

Таким образом, уравнения кривой в промежуточном состоянии ее разворачивания, определяемого параметром  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), имеют вид:

$$x(u) = \begin{cases} \sin u, & u \geq t \\ \sin t - (t-u)\cos t, & u \leq t \end{cases}$$
$$y(u) = \begin{cases} 1 - \cos u, & u \geq t \\ 1 - \cos t - (t-u)\sin t, & u \leq t. \end{cases}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Математический энциклопедический словарь** / гл. ред. Ю. В. Прохоров; ред. кол. С. И. Адян [и др.]. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.

2 **Постников, М. М.** Линейная алгебра и дифференциальная геометрия / М. М. Постников. – М.: Наука, 1979. – 312 с.

3 **Рощева, Т. А.** Методические возможности использования теории линейных преобразований при изложении курса теоретической механики / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. – Гомель, 2009. – Вып. 3. – С. 197–204.

*E. A. MITYUSHOV, T. A. ROSHCHEVA*

## KINEMATIC ALGORITHM FOR RULED SURFACE DEPLOYMENT

This paper introduces the algorithm for smooth surface deployment. It is based on the application of the rotation matrix relative to the moving axis in the three-dimensional space.

Получено 17.09.2009

**ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010**

---

УДК 531.32

*E. A. МИТЮШОВ, Т. А. РОЩЕВА*

*Уральский государственный технический университет, Екатеринбург*

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрены возможность построения ограниченной поверхности, пригодной для скольжения материальной точки с заданными характеристиками “комфорта” или “дискомфорта”.

В формализации большого объема прикладных задач в качестве модельного объекта выступает материальная точка. При постановке и решении задач динамики несвободной точки реакции, как правило, предполагаются неизвестными.

Но существует определенный класс технических проблем, решение которых опирается на использование информации о реактивных силах. Проектирование высокоскоростных путепроводов сложной пространственной конфигурации (монорельсовые железные дороги, трассы бобслея, сложные развязки автомобильных дорог и др.), требует учета не только значительных динамических нагрузок возникающих при движении экипажа, но и расчета и построения пространственных кривых или поверхностей движения, что само по себе является не менее сложной задачей. Комплексное решение задач такого рода возможно с использованием современных математических средств, объединяющих достижения классической механики, дифференциальной геометрии, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и компьютерной геометрии.

В предлагаемой работе рассмотрена частная постановка указанной задачи – отыскание аналитической поверхности, движение по которой под действием силы тяжести при отсутствии трения обеспечивает объекту, принимаемому за материальную точку, “комфорт” или “дискомфорт”. Количественной характеристикой “комфорта” или “дискомфорта” является отношение величины в общем случае переменной нормальной реакции поверхности к весу точки.

Задача решается в рамках классической механики с использованием основного уравнения динамики точки. Система дифференциальных уравнений движения материальной точки записывается в проекциях на подвижные оси естественного трехгранника. Дополненная формулами Френе (дифференциальными векторными соотношениями между ортами осей натурального триэдра) система дифференциальных уравнений с помощью ряда оригинальных математических преобразований решается для траекторий движения, касательные к которым в каждой точке составляют с вертикалью постоянный угол (так называемых линий откоса).

Как известно, если заданы гладкие функции  $k(s) > 0$  и  $\sigma(s)$  при  $0 \leq s \leq s^*$ , то с точностью до преобразований движения существует гладкая кривая  $\vec{r}(s)$ , для которой  $k(s)$  и  $\sigma(s)$  являются кривизной и кручением, а  $s$  натуральным параметром.

Для получения линии откоса воспользуемся формулами Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \sigma\vec{b} - k\vec{\tau}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\sigma\vec{n}$$

и введем в рассмотрение постоянный угол  $\gamma$  между вертикалью и направлением касательной в произвольной точке траектории.

Пусть  $\vec{\tau}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix}; \quad \vec{n}^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{b}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$ . Тогда, так как

$\tau_z = \cos \gamma = \text{const}$ , то из первого и третьего уравнений Френе следует, что  $n_z = 0$ ,  $b_z = \text{const}$ , а из второго уравнения Френе получим:

$$\sigma b_z - k\tau_z = 0 \quad \text{и} \quad \frac{b_z}{\tau_z} = \frac{k}{\sigma} = \operatorname{tg} \gamma .$$

Кроме того,  $d\tau_y = -\frac{k}{\sigma} db_y$ ,

откуда

$$\tau_y - \tau_y^0 = -\operatorname{tg} \gamma (b_y - b_y^0) \quad \text{или} \quad \tau_y - \sin \gamma = -\operatorname{tg} \gamma (b_y + \cos \gamma), \quad \text{т. е.} \quad b_y = -\tau_y \operatorname{ctg} \gamma .$$

Так как

$$n_x = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ \tau_y & \tau_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\tau_y \operatorname{ctg} \gamma & \sin \gamma \\ \tau_y & \cos \gamma \end{vmatrix} = -\frac{\tau_y}{\sin \gamma},$$

то из равенства

$$\frac{d\tau_x}{ds} = kn_x$$

находим

$$\frac{d\tau_x}{ds} = -k \frac{\tau_y}{\sin \gamma}. \quad (1)$$

Вводя в рассмотрение сферические углы  $\gamma$  и  $\varphi(s)$ , задающие положение вектора  $\vec{\tau}$ , определим:

$$\tau_x = \sin \varphi(s) \sin \gamma, \quad \tau_y = \cos \varphi(s) \sin \gamma. \quad (2)$$

Тогда, из уравнения (1)

$$\sin \gamma \frac{d \sin \varphi}{ds} = -k \cos \varphi,$$

откуда

$$\varphi(s) = -\frac{1}{\sin \gamma_0} \int_0^s k(s) ds. \quad (3)$$

Уравнение траектории движения найдем, воспользовавшись определением единичного вектора касательной к пространственной кривой

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds},$$

откуда

$$d\vec{r} = \vec{\tau} ds \quad \text{и} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^s \tau_x ds \\ 0 \\ \int_0^s \tau_y ds \\ 0 \\ \int_0^s \tau_z ds \\ 0 \end{pmatrix}$$

или, с учетом формул (2) и (3):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \int_0^s \sin \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int_0^s k(s) ds \right) ds \\ \sin \gamma \int_0^s \cos \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int_0^s k(s) ds \right) ds \\ s \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для установления зависимости  $k = k(s)$  рассмотрим движение материальной точки массы  $m$  по искомой кривой при отсутствии сопротивления.

Записывая уравнения движения материальной точки в проекциях на главную нормаль и бинормаль к траектории

$$\begin{aligned} kmv^2 &= R_n(s), \\ 0 &= R_b(s) + mg \sin \gamma, \end{aligned}$$

находим суммарную реакцию

$$R = \sqrt{(kmv^2)^2 + (mg \sin \gamma)^2}. \quad (5)$$

По теореме об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s m \vec{g} \vec{\tau} ds,$$

откуда

$$v^2 = 2gs \cos \gamma + v_0^2. \quad (6)$$

Задаваясь законом изменения нормальной реакции  $R(s)$ , из уравнений (5) и (6) находим закон изменения кривизны и искомую кривую

$$k(s) = \sqrt{\frac{R^2(s) - (mg \sin \gamma)^2}{m^2 (2gs \cos \gamma + v_0^2)^2}}.$$

Поверхность, движение по которой происходит с заданным законом изменения нормальной реакции получим в виде линейчатой поверхности с найденной линией откоса в качестве направляющей кривой, нормаль к которой в каждой точке совпадает с вектором  $\vec{R} = R_n \vec{n} + R_b \vec{b}$ , а образующая задается единичным вектором

вектором  $\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \times \vec{\tau}$ . Уравнение поверхности имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \int_0^s \sin \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) ds \\ \sin \gamma \int_0^s \cos \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) ds \\ s \cos \gamma \end{pmatrix} + t \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \times \vec{\tau}, \quad 0 \leq s \leq s^*, \quad -\frac{t^*}{2} \leq t \leq \frac{t^*}{2},$$

где  $s^*, t^*$  – длина и ширина полотна.

С учетом разложения вектора  $\vec{R} = R_n \vec{n} + R_b \vec{b}$  находим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \int_0^s \sin \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) ds \\ \sin \gamma \int_0^s \cos \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) ds \\ s \cos \gamma \end{pmatrix} + t \frac{R_b \vec{n} - R_n \vec{b}}{|\vec{R}|},$$

где

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\cos \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) \\ -\sin \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sin \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) \cos \gamma \\ -\cos \left( \frac{1}{\sin \gamma_0} \int k(s) ds \right) \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Полученное уравнение такой поверхности допускает реализацию численных вычислений и графическую иллюстрацию в доступных широкому кругу потребителей математических пакетах. На рисунке в пакете MathCAD приведены примеры построения траекторий движения и поверхности катальной горки при различных углах откоса и значениях нормальной реакции  $R$  (рисунок 1).

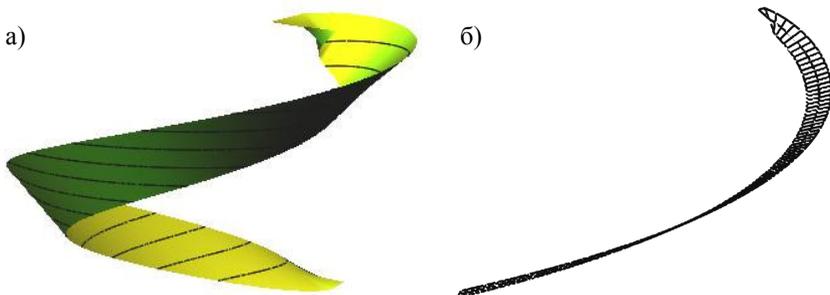


Рисунок 1 – Примеры построения траектории движения (а) и поверхности катальной горки (б)

*E.A.MITJUSHOV, T.A.ROSHCHEVA*

## **ONE PROBLEM OF THE DYNAMICS OF A CONSTRAINED PARTICLE**

In the paper the possibility of constructing a boundary constraint surface good for sliding motion of the material particle with given "comfort" or "discomfort" characteristics is being analysed.

Получено 02.07.2009

---

**ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010**

---

УДК 678.742

*А. К. НОВИКОВ*

*Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого  
Национальной академии наук Беларуси, Гомель*

## **ОБРАЗОВАНИЕ ВЫСОКОПРОЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПЛАСТМАССОВЫХ ОТЛИВОК**

Приведены теоретическая оценка и экспериментальные результаты исследования процессов ориентации и отверждения пластмассовых отливок, полученных методом прочного литья.

**Введение.** Теплообмен играет важную роль в выборе технологического режима формирования изделий из термопластов. Так, снижение температуры стенки оформляющей полости позволяет повысить производительность процесса литья под давлением при сохранении физико-механических свойств и качества наружной поверхности [1].

В ряде работ (например, [2, 3]) выполнено математическое описание и осуществлено моделирование литья под давлением по традиционной технологии, т. е. с заполнением оформляющей полости литьевой формы. Однако нами показано [4], что регулировать структурообразование и улучшать свойства материала позволяет литье под давлением с течением расплава через оформляющую полость.

Нестационарность процесса литья оказывает существенное влияние на ориентационные явления, происходящие при формировании отливки. Литье под давлением с течением расплава через оформляющую полость повышает прочность изделий за счет активации процесса образования ориентированных структур.

**Расчет процесса отверждения полимерных материалов.** Для расчета параметров процесса отверждения в этой технологии задачу теплопроводности целесообразно сформулировать для обеих частей материала – твердой зоны и расплава.