

УДК 539.3

А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК, В. М. ХВИСЕВИЧ

Брестский государственный технический университет, Беларусь

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛА НА ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Работа посвящена определению напряжений и деформаций в неоднородных осесимметричных телах с использованием теории потенциала. На основании разработанного алгоритма построены граничные интегральные уравнения и проведена их численная реализация, а также решены ряд тестовых задач для проверки достоверности алгоритма.

Введение. Как правило, все материалы, используемые для создания конструктивных элементов машин и механизмов, имеют определенную неоднородность, которую можно разделить на микронеоднородность (дефекты и неправильность кристаллической решетки, молекулярная структура полимеров и т. д.) и макронеоднородность (параметры, определяющие свойства среды, зависят от координат и осреднены по области, которая является большой в сравнении с размерами структуры элементов тел). С позиции инженерной практики интерес представляет исследование НДС тел с макронеоднородностью (упругие тела с непрерывной неоднородностью). Неоднородность упругих свойств возникает в процессах формирования тел (процессы отливки), при различных технологических процессах (различные виды обработки тел), эксплуатации конструктивных элементов на практике (воздействие температуры, радиации и т. д.).

При действии на тела высоких температур изменение температуры T приводит к существенному изменению модуля Юнга $E = E(T)$, коэффициента линейного расширения $\alpha = \alpha(T)$ при постоянном коэффициенте Пуассона ν [1]. В работе [2] показано, что максимальные напряжения в нагретой толстостенной трубе с учетом изменения модуля Юнга от температуры \sim на 40 % меньше, чем при постоянном модуле. Поэтому постановка и реализация такого рода задач актуальна и имеет практическую ценность.

Для исследования НДС в осесимметричных телах с непрерывной неоднородностью необходимо поставить краевую задачу теории упругости (термоупругости) и разработать эффективный метод ее реализации. Аналитическое решение такого рода задач практически невозможно в связи со сложной геометрией области тел и граничных условий поэтому в настоящее время применение нашли различные численные методы. Наиболее распространенным численным методом решения краевых задач является метод конечных элементов (МКЭ). Однако он не свободен от недостатков. Для решения поставленной задачи используем метод потенциала, с помощью которого дифферен-

циальные уравнения сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода и которые имеют некоторые преимущества по сравнению с МКЭ [3].

Методика решения. Согласно [2] краевая осесимметричная задача неоднородной термоупругости сводится к решению дифференциальных уравнений равновесия в частных производных:

$$\Delta u - \frac{u}{\rho^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right) = - \frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z} \right), \quad (1)$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^T \alpha(T) dT \right) = - \frac{2(1+\nu)}{E^2} \frac{dE}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z} + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz} \right),$$

где u, w – перемещения; $e = \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z}$; ρ, z, ϑ – цилиндрические координаты, и граничных условий

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{3\nu}{1-2\nu} e \right) n_\rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_z &= \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) n_\rho + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{3\nu}{1-2\nu} e \right) n_z &= \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dT, \end{aligned} \quad (2)$$

где n_ρ, n_z – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела, а также уравнений теплопроводности

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T^*}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T^*}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

где $T^* = \int_0^T \lambda(T) dT$, $\lambda(T) = \lambda_0(1 - kT)$ – коэффициент теплопроводности; k –

эмпирический коэффициент.

С использованием метода возмущений [2] краевая задача (1), (2) сводится к решению осесимметричной задачи стационарной термоупругости однородного тела (нулевое приближение) и последовательности краевых задач теории упругости (последующие приближения).

Представляя температуру T^* в виде функции Грина, вместо (3) получаем интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности:

$$\begin{aligned} 2\pi T^*(x) &= \int_L \frac{dT}{dn_y} \rho_z dl_y \frac{4}{\sqrt{R^2}} K + \\ &+ \int_L T^*(y) \rho_y dl_y \frac{2}{\sqrt{R^2}} \left\langle \left\{ \frac{2\rho_y}{r^2} [(\rho_y - \rho_x) n_{\rho y} + Z n_{zy}] - n_{\rho y} \right\} E + n_{\rho y} K \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь x, y – параметрическая и текущая точки при интегрировании, $r^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 - 2\rho_x\rho_y \cos \theta + Z^2$, $Z = Z_y - Z_x$; $\theta = \vartheta_y - \vartheta_x$ dl_y – элемент дуги меридионального контура; Z, E, K – эллиптические интегралы.

Решение системы (1) разыскиваем в виде

$$u_\rho^0 = u_\rho^u + u_\rho^T; \quad u_z^0 = u_z^u + u_z^T, \quad (5)$$

где u_ρ^u, u_z^u – общие решения однородных дифференциальных уравнений (1) [3]; u_ρ^T, u_z^T – частные решения Гудьера, интегральное представление которых имеет вид:

$$u_\rho^T = a \left[C \int_{LULi} \left\{ \frac{dT}{dn_y} (\rho_x I_4 - \rho_y I_1) - T(y) Q_\rho \right\} \rho_y dl_y - b \int_S T(y) \rho_y (\rho_x I_5 - \rho_y I_2) dS_y \right];$$

$$u_z^T = a \left[C \int_{LULi} \left\{ \frac{dT}{dn_y} I_4 + T(y) Q_z \right\} \rho_y dl_y - b \int_S T(y) \rho_y Z I_5 dS_y \right], \quad (6)$$

где $a = \frac{(1+\nu)^2 \alpha_0}{2\pi(1-\nu)E(T)}$, $C = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$, $b = 1 \frac{\gamma}{k}$, k и γ – постоянные, которые определяются экспериментально;

$Q_z = n_{\rho y} Z (\rho_y^2 I_5 + \rho_x^2 I_2) + n_{zy} (Z^2 I_5 - I_4)$;
 $Q_\rho = n_{\rho y} [(\rho_y^2 + \rho_x^2) I_2 - \rho_y \rho_x (I_3 + I_5) - I_1] + n_{zy} Z (\rho_y I_2 - \rho_x I_5)$; I_1, \dots, I_5 – интегралы [3].

С помощью соотношений Дюгамеля – Неймана были построены интегральные уравнения напряжений $\sigma_{\rho\rho}^0, \sigma_{zz}^0, \sigma_{\rho z}^0, \sigma_{\vartheta\vartheta}^0$, (соответствуют (5), а выражения $\sigma_{\rho\rho}^u, \dots, \sigma_{\vartheta\vartheta}^u$, приведены в [4]) и сингулярные интегральные уравнения (СИУ) краевой задачи термоупругости на нулевом приближении:

$$\nu_\rho(x) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_L [\nu_\rho(y)(A_{\rho\rho} n_{\rho x} + A_{\rho z} n_{z x}) + \nu_z(y)(B_{\rho z} n_{z y})] dl_y = p_\rho(x) + p_\rho^T(x);$$

$$\nu_z(x) + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_L [\nu_\rho(y)(A_{\rho z} n_{\rho x} + A_{zz} n_{z x}) + \nu_z(y)(B_{\rho z} n_{\rho x}) + B_{zz} n_{z x}] dl_y =$$

$$= p_z(x) + p_z^T(x).$$

где ν_ρ, ν_z – плотности потенциала простого слоя, $A_{\rho\rho}, \dots, B_{zz}$ – коэффициенты, полученные в [4], $p_\rho(x), p_z(x)$ – компоненты механических усилий, $p_\rho^T(x), p_z^T(x)$ – компоненты фиктивной температурной поверхностной нагрузки.

Здесь решение задачи теории упругости разыскиваем в виде

$$p_\rho^T(x) = -(\sigma_{\rho\rho}^T n_{\rho x} + \sigma_{\rho z}^T n_{zx}), \quad p_z^T(x) = -(\sigma_{\rho z}^T n_{\rho x} + \sigma_{zz}^T n_{zx}). \quad (8)$$

В результате решения (7) определялись плотности v_ρ, v_z , а затем напряжения $\sigma_{\rho\rho}^0, \dots, \sigma_{\rho\theta}^0$. Значения напряжений использовались для решения краевой задачи теории упругости на первом приближении.

Здесь

$$u_\rho^{(1)} = u_\rho^u + u_\rho^N; \quad u_z^{(1)} = u_z^u + u_z^N. \quad (9)$$

Интегральные представления u_ρ^u и u_z^u известны [3], а

$$\begin{aligned} u_\rho^N &= -\frac{(1+\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \int_S f(T) \left[\frac{\chi_\rho}{E(T)} C_{\rho\rho}^N + \frac{\chi_z}{E(T)} C_{\rho z}^N \right] dS_y, \\ u_z^N &= -\frac{(1+\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \int_S f(T) \left[\frac{\chi_\rho}{E(T)} C_{z\rho}^N + \frac{\chi_z}{E(T)} C_{zz}^N \right] dS_y, \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(T) = \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT}$; $\chi_\rho = \frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho\rho}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{\rho z}^0$; $\chi_z = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \sigma_{\rho z}^0 + \frac{\partial T}{\partial z} \sigma_{zz}^0 \right)$; $C_{\rho\rho}^N, \dots, C_{\rho z}^N$ аналогичны соотношениям в работе [3].

Система СИУ такая же, как и (7), но вместо p_ρ^T и p_z^T берется фиктивная нагрузка

$$p_\rho^N = -(\sigma_{\rho\rho}^N n_{\rho x} + \sigma_{\rho z}^N n_{zx}); \quad p_z^N = -(\sigma_{\rho z}^N n_{\rho x} + \sigma_{zz}^N n_{zx}). \quad (11)$$

Некоторые результаты. На основе метода механических квадратур разработан алгоритм численного решения интегральных уравнений и составлена программа для ПЭВМ. Интегралы вычислялись с помощью квадратурных формул Гаусса и Лашенова. Реализован тестовый пример. В качестве примера решена задача о нагреве полой сферы. Результаты численного решения сравнивались с решением в [2]. Построены зависимости распределения радиальных и тангенциальных напряжений, приведенные на рисунках 1 и 2.

Расчеты, выполненные для следующих исходных данных: $T_a = 500$ °С, $T_b = 400$ °С, $\lambda_0 = 0,11 \frac{\text{ккал} \cdot \text{с}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}} \cdot \text{с}$, $\nu = 0,33$, $a = 0,5$ м, $b = 1$ м, продемонстрировали работоспособность предложенного алгоритма.

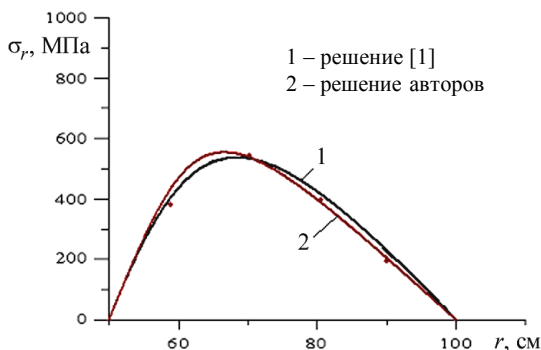


Рисунок 1 – Распределение радиальных напряжений

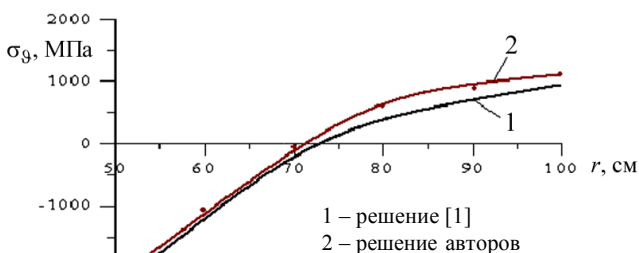


Рисунок 2 – Распределение тангенциальных напряжений

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Прочность материалов при высоких температурах** / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Наукова думка, 1966. – 795 с.

2 **Ломакин, В. А.** Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.

3 **Копейкин, Ю. Д.** Интегральные уравнения осесимметричной краевой задачи термоупругости / Ю. Д. Копейкин, В. М. Хвисевич // Известия АН СССР. МТТ. – 1991. – № 6. – С. 52–57.

4 **Копейкин, Ю. Д.** Прямое решение осесимметричной второй задачи теории упругости методом бигармонических потенциалов / Ю. Д. Копейкин, А. А. Калинин // Изд. АН БССР. Сер. физ. мат. наук. – 1977. – № 3. – С. 85–90.

A. I. VEREMEICHICK, V. M. KHVISEVICH

ELABORATION OF POTENTIAL METHOD IN THE RESEARCH OF STRESS-STRAIN STATE FOR HETEROGENEOUS AXIAL-SYMMETRIC BODIES

The study covers potential theory-based determination of stresses and deformations for heterogeneous axial-symmetric bodies. On the ground of the developed algorithm the bound-

ary integral equations have been formulated and their numerical implementations have been made as well as a number of test problems to validate the algorithm have been solved.

Получено 24.09.2009

**ISBN 978-985-468-707-0. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 4. Гомель, 2010**

УДК 629.11.011.38

И. А. ВОРОЖУН, А. В. ЗАВОРОТНЫЙ, Е. С. КОРОТКЕВИЧ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ «АВТОМОБИЛЬ – ЯРУСЫ ТРУБ» ПРИ ТОРМОЖЕНИИ

В работе на основе принципа Даламбера составлена система дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение автомобиля с четырьмя попарно закрепленными на нем трубами. В результате ее решения выполнена оценка тормозного пути автомобиля с учетом упругости креплений.

Металлические, железобетонные и асбестоцементные трубы перевозят от заводов-изготовителей до пунктов назначения железнодорожным, автомобильным, водным и другими видами транспорта. В населенных пунктах доставка труб к месту их установки осуществляется автомобильным транспортом. Для перевозки труб используют автомобили МАЗ-5048, МАЗ-5205А, КамАЗ-5410, ОдАЗ-9370, автопоезда ПЛТ 1810 и ПЛТ 1310, автопоезд-самопогрузчик УПЛС 1308. Для транспортирования железобетонных труб со стальным сердечником диаметром 250, 300 и 400 мм, длиной 5 м, а также асбестоцементных труб диаметром 300–450 мм, длиной 3–5 м, суммарной массой до 7500 кг ПТБ «Водстройиндустрия» разработан трубовоз АТ 0805. В трубовозе применены легкоъемные сменные подкладки, обеспечивающие быструю переналадку под трубы другого типоразмера, и гибкие прокладки, исключаящие взаимное соприкосновение труб. Внедряется он на предприятиях стройиндустрии Главнечерноземводстроя.

Наличие в населенных пунктах светофоров, нерегулируемых пешеходных переходов требует от водителей автомобилей повышенного внимания особенно при перевозке длинномерных и крупногабаритных грузов, какими являются трубы. Водитель автомобиля должен знать, что длина тормозного пути, даже с полностью заторможенными колесами зависит как от скорости движения, так и состояния дороги.

Цель исследований – установление длины тормозного пути автомобиля при полностью заторможенных колесах от скорости движения и коэффициента трения скольжения шин колес по дороге.