

5 Даламбер, Ж.-Л. Динамика / Ж.-Л. Даламбер. – Новокузнецк: Новокузнецкий физико-математический институт, 2000. – 336 с.

6 Зоммерфельд, А. Механика / А. Зоммерфельд. – М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1947. – 391 с.

7 Пёшьль, Т. Техническая механика для инженеров и физиков / Т. Пёшьль. – М.: Гостехтеориздат, 1934. – 344 с.

*D. V. KOMNATNY*

## **VALUE OF RESEARCH PROBLEMS FOR CREATING KINETOSTATICS METHOD**

The value of research problems solved by the outstanding researchers, G.-L. Dalambert in particular, for creating the kinetostatics method is analyzed in this article. It is shown how the theoretical treatments of this method during problem solution process were improved and moved towards the modern ones. Based on G.-L. Dalambert's and his contemporaries' work analyses there were given the recommendations for the usage of engineering mechanics classical problems in contemporary training courses and handbooks. The aim of this use is broadening students' outlook and the preparation for their independent researches.

Получено 03.06.2010

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

---

УДК 531.8

*С. В. ЛИЛКОВА-МАРКОВА*

*Университет по архитектуре, строительству и геодезии, София, Болгария*

## **КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

На основе численных исследований проанализированы значения касательных напряжений для балки с постоянным и с изменяющимся по длине балки прямоугольным поперечным сечением.

**Введение.** Балка часто встречается как элемент в конструкциях и машинах. Многие темы по дисциплине „Сопrotивление материалов” для инженерных специальностей технических университетов связаны с нагруженными балками. В большинстве учебников по этой дисциплине исследованы только балки с постоянным по длине поперечным сечением. В учебной программе по сопромату в Университете по архитектуре, строительству и геодезии в Софии (Болгария) представлены темы только о таких балках.

Среди студентов всегда есть такие, которые проявляют большой интерес к дисциплине „Сопrotивление материалов”. Для них будет полезно усвоить

и другие вопросы, которые лежат за пределами общего курса. Одним из таких вопросов является способ определения тангенциальных напряжений в случае изменения поперечного сечения по длине балки. Настоящая статья посвящена такой теме.

**Постановка задачи.** Рассматривается балка с прямоугольным поперечным сечением с размерами  $b$  и  $h$ . Ось балки обозначена буквой  $x$ . Оси  $y$  и  $z$  – главные центральные инерционные оси сечения. В большинстве учебников по сопротивлению материалов (например, в [1]) приведена следующая формула для касательных напряжений в случае, когда балка имеет постоянное сечение по длине

$$\tau_{xz} = \frac{6Q_z}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (1)$$

В ней  $Q_z$  является поперечной внутренней силой, а  $z$  – координата точки сечения. Видно, что функция тангенциальных напряжений – квадратная парабола, показанная на рисунке 1.

Исследуем балку с поперечным сечением в форме прямоугольника (рисунок 2), причем это сечение переменное по длине балки. Его ширина  $b$  постоянная величина, а высота  $h$  линейно изменяется по длине,  $h_0$  – высота поперечного сечения балки на свободном краю.

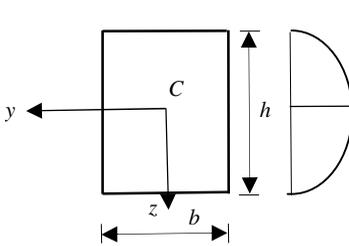


Рисунок 1

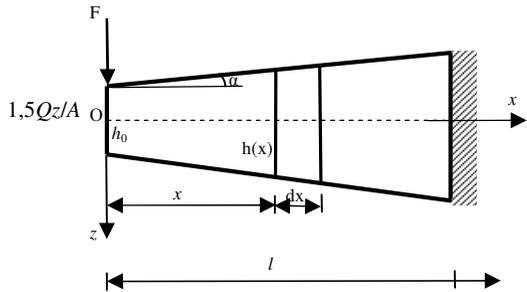


Рисунок 2

Рассмотрим сечение, находящееся на расстоянии  $x$  от свободного края балки. Высота этого поперечного сечения

$$h(x) = h_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Изгибающий момент

$$M(x) = Fx. \quad (3)$$

Выполняя второе сечение на расстоянии  $dx$  справа от названного, рассмотрим часть балки между этими двумя сечениями. Как показано в [2], из условий ее равновесия, в частности суммы проекций сил на ось  $x$ , получается следующее выражение касательного напряжения

$$\tau_{xz} = 3 \frac{M}{bh^2} \frac{dh}{dx} + \frac{6}{b} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{h^3} \right). \quad (4)$$

После дифференцирования функции  $h(x)$ , заданной формулой (2), и использования зависимости (3) находим:

$$\frac{dh}{dx} = 2 \operatorname{tg} \alpha; \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{M}{h^3} \right) = \frac{F(h_0 - 4x \operatorname{tg} \alpha)}{(h_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha)^4}. \quad (6)$$

Тогда, используя зависимости (5) и (6), получаем новый вид формулы (4) для тангенциальных напряжений

$$\tau_{xz} = \frac{6F}{b(h_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha)^2} \left( x \operatorname{tg} \alpha + \frac{h_0 - 4x \operatorname{tg} \alpha}{4} - \frac{h_0 - 4x \operatorname{tg} \alpha}{(h_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha)^2} z^2 \right). \quad (7)$$

**Численный пример.** Рассмотрим балку с длиной  $l = 4$  м и прямоугольным сечением с постоянной шириной по длине балки  $b = 14$  см. Ее высота на свободном конце  $h_0 = 14$  см. Этот размер по длине балки изменяется по линейному закону. Вычислим касательные напряжения при различных значениях угла  $\alpha$  между осью балки и наклоненной боковой линией (см. рисунок 2) для сечений, расположенных на обоих концах балки, ее середине, а также на расстоянии  $l/4$  от концов.

В таблице 1 представлены значения касательных напряжений в центрах тяжести характерных поперечных сечений.

Таблица 1 – Касательные напряжения в центрах тяжести сечений  
В паскалях

Угол наклона	Координаты сечений, м				
	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$\alpha = 0$	1,1905	1,1905	1,1905	1,1905	1,1905
$\alpha = \pi/16$	1,1905	1,1395	1,0918	1,0470	1,0049
$\alpha = \pi/8$	1,1905	1,0880	0,9982	0,9191	0,9401
$\alpha = 3\pi/16$	1,1905	1,0316	0,9025	0,7963	1,7077
$\alpha = \pi/4$	1,1905	0,9643	0,7969	0,6696	0,5706

Видно, что на свободном краю балки ( $x = 0$ ) касательное напряжение одно и то же – не зависит от угла  $\alpha$ . Его значение равно величине этого напряжения в балке с постоянным поперечным сечением ( $\alpha = 0$ ). При увеличении угла  $\alpha$  касательное напряжение уменьшается.

В таблице 2 даны результаты численных исследований для всех рассматриваемых сечений при  $z = h/2$  и  $z = -h/2$ . Из нее видно, что только на свободном конце балки эти напряжения равны нулю, как и в случае балки с постоянным прямоугольным сечением.

Таблица 2 – Касательные напряжения в крайних точках сечений  
В паскалях

Угол наклона	Координаты сечений, м				
	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
$\alpha = 0$	0	0	0	0	0
$\alpha = \pi/16$	0	0,0970	0,1790	0,2483	0,3066
$\alpha = \pi/8$	0	0,1852	0,3153	0,4055	0,4665
$\alpha = 3\pi/16$	0	0,2704	0,4215	0,5009	0,5369
$\alpha = \pi/4$	0	0,3568	0,5006	0,5441	0,5402

**Вывод.** Диаграммы касательных напряжений в балках с поперечным сечением в виде прямоугольника с линейно изменяемой по длине высотой существенно отличаются от аналогичных диаграм для случая постоянного поперечного сечения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Съпротивление на материалите** / С. Кисляков [и др.]. – София: Техника, 1986. – 354 с.

2 **Феодосьев, В. И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / И. Феодосьев. – М., 1967. – 376 с.

*S. V. LILKOVA-MARKOVA*

### **SHEAR STRESSES IN THE BEAM WITH A RECTANGULAR CROSS-SECTION**

On the basis of numerical studies the cost of shearing stresses for beams with constant and variable along the beam length rectangular cross-section has been analyzed.

Получено 18.02.2011

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 531.8

*А. В. ЛОКТИОНОВ, С. А. СЕНЬКОВ*

*Витебский государственный технологический университет, Беларусь*

### **РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Рассмотрено сложное движение эллиптического маятника. Составлены и решены дифференциальные уравнения, описывающие движения ползуна и шарика. В работе принято, что в начальный момент угол отклонения стрелы маятника от вертикали и скорость ползуна равны нулю, угловая скорость вращения стрелы не равна нулю. С учетом принятых начальных условий получены уравнения движения ползуна и малых колебаний маятника.