СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики. В 2 т. / А. А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 1971. – Т. 2: Динамика. – 488 с.

2 **Локтионов, А. В.** К вопросу о составлении дифференциального уравнения при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: Международ. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2010. – Вып. 4. – С. 162–166.

A. V. LOKTIONOV, S. A. SENKOV

SOLUTION OF THE EQUATION OF SMALL OSCILLATION FOR AN ELLIPTIC PENDULUM

The compound motion of the elliptic pendulum is being considered. The differential equations describing slider and ball movements are set up and solved. In the work it is accepted that at the initial moment the deflection angle of rotation of an arrow of a pendulum from vertical and the velocity of the slider equal zero and the angular velocity of needle rotation is nonzero. With the initial conditions taken into account the equations for slider movement and small oscillations of the pendulum are received.

Получено 04.10.2010

ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011

УДК 531.1

А. Г. МИТЯЕВ, О. А. ТКАЧ
Тульский государственный университет, Россия

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС НА УПРУГОЙ НИТИ

Рассмотрены малые поперечные колебания сосредоточенных масс на упругой нити. Решена система дифференциальных уравнений. Приведены уравнения движения масс и исследованы различные формы колебаний.

Пусть три материальные точки M_1, M_2, и M_3 одинаковой массы расположены так, что $AL_1 = L_1L_2 = L_2L_3 = L_3B = a$ (рисунок 1).

Рассмотрим малые отклонения точек M_1, M_2, и M_3 от прямой AB, считая, что смещения перпендикулярны оси x. Если y_1, y_2, y_3 – координаты названных точек, то кинетическая энергия приобретает форму

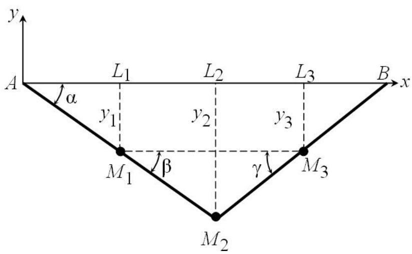

Рисунок 1 – Расчетная схема

$$E_k = \frac{1}{2} m\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right).$$

Считая натяжение нити T одинаковым по всей длине, находим выражения проекций сил на оси координат

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= T\sin\alpha + T\sin\beta = T\left(-\frac{y_1}{a} + \frac{y_2 - y_1}{a}\right) = \frac{T}{a}(-2y_1 + y_2), \\ Y_2 &= -T\sin\beta - T\sin\gamma = T\left(\frac{y_1 - y_2}{a} + \frac{y_3 - y_2}{a}\right) = \frac{T}{a}(y_1 - 2y_2 + y_3), \\ Y_3 &= \frac{T}{a}(y_2 - y_3) \end{aligned}\right\}$$

и потенциальной энергии системы

$$\Pi = -\frac{1}{2}(Y_1 y_1 + Y_2 y_2 + Y_3 y_3) = \frac{T}{a}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3\right).$$

Последовательно применяя уравнение Лагранжа [1], получим

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + \frac{T}{a}(2y_1 - y_2) &= 0, \\ m\ddot{y}_2 + \frac{T}{a}(2y_1 - y_2 - y_3) &= 0, \\ m\ddot{y}_3 + \frac{T}{a}(2y_3 - y_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Решение уравнений (1) найдем в форме:

$$y_1 = A_1 e^{\lambda t}, \; y_2 = A_2 e^{\lambda t}, \; y_3 = A_3 e^{\lambda t}.$$

Тогда, вводя обозначение $k = \dfrac{T}{am}$, получим

$$\left.\begin{aligned} (\lambda^2 + 2k)A_1 - kA_2 &= 0, \\ -kA_1 + (\lambda^2 + 2k)A_2 - kA_3 &= 0, \\ -kA_2 + (\lambda^2 + 2k)A_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В таком случае характеристическое уравнение для λ имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & \lambda^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & \lambda^2 + 2k \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

или
$$\left(\lambda^2 + 2k\right)\left(\lambda^2 + 2k + k\sqrt{2}\right)\left(\lambda^2 + 2k - k\sqrt{2}\right) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -2k$, $\lambda_2 = -(2 + \sqrt{2})k$, $\lambda_3 = -(2 - 2\sqrt{2})k$.

Решая систему (2) относительно $\frac{A_1}{A_3}$ и $\frac{A_2}{A_3}$, находим

$$\frac{A_1}{k^2} = \frac{A_2}{-k\left(\lambda^2 + 2k\right)} = \frac{A_3}{\left(\lambda^2 + 2k\right)^2 - k^2} = C\ ,$$

где C – произвольная постоянная.

Знаменатели полученного соотношения представляют миноры Δ_1, Δ_2, Δ_3 определителя (3). Подставляя вместо λ поочередно $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, $\pm\lambda_3$, получим три группы частных решений уравнений (1) [2], соответствующие:

– λ_1

$$y_1 = k^2 H_1 \sin\left(\sqrt{2k}t + \varepsilon_1\right),\ y_2 = 0\ ,\ y_3 = -k^2 H_1 \sin\left(\sqrt{2k}t + \varepsilon_1\right);$$

– λ_2

$$y_1 = k^2 H_2 \sin\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_2\right)\ ,\ y_2 = -k^2\sqrt{2}H_2 \sin\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_2\right),$$

$$y_3 = k^2 H_2 \sin\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_2\right);$$

– λ_3

$$y_1 = k^2 H_3 \sin\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_3\right)\ ,\ y_2 = k^2 H_3 \sin\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_3\right),$$

$$y_3 = k^2 H_3 \sin\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_3\right),$$

где H_1, H_2, H_3, ε_1, ε_2 , ε_3 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

Полученные решения дают три типа колебаний грузов (рисунок 2): при λ_1 ($y_1 = -y_3$, $y_2 = 0$) – одноузловое колебание с периодом $\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2k}}$; при λ_2 $\left(y_1 = y_3 = -\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)$ – двухузловое колебание с периодом $\tau_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{(2+\sqrt{2})k}}$; при λ_3 $\left(y_1 = y_3 = \frac{y_2}{\sqrt{2}}\right)$ – безузловое колебание с периодом $\tau_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2-\sqrt{2}k}}$. Заметим, что $\tau_2 < \tau_1 < \tau_3$, то есть безузловое колебание самое медленное.

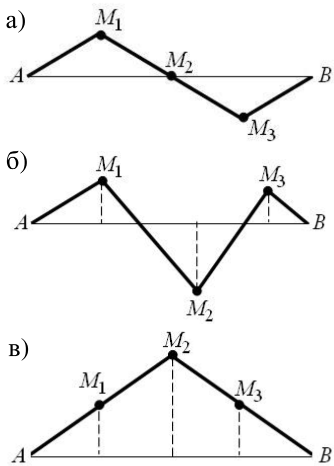

Рисунок 2 – Типы колебаний грузов: *а* – значение λ_1; *б* – λ_2; *в* – λ_3

Объединяя k^2 с иными постоянными, получим общий интеграл дифференциальных уравнений (4):

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_1 = H_1 \sin\left(\sqrt{2k}\,t + \varepsilon_1\right) + H_2 \sin\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_2\right) + \\
&+ H_3 \sin\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_3\right), \\
&y_2 = -\sqrt{2}H_2 \sin\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_2\right) + \sqrt{2}H_3 \sin\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_3\right), \\
&y_3 = -H_1 \sin\left(\sqrt{2k}\,t + \varepsilon_1\right) + H_2 \sin\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_2\right) + \\
&+ H_3 \sin\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})k}\,t + \varepsilon_3\right).
\end{aligned}
\right\}
$$

Слагаемые, входящие в представленные законы колебаний, являются главными колебаниями системы – общий интеграл представляет их линейную комбинацию. Главные координаты [3] z_1, z_2, z_3 связаны с координатами y_1, y_2, y_3 соотношениями:

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_1 = z_1 + z_2 + z_3, \\
&y_2 = -\sqrt{2}z_2 + \sqrt{2}z_3, \\
&y_3 = -z_1 + z_2 + z_3.
\end{aligned}
\right\}
$$

Из них находим выражения главных координат:

$$
z_1 = \frac{y_1 - y_2}{2}, \quad z_2 = \frac{y_1 + y_3}{4} - \frac{y_2}{2\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{y_1 + y_3}{4} + \frac{y_2}{2\sqrt{2}}.
$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергия могут быть выражены через главные координаты и скорости:

$$
E_k = \frac{1}{2} m \left(\dot{z}_1^2 + 2\dot{z}_2^2 + 2\dot{z}_3^2\right),
$$

$$
\Pi = \frac{T}{a}\left(z_1^2 + (2+\sqrt{2})z_2^2 + (2-\sqrt{2})z_3^2\right).
$$

Рассмотрим теперь колебания n материальных точек одинаковой массы m, расположенных на одинаковых расстояниях $AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}M_n = l$ на упругой нити AB, концы которой A и B закреплены. (рисунок 3). Струну можно рассматривать как предельный переход при $n \to \infty$. Предполагая, что в положении равновесия точки лежат на одной прямой и в процессе движения их отклонения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ перпендикулярны прямой AB, получим законы движения точек и периоды их главных колебаний.

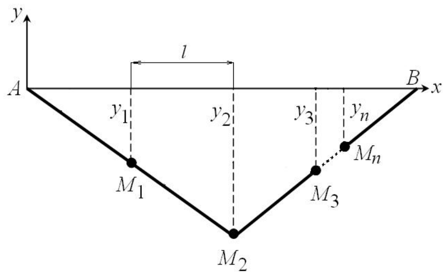

Рисунок 3 – Расчетная схема

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – координаты, а $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_n$ – скорости сосредоточенных масс, то кинетическая энергия системы определяется формулой:

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \ldots + \dot{y}_n^2 \right), \tag{4}$$

а ее потенциальная энергия может быть представлена выражением [4]:

$$\Pi = \frac{P}{L} (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3 - \ldots - y_{n-1} y_n) , \tag{5}$$

где $P = mg$.

Подставляя формулы (4) и (5) в уравнения Лагранжа, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{y}_1 + k(0 + 2y_1 - y_2) = 0, \\ \ddot{y}_2 + k(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ddot{y}_{n-1} + k(-y_{n-2} + 2y_{n-1} - y_n) = 0, \\ \ddot{y}_n + k(-y_{n-1} + 2y_n - 0) = 0. \end{array} \right\}$$

Здесь для упрощения записей введено обозначение $k = P / ml$.

Используя при решении дифференциальных уравнений универсальную подстановку $y_n = A_n e^{\lambda t}$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda^2 + 2k) A_1 - k A_2 + 0 + \ldots + 0 = 0 , \\ -k A_1 + (\lambda^2 + 2k) A_2 - k A_3 + 0 , \\ \ldots\ldots\ldots \\ k A_{n-2} + (\lambda^2 + 2k) A_{n-1} - k A_n = 0 , \\ \ldots k A_{n-1} + (\lambda^2 + 2k) A_n = 0 . \end{array} \right\} \tag{6}$$

Если уравнения (6) разделить на k и положить, что $\frac{\lambda^2}{k} + 2 = r$, то они примут вид:

$$\left. \begin{array}{l} r A_1 - A_2 = 0, \\ -A_1 + r A_2 - A_3 = 0, \\ \ldots\ldots \\ \ldots A_{n-1} + r A_n = 0. \end{array} \right\} \tag{7}$$

Чтобы упростить решение системы алгебраических уравнений, будем искать квазиамплитуды A_n, предполагая, что $r = 2 \cos \varphi$, $A_1 = l \sin \varphi$, где l и φ – некоторые константы. Тогда

$$A_2 = rA_1 = C \sin 2\varphi, \ A_3 = rA_2 - A_1 = C \sin 3\varphi, \ A_4 = C \sin 4\varphi \ \text{и т. д.}$$

или $$A_k = C \sin k\varphi,\ (k = 1,\ \dots,\ n),.$$

Подставляя полученные выражения в последнее уравнение (7), получим

$$C \sin(n+1)\varphi = 0 \tag{8}$$

Считая, что C – отличная от нуля произвольная постоянная, находим

$$(n+1)\varphi = \pi s,$$

где s – любое число.

Чтобы значения A_n не обращались одновременно в ноль, числу s надо дать целые положительные значения от 1 до n, соответственно можно получить n различных значений для r:

$$r_s = 2\cos\frac{s\pi}{n+1}, \quad (s = 1, 2, ..., n),$$

по которым определяют квазиамплитуды A_r [5]:

$$A_i = C_s \sin\frac{is\pi}{n+1}, \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Отметим, что для каждого значения r_s берется своя постоянная C_s.

Возвращаясь к числу λ, получим n различных отрицательных значений:

$$\lambda^2 = kr - 2k = -4k\sin^2\frac{s\pi}{2(n+1)}.$$

Обозначая λ^2 через μ^2, находим

$$\mu_s = \pm 2\sqrt{k}\sin\frac{s\pi}{n+1}, \quad (s = 1, 2, ..., n).$$

Тогда общий интеграл уравнений Лагранжа запишется в виде [3]:

$$y_1 = H_1 \sin\frac{\pi}{n+1}\sin(\mu_1 t + \varepsilon_1) + H_2 \sin\frac{2\pi}{n+1}\sin(\mu_2 t + \varepsilon_2) + \ldots + H_n \sin\frac{n\pi}{n+1}\sin(\mu_s t + \varepsilon_n);$$

$$y_2 = H_1 \sin\frac{2\pi}{n+1}\sin(\mu_1 t + \varepsilon_1) + H_2 \sin\frac{4\pi}{n+1}\sin(\mu_2 t + \varepsilon_2) + \ldots + H_n \sin\frac{2n\pi}{n+1}\sin(\mu_s t + \varepsilon_n);$$

………

$$y_n = H_1 \sin\frac{n\pi}{n+1}\sin(\mu_1 t + \varepsilon_1) + H_2 \sin\frac{2n\pi}{n+1}\sin(\mu_2 t + \varepsilon_2) + \ldots + H_n \sin\frac{n^2\pi}{n+1}\sin(\mu_s t + \varepsilon_n).$$

Здесь H_j и ε_j – постоянные интегрирования. Периоды главных колебаний примут вид:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\mu_n} = \frac{\pi}{\sqrt{k}}\frac{1}{\sin\frac{s\pi}{n+1}}, \quad (s = 1, 2, ..., n).$$

Если $n \to \infty$, а $l \to 0$, то можно получить формулы для колебаний струны. Полагаем, что L – длина струны и ρ – масса ее единицы длины. Отсюда $\rho L = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)m$. С другой стороны $L = (n+1)l$. Тогда перемножая, получим:

$$ml = \frac{\rho L^2}{(n+1)^2},$$

следовательно, частота колебаний μ определяется формулой

$$\mu_s = 2\sqrt{k}\sin\frac{s\pi}{n+1} = 2\sqrt{\frac{P(n+1)}{\rho L}}\sin\frac{s\pi}{2(n+1)},$$

а при $s \to \infty$
$$\mu_s = \frac{s\pi}{L}\sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

Выражая координату x точки струны $x = j\,l = \frac{j}{n+1}L$, координату y представим в пределе функцией [6]

$$y = \sum_{S=1}^{\infty} H_S \sin\frac{s\pi x}{l}\sin\left(\frac{s\pi}{L}\sqrt{\frac{P}{\rho}}t + \varepsilon_S\right).$$

Частоты μ_S являются кратными частоте μ_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Артоболевский, И. И.** Вибрации в технике / И. И. Артоболевский. – М.: Машиностроение, 1978. – 362 с.

2 **Бабаков, Н. М.** Теория колебаний / Н. М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.

3 **Лойцянский, Л. Г.** Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

4 **Лурье, А. И.** Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

5 **Розе, Н. В.** Лекции по аналитической механике / Н. В. Розе. – Л., 1938. – 203 с.

6 **Розе, Н. В.** Динамика твердого тела / Н. В. Розе. – Л.: Наука, 1948. – 368 с.

A. G. MITYAYEV, O. A. TKACH

TRANSVERSE OSCILLATIONS OF CONCENTRATED MASSES ON ELASTIC THREAD

The small transverse oscillations of concentrated masses on the elastic thread are being considered. The system of differential equations has been solved. There are given the equations of mass movements and different modes of oscillations are analyzed.

Получено 26.03.2010