

S. A. BERESTOVA, E. A. MITYUSHOV, T. A. ROSHCHEVA
TENSOR FORMALISM IN MECHANICS OF RIGID BODY

There is suggested the way of introducing tensor characteristics in Engineering Mechanics teaching when describing the motion of a rigid body with a clear physical content and possibility of using it for recordings of quantitative invariant relations.

Получено 25.05.2011

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 531.1

В. Д. БЕРТЯЕВ, Л. А. БУЛАТОВ, Д. Ю. САЗОНОВ, О. А. ТКАЧ
Тульский государственный университет, Тула

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕНЗОРОВ
ВТОРОГО РАНГА В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Рассмотрен вопрос использования тензоров второго ранга при изучении теоретической механики. Показано, что их применение, не нарушая обычный стиль изложения дисциплин при подготовке студентов инженерных специальностей и направлений подготовки, позволяет существенно сократить громоздкие выводы при изложении теоретического материала и наполнить его понятным физическим смыслом.

Существенное сокращение часов (практически в два раза), отводимых на проведение аудиторных занятий основных теоретических дисциплин, в том числе и на теоретическую механику, приводит к необходимости конспективного изложения теоретического материала. Подобного рода практика приводит к необходимости исключать, при чтении лекций, подробные выводы основных зависимостей и теорем изучаемого курса, что неизбежно ведет к непониманию учащимися излагаемого материала. С другой стороны министерство образования требует повышения фундаментальной подготовки студентов ВПО при дальнейшем сокращении часов аудиторных занятий.

Такого рода противоречий можно избежать частично изменив изложение общетеоретических и общематематических курсов дисциплин. При этом желательно широко использовать векторную и тензорную символику при выводе изучаемых в курсе теорем и положений.

Отметим, что применение тензоров второго ранга в теоретической и аналитической механике хорошо известно [1–3]. В работе [2] эти вопросы подробно и детально обсуждены. Однако при изложении теоретического материала в ней отсутствует единый подход к применению тензорного исчисления в теоретической механике. Так, при изложении кинематики твердого

тела используется матричное исчисление и отсутствует понятие тензора поворота. При рассмотрении динамических величин вводится понятие тензора инерции, но его преобразование к другим координатным системам основывается на теории матриц.

Цель настоящей работы заключается в попытке представления теоретического материала в более строгой в методическом отношении форме. При изложении курса теоретической механики введение понятий единичного тензора и ортогонального тензора поворота в виде диадных произведений векторов координатных базисов, а также тензора инерции позволяет придать основным кинематическим и динамическим соотношениям крайне компактный вид. Кроме того, использование тензорных величин при выводе основных теорем и дифференциальных уравнений позволяет существенно сократить время изложения теоретического материала, а его объем оставить неизменным.

Не останавливаясь подробно на свойствах тензоров 2-го ранга покажем, что их применение позволяет существенно сократить выводы при изложении теоретического материала всего курса теоретической механики. В качестве примера рассмотрим сферическое движение твердого тела.

Кинематика сферического движения. Положение тела, совершающего сферическое движение, можно определить углами Эйлера (рисунок 1): прецессии $\psi(t)$, нутации $\theta(t)$ и собственного вращения $\varphi(t)$.

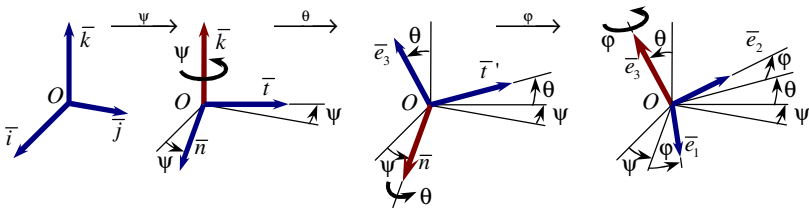


Рисунок 1 – Переход твердого тела из начального положения в конечное

Перевод тела из начального положения в заданное можно осуществить с помощью трех последовательных поворотов

$$(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) \xrightarrow{\psi} (\bar{n}, \bar{i}, \bar{k}) \xrightarrow{\theta} (\bar{n}, \bar{i}', \bar{e}_3) \xrightarrow{\varphi} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3).$$

Первый поворот производится вокруг оси прецессии \bar{k} на угол ψ

$$\tilde{O}_{\bar{k}} = \bar{i} \bar{n} + \bar{j} \bar{i} + \bar{k} \bar{k} = \cos \psi \bar{i} \bar{i} + \sin \psi \bar{i} \bar{j} - \sin \psi \bar{j} \bar{i} + \cos \psi \bar{j} \bar{j} + \bar{k} \bar{k},$$

где $\bar{n} = \cos \psi \bar{i} + \sin \psi \bar{j}$, $\bar{i} = \cos \psi \bar{i} - \sin \psi \bar{j}$.

Второй поворот производится вокруг линии узлов ON (ось нутации, задаваемая единичным вектором \bar{n}) на угол θ

$$\tilde{O}_{\bar{n}} = \bar{n}\bar{n} + \bar{i}\bar{i}' + \bar{k}\bar{e}_3 = \bar{n}\bar{n} + \cos\theta\bar{i}\bar{i}' + \sin\theta\bar{i}\bar{k} - \sin\theta\bar{k}\bar{i}' + \cos\theta\bar{k}\bar{k},$$

где $\bar{i}' = \cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{k}$, $\bar{e}_3 = -\sin\theta\bar{i}' + \cos\theta\bar{k}$.

Третий поворот осуществляется вокруг оси собственного вращения \bar{e}_3 на угол φ

$$\tilde{O}_{\bar{e}_3} = \bar{n}\bar{e}_1 + \bar{i}'\bar{e}_2 + \bar{k}\bar{e}_3 = \cos\varphi\bar{n}\bar{n} + \sin\varphi\bar{n}\bar{i}' - \sin\varphi\bar{i}'\bar{n} + \cos\varphi\bar{i}'\bar{i}' + \bar{e}_3\bar{e}_3,$$

где $\bar{e}_1 = \cos\varphi\bar{n} + \sin\varphi\bar{i}'$, $\bar{e}_2 = -\sin\varphi\bar{n} + \cos\varphi\bar{i}'$.

После третьего поворота тело и оси подвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$, связанные с ним, займут заданное положение. Результирующий поворот можно определить диадным произведением (ортогональным тензором поворота)

$$\tilde{O} = \tilde{O}_{\bar{k}} \cdot \tilde{O}_{\bar{n}} \cdot \tilde{O}_{\bar{e}_3} = \bar{e}_1^0 \bar{e}_1 + \bar{e}_2^0 \bar{e}_2 + \bar{e}_3^0 \bar{e}_3 = \bar{i}\bar{e}_1 + \bar{j}\bar{e}_2 + \bar{k}\bar{e}_3.$$

Положение точки в системе координат, жестко связанной с телом, определяется вектором $\bar{c} = \xi\bar{e}_1 + \eta\bar{e}_2 + \zeta\bar{e}_3$ с помощью тензора поворота

$$\bar{c} = \bar{\rho}^0 \cdot \tilde{O} = \tilde{O}^T \cdot \bar{\rho}^0,$$

где $\bar{\rho}^0 = \xi\bar{e}_1^0 + \eta\bar{e}_2^0 + \zeta\bar{e}_3^0$ – вектор, определяющий начальное положение точки твердого тела.

Скорость точки твердого тела, совершающего сферическое движение,

$$\bar{v} = \dot{\bar{\rho}} = \frac{d}{dt}(\tilde{O}^T \cdot \bar{\rho}^0) = \dot{\bar{e}}_m \bar{e}_m^0 \cdot \bar{\rho}^0 = \bar{\omega} \times \bar{e}_m \bar{e}_m^0 \cdot \bar{\rho}^0 = \bar{\omega} \times \bar{\rho}.$$

Здесь $\bar{\omega}$ – угловая скорость тела, которую можно представить вектором

$$\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k} + \dot{\theta}\bar{n} + \dot{\varphi}\bar{e}_3.$$

Последнее выражение можно проверить непосредственным дифференцированием векторов \bar{e}_m , $m=1,3$.

Компоненты вектора угловой скорости в системе координат $O\xi\eta\zeta$, связанной с телом, и неподвижной можно определить [2] с помощью единичных тензоров $\tilde{E} = \bar{e}_m \bar{e}_m^0$ и $\tilde{E}^0 = \bar{e}_m^0 \bar{e}_m^0 = \bar{i}\bar{i} + \bar{j}\bar{j} + \bar{k}\bar{k}$ для каждой из систем соответственно

$$O\xi\eta\zeta \rightarrow \bar{\omega} = \tilde{E} \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \cdot \tilde{E},$$

$$Oxyz \rightarrow \bar{\omega} = \tilde{E}^0 \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \cdot \tilde{E}^0.$$

В частности, для системы координат $O\xi\eta\zeta$ получим:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega} \cdot \tilde{E} = (\dot{\psi}\bar{k} + \dot{\theta}\bar{n} + \dot{\varphi}\bar{e}_3) \cdot (\bar{e}_1 \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \bar{e}_3) = \\ &= (\dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi) \bar{e}_1 + (\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi) \bar{e}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{e}_3, \end{aligned} \quad (1)$$

а для системы координат $Oxyz$ –

$$\begin{aligned} \overline{\omega} &= \overline{\omega} \cdot \tilde{E}^0 = (\dot{\psi} \bar{k} + \dot{\theta} \bar{n} + \dot{\phi} \bar{e}_3) \cdot (\bar{i} \bar{i} + \bar{j} \bar{j} + \bar{k} \bar{k}) = \\ &= (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta) \bar{i} + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta) \bar{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученные выражения называются кинематическими соотношениями Эйлера.

Момент инерции относительно произвольной оси и тензор инерции.

При вычислении момента инерции механической системы относительно произвольной оси $O\xi$ (рисунок 2), определяемой направляющим вектором

$$\bar{e} = \cos(\alpha) \bar{i} + \cos(\beta) \bar{j} + \cos(\gamma) \bar{k},$$

обычно используют формулу [3–6]:

$$I_{\xi} = \sum_k m_k h_k^2 = \sum_k m_k |\bar{r}_k \times \bar{e}|^2, \quad (3)$$

которую, после несложных, но громоздких преобразований, приводят к виду

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= \cos^2(\alpha) I_x + \cos^2(\beta) I_y + \cos^2(\gamma) I_z - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) I_{xy} - \\ &- 2 \cos(\beta) \cos(\gamma) I_{yz} - 2 \cos(\gamma) \cos(\alpha) I_{zx}. \end{aligned} \quad (4)$$

После этого вводится понятие тензора инерции \tilde{I} , задаваемого матрицей

$$\tilde{I}_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

компоненты которой представляют собой совокупность осевых и центробежных моментов инерции, вычисленных относительно прямоугольных декартовых координат.

При этом переход от соотношения (4) к понятию тензора инерции в виде матрицы \tilde{I} неочевиден и требует дополнительного осмысления.

Рассмотрим теперь вместо соотношения (3) выражение

$$I_{\xi} = \sum_k m_k h_k^2 = \sum_k m_k \bar{h}_k \cdot \bar{h}_k,$$

в котором вектор \bar{h}_k определяется из очевидного равенства $\bar{r}_k = \overline{OO_k} + \bar{h}_k$ (см. рисунок 2), т.е. $\bar{h}_k = \bar{r}_k - \overline{OO_k}$.

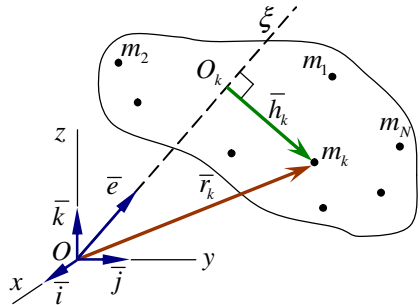


Рисунок 2 – Вычисление момента инерции относительно оси $O\xi$

Вектор $\overline{OO_k} = OO_k \bar{e}$ определим с помощью диадного произведения $\overline{OO_k} = OO_k \bar{e} = \bar{r}_k \cdot \bar{e} \bar{e} = \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{e} = \bar{e} \bar{r}_k \cdot \bar{e}$.

Тогда момент инерции системы относительно оси $O\xi$

$$I_\xi = \sum_k m_k (\bar{r}_k - \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{e}) \cdot (\bar{r}_k - \bar{e} \bar{r}_k \cdot \bar{e}) = \sum_k m_k (r_k^2 - \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{e}).$$

Умножая величину r_k^2 на единицу, выраженную с помощью единичного тензора \tilde{E} ($\tilde{E} = \bar{i}\bar{i} + \bar{j}\bar{j} + \bar{k}\bar{k}$) соотношением $1 = \bar{e} \cdot \tilde{E} \cdot \bar{e}$, получим

$$I_\xi = \sum_k m_k (\bar{r}_k^2 \bar{e} \cdot \tilde{E} \cdot \bar{e} - \bar{e} \cdot \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{e}) = \bar{e} \cdot \tilde{I}_O \cdot \bar{e}, \quad (6)$$

где $\tilde{I}_O = \sum_k m_k (r_k^2 \cdot \tilde{E} - \bar{r}_k \bar{r}_k)$ – тензор инерции механической системы, вы-

численный в точке O , который в развернутой форме можно записать в виде

$$\tilde{I}_O = I_{xx} \bar{i}\bar{i} - I_{xy} \bar{i}\bar{j} - I_{xz} \bar{i}\bar{k} - I_{yx} \bar{j}\bar{i} + I_{yy} \bar{j}\bar{j} - I_{yz} \bar{j}\bar{k} - I_{zx} \bar{k}\bar{i} - I_{zz} \bar{k}\bar{k}$$

или представить матрицей (5).

Для сплошного твердого тела тензор инерции запишется в виде

$$\tilde{I}_O = \int (r^2 \tilde{E} - \bar{r} \bar{r}) dm. \quad (7)$$

Тензор инерции \tilde{I}_O является симметричным тензором $\tilde{I}_O = \tilde{I}_O^T$.

Тензор инерции удобно задавать в осях подвижного базиса, жестко связанного с твердым телом. В этом случае его компоненты являются постоянными величинами, и переход из основного базиса к повернутому можно осуществить с помощью соотношения

$$\bar{I}' = \bar{O}^T \cdot \tilde{I} \cdot \bar{O}.$$

Кинетический момент твердых тел.

Рассмотрим выражения для кинетического момента твердых тел, совершающих различные виды движения.

Сферическое движение

При вращении твердого тела вокруг неподвижного центра (рисунок 3) скорости его точек определяются формулой Эйлера $\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k$. Кинетический момент тела

$$\bar{K}_O = \sum_k \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_k m_k \bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k).$$

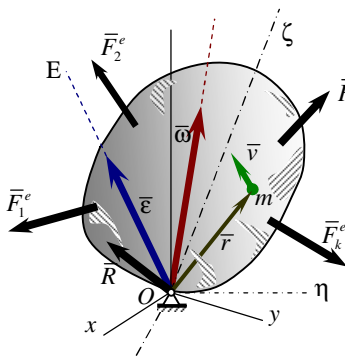


Рисунок 3 – Сферическое движение твердого тела

Учитывая, что двойное векторное произведение трех векторов \bar{a}, \bar{b} и \bar{c} можно представить в виде

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}),$$

получим

$$\bar{K}_O = \sum_k m_k (\bar{r}_k \cdot \bar{r}_k \bar{\omega} - \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{\omega}) = \sum_k m_k (r_k^2 \tilde{E} \cdot \bar{\omega} - \bar{r}_k \bar{r}_k \cdot \bar{\omega}).$$

Окончательно

$$\bar{K}_O = \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega} \quad (8)$$

Вращательное движение вокруг неподвижной оси

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси (например оси Oz), кинетический момент тела ($\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}$)

$$\bar{K}_O = \sum_k m_k (r^2 \tilde{E} - \bar{r}_k \bar{r}_k) \cdot \bar{k} \omega_z = \sum_k m_k (r^2 \bar{k} - \bar{r}_k z_k) \omega_z = I_z \omega_z \bar{k} - I_{zy} \omega_z \bar{j} - I_{zx} \omega_z \bar{i}.$$

В том случае, когда ось вращения является главной осью, центробежные моменты инерции равны нулю, и кинетический момент

$$\bar{K}_O = I_z \omega_z \bar{k}.$$

Произвольное движение

Движение свободного твердого тела можно разложить на переносное движение – поступательное вместе с центром масс и относительное – сферическое вокруг центра масс.

Тогда положение \bar{r}_k и скорость \bar{v}_k произвольной точки свободного тела можно записать в виде (рисунок 4)

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= \bar{r}_C + \bar{\rho}_k, \\ \bar{v}_k &= \bar{v}_C + \bar{v}'_k = \bar{v}_C + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь учтено, что расстояние между точками твердого тела неизменно ($\rho_k = \text{const}$), локальная производная $\frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = 0$ и $\frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_k$.

Кинетический момент в этом случае

$$\bar{K}_O = \sum_k \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_k (\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times m_k (\bar{v}_C + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_k) = \bar{r}_C \times m \bar{v}_C + \sum_k m_k \bar{\rho}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_k).$$

Окончательно получим:

$$\bar{K}_O = \bar{r}_C \times m \bar{v}_C + \tilde{I}_C \cdot \bar{\omega}. \quad (10)$$

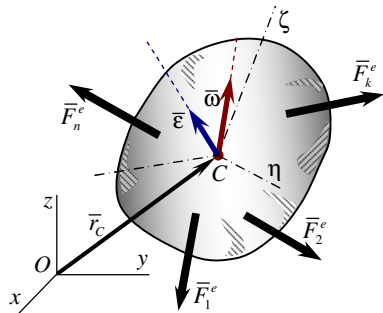


Рисунок 4 – Свободное движение твердого тела

Здесь $\tilde{I}_C = \sum m_k (\rho_k^2 \tilde{E} - \bar{\rho}_k \bar{\rho}_k) = \int (\rho^2 \tilde{E} - \bar{\rho} \bar{\rho}) dm$ – тензор инерции твер-

дого тела, вычисленный относительно центра масс C в подвижных осях $C\xi\eta\zeta$, жестко связанных с твердым телом.

Динамика твердого тела. Дифференциальные уравнения различных видов движений твердого тела можно получить из соответствующих теорем динамики.

Сферическое движение твердого тела

Для составления дифференциальных уравнений сферического движения запишем теорему об изменении кинетического момента в дифференциальной форме

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_k \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e$$

и согласно выражению (8) получим

$$\tilde{I}_O \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega} = \sum_k \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e .$$

Поскольку рассматривается движение абсолютно твердого тела $r = \text{const}$, то производную по времени от тензора инерции можно записать в виде $\dot{\tilde{I}}_O = \bar{\omega} \times \tilde{I}_O - \tilde{I}_O \times \bar{\omega}$. Соответственно $\dot{\tilde{I}}_O \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega} - (\tilde{I}_O \times \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} = \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega}$, так как $(\tilde{I}_O \times \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} = 0$. Окончательно уравнения сферического движения твердого тела примут вид

$$\tilde{I}_O \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \tilde{I}_O \cdot \bar{\omega} = \sum_k \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e = \bar{M}_O^e . \quad (11)$$

Для получения дифференциальных уравнений движения в наиболее простом виде возьмем в качестве координатных осей подвижные главные оси инерции $O\xi\eta\zeta$, жестко связанные с телом. Тогда тензор инерции и вектор угловой скорости

$$\tilde{I} = I_\xi \bar{e}_1 \bar{e}_1 + I_\eta \bar{e}_2 \bar{e}_2 + I_\zeta \bar{e}_3 \bar{e}_3 , \quad \bar{\omega} = \omega_\xi \bar{e}_1 + \omega_\eta \bar{e}_2 + \omega_\zeta \bar{e}_3$$

и уравнения движения (динамические уравнения Эйлера) примут вид:

$$I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta (I_\zeta - I_\eta) = M_\xi^e ,$$

$$I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta \omega_\xi (I_\xi - I_\zeta) = M_\eta^e ,$$

$$I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\xi \omega_\eta (I_\eta - I_\xi) = M_\zeta^e .$$

Для получения замкнутой системы уравнений к динамическим уравнениям Эйлера следует присоединить кинематические уравнения Эйлера (1).

Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Уравнения вращательного движения вокруг неподвижной оси на основании (11) запишутся в виде ($\bar{\omega} = \bar{\omega}_z \bar{k}$).

Раскладывая выражения тензора инерции и вектора угловой скорости по базису неподвижной системы координат Ox_1z_1 , получим

$$\begin{aligned} -I_{xy}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 &= M_x^e, \\ -I_{yz}\dot{\omega}_z + I_{zx}\omega_z^2 &= M_y^e, \\ I_z\dot{\omega}_z &= M_z^e. \end{aligned} \quad (12)$$

В системе координат, жестко связанной с твердым телом так, что ось вращения совпадает, например, с осью \bar{e}_3 ($\omega = \omega_z \bar{k} = \omega_z \bar{e}_3$) эти уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} -I_{\xi\eta}\dot{\omega}_\zeta + I_{\eta\xi}\omega_\zeta^2 &= M_\xi^e, \\ -I_{\eta\xi}\dot{\omega}_\zeta + I_{\zeta\xi}\omega_\zeta^2 &= M_\eta^e, \\ I_\zeta\dot{\omega}_\zeta &= M_\zeta^e. \end{aligned} \quad (13)$$

Следует отметить, что, несмотря на то, что системы уравнений (12) и (13) по структуре совпадают, в уравнении (12) моменты инерции являются функциями времени, а в уравнениях (13) – нет. Первые два уравнения этих систем содержат неизвестные реакции, а последнее неизвестное угловое ускорение. Таким образом, уравнение

$$I_z\dot{\omega}_z = M_z^e \quad \text{или} \quad I_\zeta\dot{\omega}_\zeta = M_\zeta^e$$

является дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, т.к. оси Oz и $O\xi$ совпадают.

Свободное движение твердого тела

Дифференциальные уравнения свободного движения твердого тела получим из теоремы об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра

$$\dot{\bar{K}}_O = \sum_k \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e.$$

Подставив соотношения (9) и (10), получим

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_C \times m\bar{v}_C + \tilde{I}_C \cdot \bar{\omega}) = \sum (\bar{r}_C + \bar{\rho}_k) \times \bar{F}_k^e$$

или в развернутой форме

$$\dot{\bar{r}}_C \times m\bar{v}_C + \bar{r}_C \times m\dot{\bar{v}}_C + \underline{\underline{I_C \cdot \dot{\bar{\omega}}}} + \underline{\underline{\tilde{I}_C \cdot \bar{\omega}}} = \underline{\underline{\bar{r}_C \times \sum_k F_k^e}} + \underline{\underline{\sum_k \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e}}.$$

Здесь $\dot{\vec{r}}_C \times m\vec{v}_C = 0$ и слагаемые, подчеркнутые одной чертой, выражают теорему об изменении количества движения

$$m\dot{\vec{v}}_C = \sum_k \underline{\vec{F}}_k^e, \quad (14)$$

а двумя чертами теорему об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс

$$\tilde{I}_C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \sum_k \underline{\vec{p}}_k \times \underline{\vec{F}}_k^e. \quad (15)$$

Совмещая оси подвижной системы координат с главными осями инерции $C\xi\eta\zeta$ и записывая данные теоремы в проекциях на оси подвижной и неподвижной системы, получим шесть дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^e, & I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta (I_\zeta - I_\eta) &= \sum M_{C\xi}(\underline{\vec{F}}_k^e), \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^e, & I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta \omega_\xi (I_\xi - I_\zeta) &= \sum M_{C\eta}(\underline{\vec{F}}_k^e), \\ m\ddot{z}_C &= \sum F_{kz}^e, & I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\xi \omega_\eta (I_\eta - I_\xi) &= \sum M_{C\zeta}(\underline{\vec{F}}_k^e). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя уравнения (14), (15) или (16), можно легко получить дифференциальные уравнения поступательного и плоского движений твердого тела, как частный случай произвольного движения.

Поступательное движение

При поступательном движении твердого тела его угловая скорость равна нулю. Тогда на основании тождеств $m\dot{\vec{v}}_C = m\ddot{\vec{r}}_C$ и (14) получим

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \sum_k \underline{\vec{F}}_k^e.$$

В проекциях на оси координат будем иметь

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e.$$

Плоское движение

При плоском движении твердого тела $z_C = \text{const}$, а угловая скорость равна $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_3 = \omega_z \vec{k}$. Уравнения (16) примут вид дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad I_{Cz} \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_k M_{Cz}(\underline{\vec{F}}_k^e).$$

Таким образом, соотношения, описывающие различные движения тела в тензорной форме, получены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Френкель, Я. И.** Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа / Я. И. Френкель. – М. – Л.: ГИФМЛ, 1940. – 436 с.
- 2 **Лурье, А. И.** Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.: ил.
- 3 **Кильчевский, Н. А.** Курс теоретической механики: учеб. 2 т. / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977.– Т. 1, 2.
- 4 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики: учеб. пособие для студ. вузов по техн. спец. В 2 т./ Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. –5-е изд., испр. – СПб.: Лань, 1998. – 729 с.
- 5 Курс теоретической механики: Учеб. для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов в области техники и технологии / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин [и др.]; под ред. К. С. Колесникова. – 3-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 735 с.
- 6 **Маркеев, А. П.** Теоретическая механика: учеб. пособие для студ. ун-тов / А. П. Маркеев. – М.: Наука, 1990. – 416 с.: ил.

V. D. BERTYAEV, L. A. BULATOV, D. Y. SAZONOV, O. A. TKACH
**SECOND-RANK TENSORS IN ENGINEERING MECHANICS:
METHODOICAL AVAILABILITY**

The usage of second-rank tensors in the study of engineering mechanics is being considered. It is shown that their application does not break usual style of a discipline teaching while training the students of engineering specialities. It allows significant decreasing of cumbersome conclusions when presenting the theoretical material and filling it with clear physical meaning.

Получено 19.04.2010

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 800:37.022

Е. В. ДАНИЛОВА, Л. П. НАЗАРОВА

*Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия*

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В АЭРОКОСМИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Рассмотрены подходы, используемые на кафедре технической механики Сибирского государственного аэрокосмического университета, с целью адаптации курса теоретической механики к современным Государственным программам. Описана также методика практического применения кредитно-модульной системы.