

УДК 539.3

*С. С. ЩЕРБАКОВ, И. Н. ПАВЛОВСКИЙ, Д. Е. МАРМЫШ, Л. Ю. ШЕМЕТ,  
О. А. НАСАНЬ*

*Белорусский государственный университет, Минск*

## **КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПАСНЫХ ОБЪЕМОВ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ КОНТАКТНЫХ И НЕКОНТАКТНЫХ НАГРУЗОК**

Представлено применение модели деформируемого твердого тела с опасным объемом для моделирования поврежденности в трибофатической системе. Приведен сравнительный анализ результатов конечно-элементного моделирования поврежденности в окрестности контактного взаимодействия при одновременном растяжении или сжатии одного из элементов контактной пары. Величины опасных объемов были рассчитаны суммированием объемов конечных элементов, в которых среднее значение интенсивности напряжений превышает предел контактной усталости.

**Введение.** При решении ряда практически важных задач контактного взаимодействия применительно, например, к зубчатым колесам, системе колесо – рельс и др., возникает необходимость комплексного анализа как поверхностного деформирования и повреждения в локальной области контакта, так и объемного деформирования и повреждения от изгибной нагрузки.

Исследование поврежденности при взаимодействии элементов указанных трибофатических систем в общем случае основывается на статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [1]. В рамках данной модели опасные объемы представляют собой трехмерные области, где напряжения достигают повреждающего уровня – нижней границы рассеивания предела выносливости.

**Модель деформируемого твердого тела с опасным объемом.** Процедура расчета опасных объемов предполагает знание трехмерного напряженно-деформированного состояния элементов трибофатической системы, вызванного как локальным контактным, так и объемным нагружением, а также предельного состояния данной системы [2–4].

Предел выносливости для силовой системы определяется по каждой компоненте тензора напряжений как экстремальное значение ее распределения при действии предельной нагрузки.

Поскольку опасные объемы являются мерой поврежденности деформируемых тел, то, анализируя их, можно указать конкретные области (зоны), в которых возможно зарождение и развитие как поверхностных, так и внутренних трещин. Очевидно, что действие необратимых повреждений реализу-

ется там, где соответствующие опасные объемы пересекаются (т. е. накладываются друг на друга) или совмещаются друг с другом.

Рассмотрим тензор механического параметра  $\varphi_{ij}$ , конкретизациями которого являются тензоры напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . Для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим предельные нормальные и касательные значения  $\varphi_n^{(*\text{lim})}$  и  $\varphi_\tau^{(*\text{lim})}$  тензора  $\varphi_{ij}^{(\pm*\text{lim})}$ , а также предельное главное значение тензора  $\varphi_1^{(*\text{lim})}$  и предельную интенсивность  $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_n^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i} \left( \left| \varphi_{ii}(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i = x, y, z, \\ \varphi_\tau^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i,j} \left( \left| \varphi_{ij}(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j, \\ \varphi_1^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} \left( \left| \varphi_1(F_{*\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})} = \max_{dV} \left[ \varphi_{\text{int}}(F_{*\text{lim}}, dV) \right],\end{aligned}\quad (1)$$

где  $dV$  – элементарный объем нагруженного тела.

Следовательно, если рассмотреть тензор  $\varphi_{ij}$  в каждом элементарном объеме  $dV$  тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных напряжений можно ввести три типа относительных повреждающих напряжений [2, 4]: компонентные, главные и октаэдрические:

$$\Psi_{ij} = \left| \varphi_{ij} / \varphi_m^{(*\text{lim})} \right|, \quad \Psi_i = \left| \varphi_i / \varphi_1^{(*\text{lim})} \right|, \quad \Psi_{\text{int}} = \varphi_{\text{int}} / \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, \quad (2)$$

где  $\Psi_{ij}$ ,  $\Psi_i$ ,  $\Psi_{\text{int}}$ , вообще говоря, имеют вероятностную природу, поскольку в условиях прочности как действующие напряжения  $\varphi_{ij}$ ,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_{\text{int}}$ , так и предельные значения  $\varphi_k^{(*\text{lim})}$ ,  $\varphi_i^{(*\text{lim})}$ ,  $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$  являются случайными величинами с соответствующими плотностями распределения.

Условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned}V_{ij} &= \left\{ dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, \quad i, j = x, y, z, \\ m &= \begin{cases} n & \text{при } i = j, \\ \tau & \text{при } i \neq j, \end{cases} \\ V_i &= \left\{ dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ V_{\text{int}} &= \left\{ dV / \varphi_{\text{int}} \geq \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\},\end{aligned}\quad (3)$$

где  $V_k$  – рабочий объем нагруженного тела.

**Конечно-элементное моделирование поврежденности.** Поскольку опасные объемы могут иметь произвольную и сложную форму, то их аналитическое определение, согласно формулам (1)–(3), может быть затруднено; в таких случаях их вычисляют методом Монте-Карло [1–3].

В практических приложениях большое значение имеет определение поврежденности на основании конечно-элементного моделирования напряженно-деформированного состояния.

Рассмотрим моделирование поврежденности для большого количества конечных элементов в окрестности контакта при компьютерном моделировании применительно к системе индентор/полупространство, представленной на рисунке 1.

Главные радиусы кривизны системы индентор/упругое полупространство были выбраны следующие:  $R_{11} = 0,003$  м,  $R_{12} = 0,008$  м,  $R_{21} = \infty, R_{12} = \infty$ .

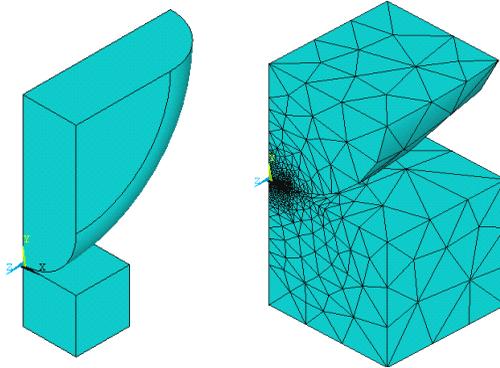


Рисунок 1 – Расчетная схема и конечноэлементное разбиение системы индентор/упругое полупространство

Величина контактной нагрузки  $F_N = 1200$  Н, свойства материала  $E_1 = E_2 = 2,01 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0,3$ . Для данной нагрузки и геометрических характеристик величины большей и меньшей полуосей составляют  $a = 4,67 \cdot 10^{-4}$  м,  $b = 2,44 \cdot 10^{-4}$  м ( $b/a = 0,52$ ). В модели на рисунке 1 полуось  $a$  сонаправлена с координатной осью  $z$ .

Полупространство также нагружено равномерно распределенными растягивающими или сжимающими нормальными напряжениями в направлении  $x$   $\sigma_{xx}^{(b)}$  так, что в окрестности контакта имеет место следующее соотношение [1–3]:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(c)} + \sigma_{xx}^{(b)}, \quad (4)$$

где верхний индекс  $c$  соответствует напряжениям, вызванным чисто контактным взаимодействием, а  $b$  напряжениям, вызванным неконтактным растяжением-сжатием.

К верхней плоскости индентора была приложена контактная нагрузка  $F_N$  а к торцу куба, моделирующего полупространство напряжения  $\sigma_{xx}^{(b)} = -500, \dots, -200, 0, 200, \dots, 500$  МПа. Расчет проводился для четверти исходной модели с учетом условий симметрии.

Погрешность результатов конечно-элементного моделирования оценивалась с помощью формулы

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{yy}^{(A)}}{\sigma_{yy,\max}^{(A)}},$$

где верхний индекс  $A$  означает аналитическое решение для  $\sigma_{yy}$  [5].

Средняя величина погрешности вдоль оси  $y$  составила  $4,050 \cdot 10^{-3}$ , а максимальная  $1,744 \cdot 10^{-2}$ , что говорит о высокой точности конечно-элементного моделирования.

Наличие неконтактной нагрузки обуславливает значительное изменение напряженно-деформированного состояния окрестности контакта, рассчитанного в соответствии с (4). На рисунке 2 показаны особенности изменения перемещений и нормальных напряжений вдоль вертикальной оси  $y$ , проходящей через центр контакта.

Из рисунка 2 видно, что область контакта за счет поперечной утяжки опускается при действии растягивающих неконтактных напряжений, и поднимается при действии сжимающих.

Также отчетливо видно изменение напряжений  $\sigma_{xx}$ , что объясняется приложением неконтактной нагрузки вдоль оси  $x$ . При этом в кубе сжимающие напряжение  $\sigma_{xx}$  изменяются в соответствии с (1), а в инденторе  $\sigma_{xx}^{(c)}$  определяются только контактным взаимодействием.

Анализ поврежденности системы проводился на основе модели деформируемого твердого тела с опасным объемом для нижней границы рассеивания предела выносливости при контактной усталости, характеризуемой в соответствии с (1) величиной  $p_f = 888$  МПа.

Для реализации расчета опасных объемов была создана программа с помощью встроенного в ANSYS языка APDL. Принцип работы программы заключается в следующем [6]. После проведения расчета для  $i$ -го конечного элемента имеются значения средних напряжений и деформаций. Эти значения переносятся в массив, который используется в дальнейших вычислениях значений поврежденности, как отношений действующих и предельных напряжений в соответствии с (2):

$$\Psi^i = \sigma_{xx}^i / p_f.$$

Величины объемов элементов, для которых выполняется условие

$$\Psi^i \geq 1,$$

суммируются для получения значения опасного объема  $V_{int}$  для всей расчетной модели.

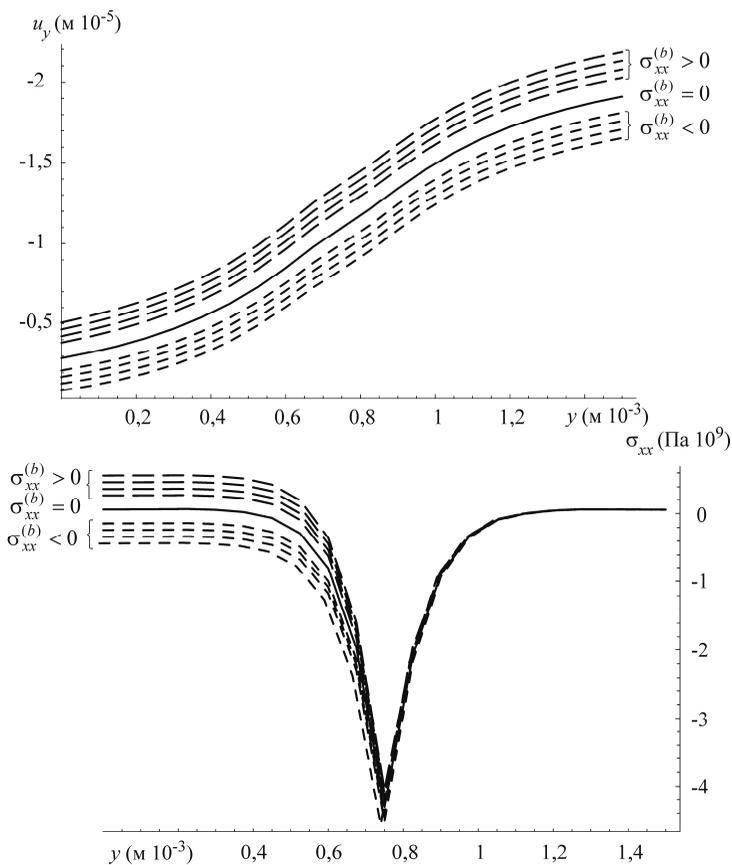


Рисунок 2 – Изменение перемещений  $u_y$  и напряжений  $\sigma_{xx}$  под действием неконтактной нагрузки

После выполнения программы была получена визуализация четвертей опасных объемов с распределениями поврежденности в контактирующих телах.

Из рисунка 3 видно, что в случае контактного взаимодействия для  $F_N = 1200$  Н при приложении к нижнему телу сжимающей неконтактной нагрузки ( $\sigma_{xx}^{(b)} = -500$  МПа) его опасный объем  $V_{xx}^{(n-b)}$  по сравнению  $V_{xx}^{(n)}$  увеличился более чем в 3 раза, а максимальная локальная поврежденность  $g_{xx}$  увеличилась примерно на 7 %.

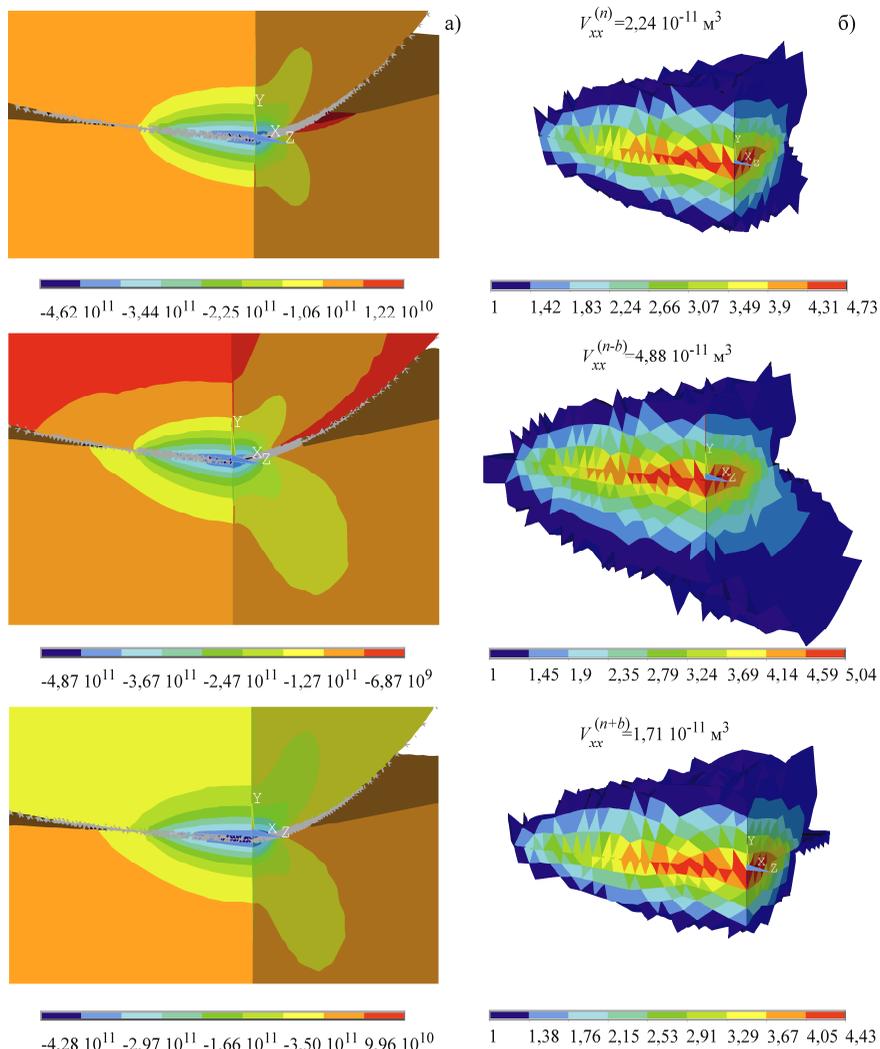


Рисунок 3 – Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  (a), опасные объемы и распределение локальной поврежденности  $g_{xx}$  (б)

При приложении к нижнему телу растягивающей нагрузки ( $\sigma_{xx}^{(b)} = +500 \text{ МПа}$ ) опасный объем  $V_{xx}^{(n+b)}$  по сравнению  $V_{xx}^{(n)}$  уменьшился примерно на 25 %, а максимальная локальная поврежденность  $g_{xx}$  уменьшилась примерно на 7 %.

Следует отметить, что выбор предельного критерия и эквивалентных напряжений зависит от вида взаимодействия: для трения скольжения, при котором имеют место большие касательные напряжения на поверхности, имеет смысл оценивать поврежденность по  $V_1$  или по компонентному опасному объему в направлении трения. В случае трения качения, когда коэффициент трения весьма мал и зона интенсивного трещинообразования находится под поверхностью, более эффективной может быть оценка поврежденности именно по  $V_{int}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Сосновский, Л. А.** Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.

2 **Журавков, М. А.** Анализ поврежденности силовой системы с помощью модели деформируемого твердого тела с опасным объемом / М. А. Журавков, С. С. Щербаков // Весці НАНБ. – 2010. – № 4. – С 40–43. – (Сер. фіз.-тэхн. навук).

3 **Щербаков, С. С.** Контактная задача. Анализ опасных объемов / С. С. Щербаков // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. прац. – 2009. – Вип.13. – С. 279–285.

4 **Щербаков, С. С.** Напряженно-деформированное состояние системы диск-цилиндр в условиях контактного взаимодействия и изгиба цилиндра / С. С. Щербаков // Весці НАНБ. – 2010. – № 3. – С. 29–34. – (Сер. фіз.-тэхн. навук).

5 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

6 **Павловский, И. Н.** Компьютерное моделирование поврежденности трибофатической системы с помощью модели деформируемого твердого тела с опасным объемом / И. Н. Павловский, С. С. Щербаков // Тр. VI Международ. симпозиума по трибофатике, 25 октября – 1 ноября 2010 г., Минск (Беларусь). – Минск: БГУ, 2010. – Т. 2. – С. 393–398.

*S. S. SHCHERBAKOV, I. N. PAVLOVSKY, D. E. MARMYSH, L. Y. SHEMET,  
O. A. NASAN*

#### **FINITE-ELEMENT MODELLING OF DANGEROUS VOLUMES UNDER THE SIMULTANEOUS ACTION OF CONTACT AND NONCONTACT LOADS**

The application of the model of deformed solid body with a dangerous volume for damage modelling in tribological system is presented. There is given the comparative analysis of the results for finite-element modelling of damage in the vicinity of contact interaction simultaneously stretching or compressing one of the elements of a contact pair. The values of dangerous volumes were calculated by summing up the volumes of finite elements where the average value of stress intensity exceeds the contact fatigue limit.

Получено 27.05.2011