Тематика, содержание и объем учебных заданий по теоретической механике для студентов специальностей гражданской авиации разработаны с учетом компетентностной подготовки инженеров данного направления. Особое внимание уделено рассмотрению задач кинематики, ориентированных на исследование и расчет механизмов авиационных двигателей и приводов основных систем самолетов. Так плоское движение твердого тела рассматривается на примере кинематических параметров кулисно-рычажного механизма убирающегося шасси самолета. Задачи динамики рассматриваются с использованием примеров эволюции воздушного судна на различных стадиях полета (взлет, горизонтальный полет, пикирование, виражирование, посадка).

Комплект учебно-методических пособий широко используется при проведении аудиторных занятий, выполнении расчетных заданий, организации самостоятельной работы студентов. Необходимо отметить, что студенты, систематически решая профессионально-направленные задачи в курсе теоретической механики, не просто изучают механику, но также осознанно учатся применять эти знания в будущей профессиональной деятельности.

Создание профессионально-направленных учебных пособий, сопровождающихся соответствующим иллюстративно-графическим материалом, является актуальной задачей современного компетентностного подхода к обучению студентов и способствует повышению учебно-познавательной активности и уровня знаний будущих специалистов.

L. P. NAZAROVA

COMPETENCE APPROACH TO ENGINEERING MECHANICS COURSE AT AEROSPACE INSTITUTE OF HIGHER EDUCATION

The paper discusses the possibility of introducing new professionally-designed teaching materials in the engineering mechanics course at Aerospace University.

Получено 21.04.2009

ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010

УДК 531.01

В. К. ТАРАСОВ
Тульский государственный университет

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА УСКОРЕНИЙ

Рассмотрено движение плоской фигуры в плоскости чертежа. Определено положение мгновенного центра ускорений (МЦУ) по ускорениям двух точек. Доказан метод Н. Е. Жуковского и предложены новые методы определения МЦУ.

Рассмотрим произвольное непоступательное движение плоской фигуры в плоскости чертежа. Мгновенным центром ускорений называется та точка фигуры, абсолютное ускорение которой в данный момент равно нулю. В известных учебниках по теоретической механике (кроме [1]) дается только один метод определения МЦУ. Согласно этому методу требуется знать угловую скорость, угловое ускорение фигуры и вектор ускорения одной точки, чтобы найти угол α. Затем вектор ускорения точки фигуры поворачивается на этот угол и по известной формуле находится центр ускорений. Если заданы ускорения двух точек, то и в этом случае для определения угла необходимо знать угловую скорость и угловое ускорение фигуры или их отношение ε/ω^2.

В то же время существует малоизвестный метод определения МЦУ, предложенный Н. Е. Жуковским [1]. Он состоит в следующем. Пусть известны векторы ускорения двух точек *A* и *B* плоской фигуры. На продолжении векторов ускорений, как это показано на рисунке 1, получаем точку *C*. Через три точки *A*, *B* и *C* проводим окружность.

Дугу *AB* делим пополам в точке *D*. Хорду *AB* делим на части пропорциональные ускорениям

$$\frac{AE}{BE} = \frac{a_A}{a_B} . \tag{1}$$

Через точки *D* и *E* проводим прямую, которая пересекает окружность в точке *Q*. Точка *Q* – мгновенный центр ускорений (см. рисунок 1).

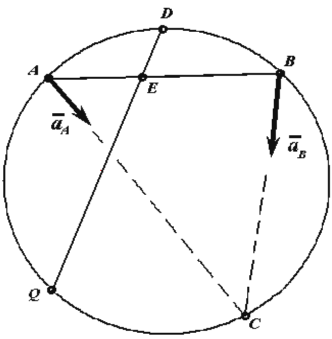

Рисунок 1

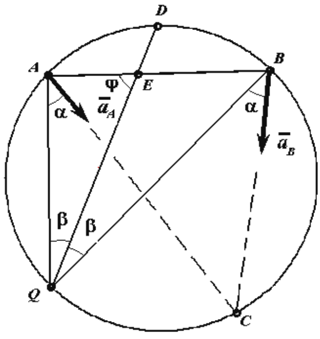

Рисунок 2

Доказательства этого метода в литературе нет. Для доказательства соединим точку *Q* с точками *A* и *B* (рисунок 2).

Исходим из того, что ускорение любой точки фигуры образует один и тот же угол α с прямой, соединяющий точку с МЦУ, угол α не превышает 90^0 и ускорения точек пропорциональны их расстояниям до МЦУ. Так как углы *QAC* и *QBC* опираются на одну и ту же дугу то они равны. На рисунке 2 эти углы обозначены через α. Таким образом, первое условие выполнено.

Условие $\alpha \le 90^{\circ}$ позволяет определить, по какую сторону от хорды AB должна находиться точка D. Как видно из рисунка 2, второе условие выполнено. Для доказательства выполнения третьего условия рассмотрим треугольники QAE и QBE. Углы AQE и BQE равны, так как опираются на равные дуги. На рисунке 2 они обозначены через β**.** Угол AEQ обозначим через φ**.**

Из треугольника AQE

$$\frac{AQ}{\sin\varphi} = \frac{AE}{\sin\beta}. \qquad (2)$$

Из треугольника QBE

$$\frac{BQ}{\sin\varphi} = \frac{BE}{\sin\beta}. \qquad (3)$$

Разделив (2) на (3), получим

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AE}{BE}. \qquad (4)$$

Из (4) с учётом (1) находим

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{a_A}{a_B}.$$

Таким образом, и третье условие выполнено.

Далее поставим такую задачу. Найдены ускорения двух точек фигуры и векторы ускорений изображены на схеме в некотором масштабе (рисунок 3). Необходимо найти МЦУ без каких-либо вычислений.

Принимая за полюс точку A, запишем теорему сложения ускорений для точки B:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}.$$

Этому уравнению соответствует геометрическое построение (рисунок 4).

Рисунок 3

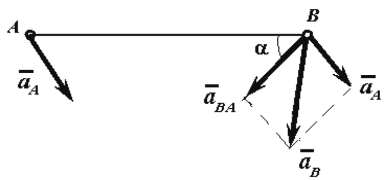

Рисунок 4

Угол α есть угол между направлением AB и линией действия вектора $\overline{a}_{BA}$. Остается повернуть векторы ускорений точек A и B на угол α по часовой стрелке и в точке пересечения полученных линий найдем МЦУ. Направление поворота определяется знаком момента вектора $\overline{a}_{BA}$ относительно точки A (рисунок 5).

Этот метод имеет один недостаток. Угол α необходимо чем-то измерять или находить с помощью дополнительных построений. Поэтому предлагаем третий метод построения МЦУ.

Изобразим две точки A и B, их ускорения, точку C пересечения линий действия ускорений и окружность, проходящую через точки A, B и C (рисунок 6).

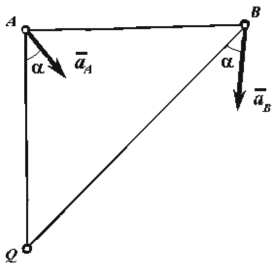

Рисунок 5

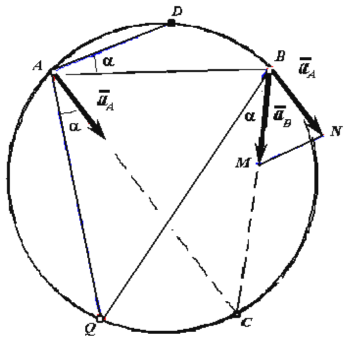

Рисунок 6

Переносим вектор ускорения точки A в точку B и соединяем концы векторов ускорений. Получаем линию MN. Из точки A проводим прямую параллельную MN до пересечения с окружностью в точке D. Таким образом, построен угол α и дуга BD, на которую он опирается. Далее с помощью циркуля строим дугу $CQ = BD$. Причём положение точки Q надо выбирать так, чтобы момент ускорения любой точки относительно нее был (в данном случае) отрицательным. Точка Q – мгновенный центр ускорений.

Можно предложить и четвёртый метод.

Пусть заданы ускорения двух точек фигуры. Линии действия ускорений пересекаются в точке C (рисунок 7).

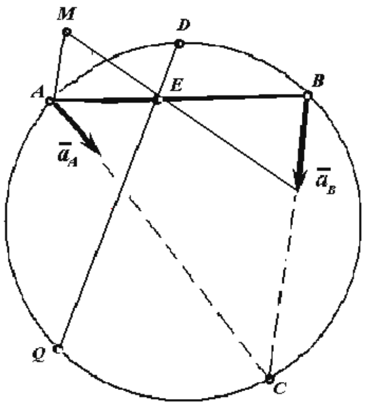

Рисунок 7

Через точки A, B и C проводим окружность. Дугу AB делим пополам в точке D. Из токи А проводим прямую, параллельную ускорению точки B, и откладываем на ней отрезок, равный по модулю ускорению точки A. Через точку M и конец вектора ускорения точки B проводим прямую, которая пересекает прямую AB в точке E. Через точку D и E проводим прямую, которая пересекает окружность в точке Q. Точка Q – мгновенный центр ускорений.

Это есть усовершенствованный метод Н. Е. Жуковского. Доказательство настолько очевидно, что здесь не приводится.

Указанные четыре метода, кроме второго, неприменимы в том случае, когда точка B лежит на продолжении ускорения точки A. Поэтому предлагаем пятый и шестой методы.

Пусть заданы ускорения точек A и B и при этом точка B лежит на продолжении вектора ускорения точки A (рисунок 8). Проводить окружность через точки A и B не имеет смысла, так как таких окружностей может быть бесконечное множество.

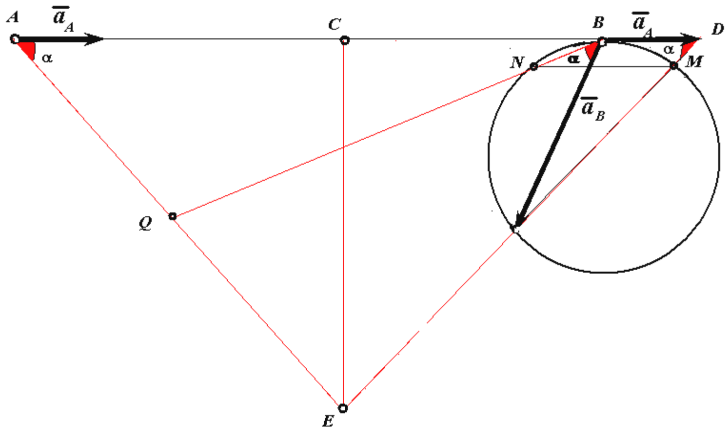

Рисунок 8

Далее выполняем следующие построения. Из точки B строим вектор ускорения точки A. Соединяем концы векторов ускорений (см. рисунок 8) и получаем угол α, который является определяющим при построении МЦУ. Через конец вектора ускорения точки B проводим окружность так, что прямая AB касается этой окружности в торчке B. Отрезок AD делим пополам в точке С и через точку C проводим линию перпендикулярно AB. Точка E – точка пересечения этой линии с линией DM. Прямая MN параллельна AB. Точки M и N лежат на окружности. Мгновенный центр ускорений лежит на пересечении прямых BN и AE. Доказательство понятно из чертежа. Если в этом примере повернуть ускорение точки A на 180 градусов, то построение немного изменяется. Для этого рассмотрим шестой метод.

Пусть заданы ускорения точек *A* и *B* и при этом точка *B* лежит на продолжении вектора ускорения точки *A* так, как это указано на рисунке 9.

Далее выполняем следующие построения. Из точки *B* строим вектор ускорения точки *A*. Соединяем концы векторов ускорений (см. рисунок 8) и получаем угол α, который является определяющим при построении МЦУ. Через конец вектора ускорения точки *B* проводим окружность так, что прямая *AB* касается этой окружности в точке *B*. Отрезок *BC* делим пополам и через середину этого отрезка проводим прямую перпендикулярно *BC*. Эта прямая пересекает прямую *FC* в точке *D*. Через точку *A* проводим прямую *AL* параллельно *BD*, на продолжении которой находится МЦУ. Прямая *FC* пересекает окружность в точке *M*. Прямая *MN* параллельна *AB* и пересекает окружность в точке *N*.

Мгновенный центр ускорений лежит на пересечении прямых *BN* и *AL* в точке *Q*.

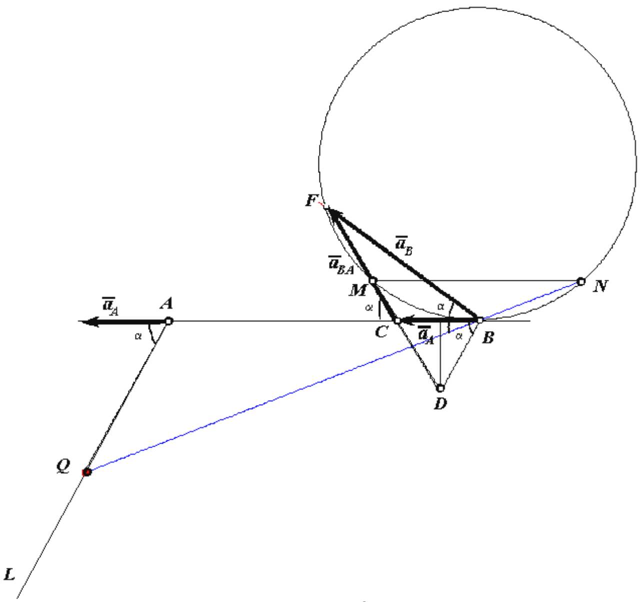

Рисунок 9

Основная цель построения – получить линию *BQ*, которая должна составлять угол α с вектором ускорения точки *B*. Треугольник *BCD* построен для того, чтобы получить линию *AL* под углом α к ускорению точки *A*. Угол *FMN* равен $(\pi - \alpha)$. Угол *FBN* также равен $(\pi - \alpha)$, так как опирается на ту же дугу. Следовательно, угол *FBQ* равен α, а точка *Q* является мгновенным центром ускорений.

Далее рассмотрим свойства окружности, проходящей через МЦУ и МЦС (рисунок 10). Изобразим окружность, проходящую через мгновенный центр ускорений и мгновенный центр скоростей таким образом, чтобы ускорение мгновенного центра скоростей было направлено по нормали к этой окружности.

Распределение ускорений различных точек показано на рисунке 10. При этом обязательно существует такая точка *C*, через которую проходят продолжения векторов ускорений всех точек, лежащих на этой окружности. Точки *P* и *C* лежат на концах одного диаметра. Окружность, изображённая на рисунке 10, имеет название. Она называется кругом поворота или кругом Лагира [1] по имени французского учёного Ф. Лагира (Philippe de Lahire (1640–1718)).

При любом соотношении между угловой скоростью и угловым ускорением фигуры МЦУ может лежать только на этой окружности. Поэтому оправдано ещё одно название этой окружности – окружность мгновенных центров ускорений. Далее заметим, что скорости всех точек перпендикулярны прямым, соединяющим эти точки с МЦС. Следовательно, и скорости всех точек, лежащих на рассматриваемой окружности, пересекаются в точке *C*, т. е. параллельны ускорениям. Таким образом, все ускорения, показанные на рисунке 10, являются касательными ускорениями, а ускорение точки *C* направлено по касательной к кругу поворота. Точка *C* называется полюсом поворота [2].

Далее рассмотрим свойства другой окружности, проходящей через МЦУ и МЦС (рисунок 11). Изобразим окружность, проходящую через мгновенный центр ускорений и мгновенный центр скоростей таким образом, чтобы ускорение мгновенного центра скоростей было направлено по касательной к этой окружности. Эта окружность называется кругом перемены или кругом Бресса [1] по имени французского учёного Ж. Бресса (Jacques Antoine Bresse (1822–1883). Круг Бресса был построен через 200 лет после круга Лагира.

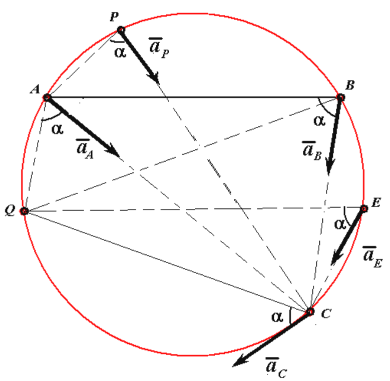

Рисунок 10

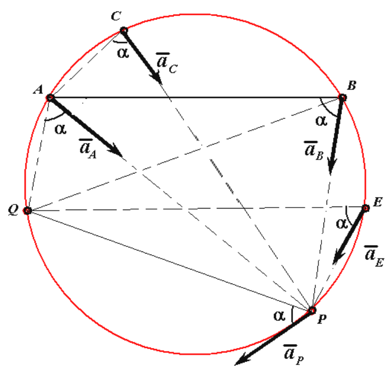

Рисунок 11

Ускорения всех точек, лежащих на окружности круга Бресса, перпендикулярны скоростям соответствующих точек и, следовательно, являются нормальными ускорениями.

В связи с этим рассмотрим такой простой пример. Диск катится по прямолинейной направляющей. Известны скорость центра, ускорение центра и радиус диска. Пусть для определённости радиус диска $R = 1$, ускорение центра $a_C = 1$, скорость центра $v_C = 1$.

Рассмотрим рисунок 12. Окружность диска в данном случае является подвижной центроидой. Прямолинейная направляющая – неподвижная центроида. Точка Q – мгновенный центр ускорений, точка P – мгновенный центр скоростей. Окружность, проходящая через точки P, Q и C, – круг поворота. Ускорение мгновенного центра скоростей не зависит от углового ускорения диска, направлено по общей нормали к центроидам и определяется по формуле

$$a_P = \frac{Rr}{R \pm r}\,\omega^2,$$

которая называется формулой Савари [2].

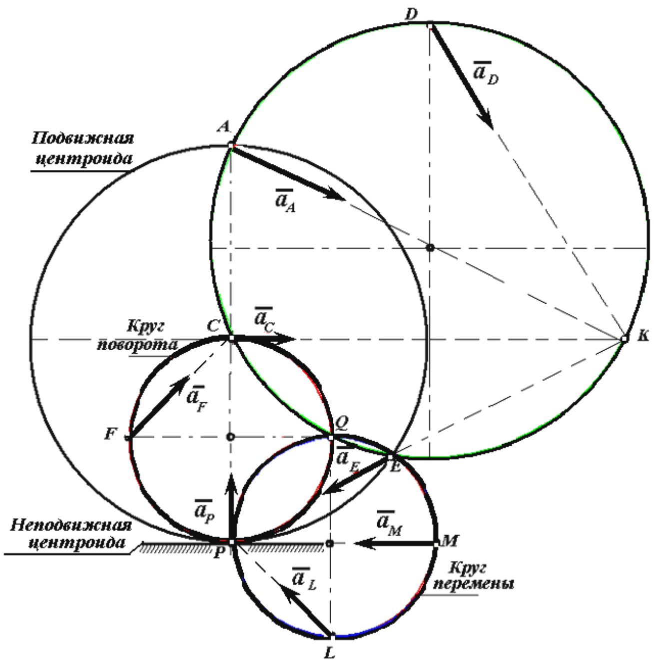

Рисунок 12

Окружность, проходящая через точки P и Q, пересекающая центроиды под прямым углом в точке P, – круг перемены.

Окружность, проходящая через точки A, C и Q, не является ни кругом поворота, ни кругом перемены. Но так как эта окружность проходит через МЦУ, то и ускорения всех точек этой окружности пересекаются в одной точке, но каждое из них имеет и касательные и нормальные составляющие. Исключениями являются точки C и E. Точка C лежит на окружности круга поворота и её ускорение является касательным, а точка E лежит на окружности круга перемены и её ускорение является нормальным.

Основные результаты, полученные в данной работе, сформулируем в следующем виде:

1 Две любые точки плоской фигуры, точка пересечения их ускорений и мгновенный центр ускорений лежат на одной окружности, которую можно назвать окружностью центров ускорений.

2 Ускорения всех точек, лежащих на окружности центров ускорений, пересекаются в одной точке, лежащей на той же окружности. Аналогичными свойствами обладают и скорости точек плоской фигуры.

3 Две любые точки плоской фигуры, точка пересечения их скоростей и мгновенный центр скоростей лежат на одной окружности, которую можно назвать окружностью центров скоростей .

4 Скорости всех точек, лежащих на окружности центров скоростей, пересекаются в одной точке, лежащей на той же окружности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Рожковский, В. Д.** Курс теоретической механики. Кинематика / В. Д. Рожковский, Д. В. Богородицкий. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2003. – 244 с.

2 **Жуковский, Н. Е.** Теоретическая механика / Н. Е. Жуковский. – М.-Л.: ГИТТЛ. – 1952. – 811 с.

V.K. TARASOV

GRAPHIC METHODS FOR POSITIONAL DEFINITION OF INSTANTANEOUS ACCELERATION CENTER

Motion of plane figure in the drawing plane is being considered. Position of the instantaneous acceleration center (IAC) is defined on acceleration of two points. Zhukovski's method is being proved and new methods of IAC definition are offered.

Получено 21.04.2009