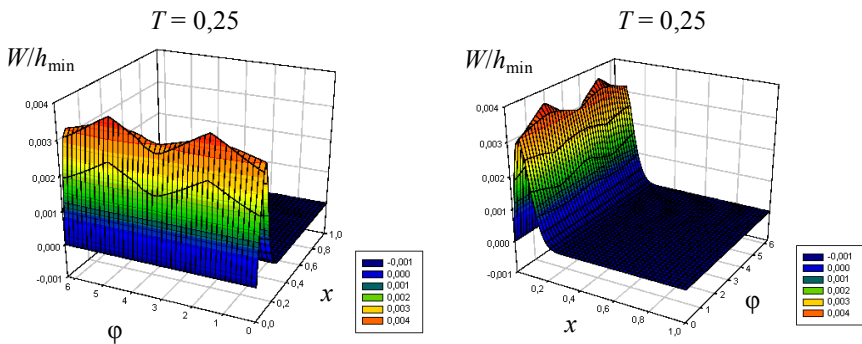


Рисунок 3

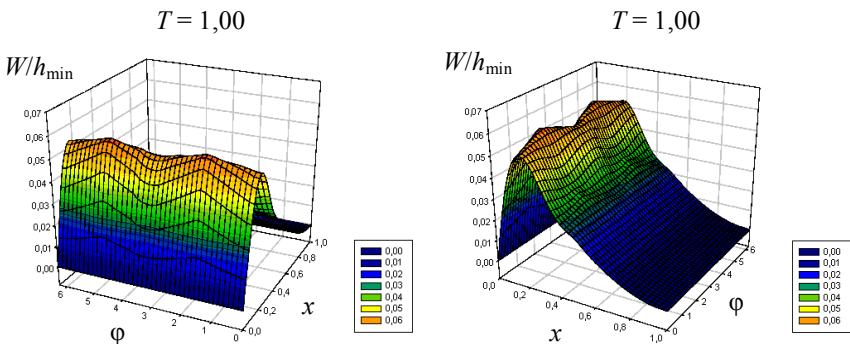


Рисунок 4

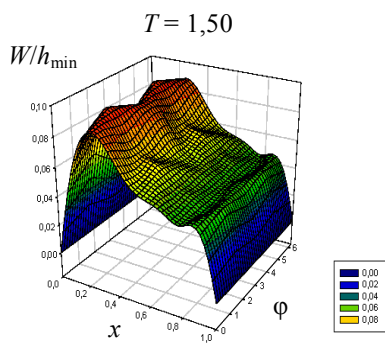
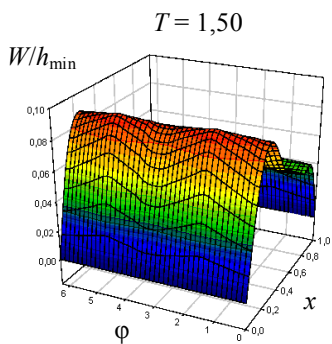


Рисунок 5

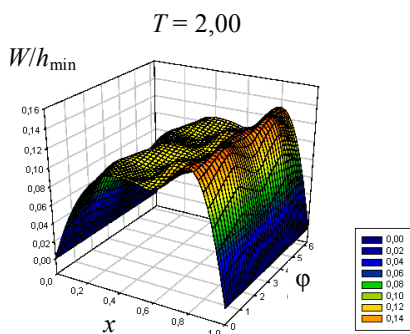
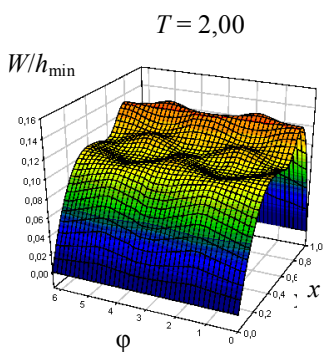


Рисунок 6

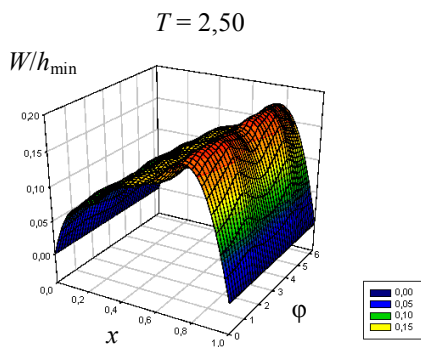
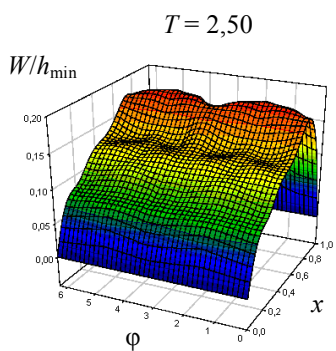


Рисунок 7

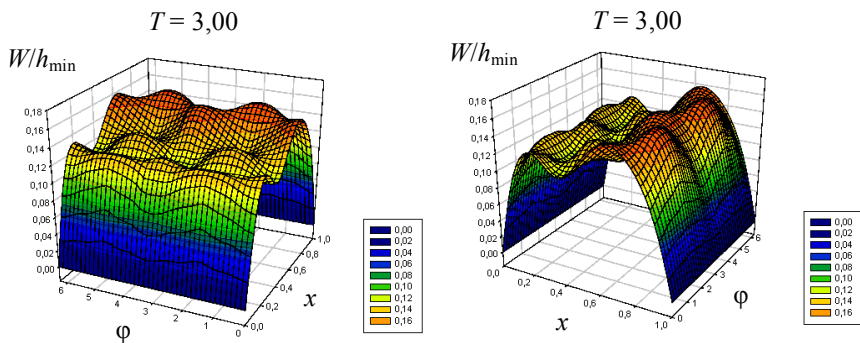


Рисунок 8

**Обсуждение результатов.** Поперечное сечение оболочки, соответствующее приведенным в работе результатам вычислений, представлено на рисунке 2. Вертикальная ось, проходящая через центр окружности, является осью симметрии поперечного сечения. Длина оболочки принималась равной 2 м, радиус поверхности приведения равнялся 1 м; скорость удара принималась равной 5 м/с. Изучались движения оболочки в течение времени, соответствующего трем пробегам продольной волны вдоль оболочки.

Результаты решения представлены на рисунках 3–8. Картина волнообразования по длине оболочки в различные моменты времени  $T = t / t_0$ , где  $t_0$  – время, за которое продольная волна, профиль которой показан с двух позиций, один раз пробегает вдоль оболочки. Значения  $T$ , равные 0,25; 1,0, соответствуют прямому ходу волны от ударяемого торца, когда волна прошла четверть оболочки и дошла до конца оболочки соответственно.  $T$ , равное 1,5; 2,0, – это обратный ход волны от шарнирно закрепленного торца, когда она, на обратном пути, дошла до середины оболочки и до торца, воспринимающего удар соответственно. Отраженная волна удваивает напряжения сжатия. Динамичность процесса проявляется еще и в том, что прогибы «отстают» от изменений напряженно-деформированного состояния в серединной поверхности. К моменту времени  $T = 2,0$  более интенсивное выпучивание наблюдается уже у торца, по которому удар не наносился. Моменты времени  $T$ , равные 2,5; 3,0, соответствуют второму прямому ходу волны. Построенное на рисунках изображение серединной поверхности оболочки позволяет судить о характере её деформирования и варьированием толщиной добиваться допустимых прогибов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / кол. авторов. – Казань : Изд-во КГУ, 1977. – С. 3–132.
- 2 Шигабутдинов, Ф. Г. Поведение ортотропных цилиндрических оболочек под действием продольной ударной нагрузки / Ф. Г. Шигабутдинов, Р. З. Муртазин // Ак-

туальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск : УП «Технопринт», 2001. – С. 486–491.

**3 Шигабутдинов, Ф. Г.** Распространение упругих продольно-поперечных волн, возникающих при продольном ударе абсолютно твердым телом по изотропной цилиндрической оболочке переменной толщины / Ф. Г. Шигабутдинов, Р. З. Муртазин, Р. Ф. Мухутдинов // Тр. междунар. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». Т. 4. – Ульяновск, 2007. – С. 244–249.

*F. G. SHIGABUTDINOV, R. Z. MURTAZIN, R. F. MUHUTDINOV.*

### **BUCKLING OF ELASTIC CYLINDRICAL SHELLS WITH IRREGULAR CROSS-SECTION SHAPE BY LONGITUDINAL IMPACT**

The work is devoted to the investigation of lateral motion forms for the isotropic cylindrical shell with the irregular cross-section shape by absolute solid impact. The differential equations of thin cylindrical shell motion by Timoshenko model in geometrically nonlinear statement with shift and rotary inertia taken into account are accepted. The problem is set up and solved in the asymmetric statement. The finite difference method has been used. The received results allow to judge shell deformation behavior and to obtain its allowable deflection by thickness variation.

Получено 15.05.2008

**ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009**

---

УДК 539.3

*Ф. Г. ШИГАБУТДИНОВ, Т. К. ХАМИТОВ, А. Ф. ШИГАБУТДИНОВ  
Казанский государственный архитектурно-строительный университет*

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ПО «СТАТИЧЕСКОМУ» КРИТЕРИЮ**

В данной работе приводятся результаты решения задач о потере устойчивости упругих стержней, к одному из торцов которых прикладывается продольная ударная сила, зависящая от времени по прямоугольному и треугольному закону. Учитывается волновой характер распространения продольных возмущений вдоль стержня, вызывающих неоднородность напряженного состояния по длине. Предполагается, что потеря устойчивости происходит при первом прохождении волны сжатия вдоль стержня.

**Постановка задачи.** Пусть к левому торцу тонкого прямолинейного стержня длины  $l$  (рисунок 1) в момент времени  $t = 0$  прикладывается продольная сила  $P = P(t)$ . От нагруженного торца стержня начинает распространяться