

K. Y. FROLOV, Y. A. DAVIDENKO, A. N. CHEREVKO

BALL DOWEL: THE INFLUENCE OF THE GROOVE DEPTH AT THE SECTION MODULUS OF THE UNBALANCED SHAFT

The theme of this work is the study of the dynamics of the unbalanced vibratory-driven machines. In this particular paper the results of the analytical studies of the unbalanced shafts – essential and very important part of the unbalanced driven machines – are given. This article specifies the algorithm for determining such a significant and previously uninvestigated dynamic parameter as a modulus of section, notably the functional dependence of the modulus of section of the unbalanced shaft with grooves for ball dowels on the shaft radius, ball dowel radius and depth of the ball dowel groove.

Получено 20.09.2010

ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011

УДК 534.12

М. ХАЛЕЦКИ

Варшавский университет естественных наук – SGGW, кафедра
гражданского строительства, Польша

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛИТ

В работе рассмотрены собственные колебания неоднородной плиты – определены их частоты и формы. Плита периодически неоднородная. В работе использована методика TAT (англ. *tolerance averaging technique*) и уравнения Эйлера-Лагранжа.

1 Описание системы. Рассматриваем плиту размером $L_1 \times L_2$, имеющую толщину g (рисунок 1):

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Pi = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (-g/2, g/2).$$

Плита разделена на $n_1 \times n_2$ областей размерами $l_1 \times l_2$. У каждой такой области свойства одинаковы, одна из них обозначена на рисунке 1. Если определим множество

$$\Pi_0 = (l_1/2, L_1 - l_1/2) \times (l_2/2, L_2 - l_2/2),$$

то для каждого $(x_1, x_2) \in \Pi_0$, можем математически описать эту область следующим образом:

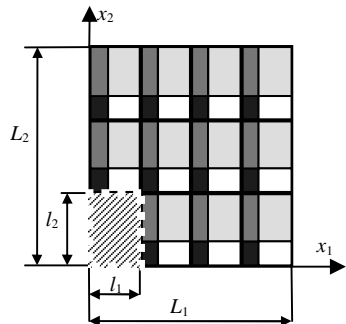


Рисунок 1 – Периодически неоднородная плита

$$\Delta(x_1, x_2) = \left(x_1 - \frac{l_1}{2}, x_1 + \frac{l_1}{2} \right) \times \left(x_2 - \frac{l_2}{2}, x_2 + \frac{l_2}{2} \right)$$

(принимая, что $l_\alpha \ll L_\alpha$, $\alpha = 1, 2$). Поскольку благодаря таким областям свойства плиты повторяются периодически, их назовем ячейкой периодичности (англ. *periodic cell*). Как видно, множество Π_0 определяется для того, чтобы исключить возможность так выбрать координаты (x_1, x_2) , чтобы координаты любой точки ячейки периодичности вышли за плиту.

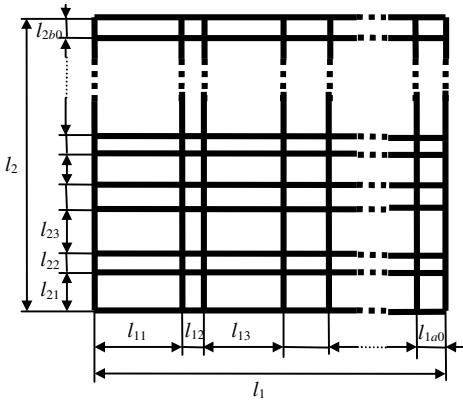


Рисунок 2 – Ячейка периодичности

Затем примем, что ячейка периодичности с центром $(l_1/2, l_2/2)$ состоит из $a_0 \times b_0$ одинаковых однородных компонентов Δ_{ab} , $a = 1, 2, \dots, a_0$, $b = 1, 2, \dots, b_0$, каждый из которых – отдельный прямоугольник размерами $l_{1a} \times l_{2b}$, причем

$$l_1 = \sum_{a=1}^{a_0} l_{1a}, \quad l_2 = \sum_{b=1}^{b_0} l_{2b}, \quad \Pi = \bigcup_{a,b} \Delta_{ab}$$

(рисунок 2).

Если хотя бы два компонента в такой ячейке сделаны из двух разных материалов, такую среду называем многокомпонентной.

2 Уравнения движения. Согласно теории упругости уравнения движения рассматриваемого анизотропного и неоднородного тела имеют форму:

$$(B_{klmn} w_{m,n})_{,l} = \rho \ddot{w},$$

где $B_{klmn} = B_{klmn}(x_1, x_2, x_3)$ – модули упругости (материальные функции – элементы матрицы упругости), $w_k = w_k(x_1, x_2, x_3, t)$ – перемещения, $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ – плотность; кроме того $k, l, m, n = 1, 2, 3$, также использованы обозначения

$$f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \ddot{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

В изотропном случае

$$B_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}),$$

где λ, μ – параметры Ламе: $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$,

δ_{kl} – дельта Кронекера.

Принимаем плоскую неоднородность, т.е. $B_{klmn} = B_{klmn}(x_1, x_2)$, $\rho = \rho(x_1, x_2)$.

Теперь определяем жёсткости плит:

$$C_{\alpha\beta\delta\gamma} = \int_{-g/2}^{g/2} \left(B_{\alpha\beta\delta\gamma} - \frac{B_{\alpha\beta 33} B_{\delta\gamma 33}}{B_{3333}} \right) (x_3)^2 dx_3.$$

В изотропном случае жёсткости не равны нулю:

$$C_{1111} = C_{2222} = \frac{g^3}{12} \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right), \quad C_{1122} = C_{2211} = \frac{g^3}{12} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right),$$

$$C_{1212} = C_{2112} = C_{1221} = C_{2121} = \frac{g^3}{12} \mu.$$

Плотность ρ и жёсткости плит $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ для таких тел – скачкообразно изменяющиеся переменные и принимают разные постоянные значения на компонентах Δ_{ab} :

$$\rho = \rho(x_1, x_2)_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ab}} = \rho^{ab}, \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2)_{(x_1, x_2) \in \Delta_{ab}} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab},$$

где ρ^{ab} , $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ab}$ – постоянны для всех комбинаций индексов.

Для многокомпонентных плит мы составим расчётную модель, пользуясь методом, который по-английски называют *tolerance averaging technique* (сокращенно ТАТ). Его автор – Чеслав Возняк (*Czesław Woźniak*, [1, 2]). Этот метод опирается на положение, что разыскиваемую величину (в нашем случае прогиб плиты) можем представить как сумму

$$w(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) + h^A(x_1, x_2)v^A(x_1, x_2), \quad (1)$$

где u – среднее значение этой величины (средний прогиб); v – флуктуация, которая характеризует изменения относительно среднего значения величины w ; h – функция формы (анг. *shape function*); $A = 1, 2, \dots, n$, n – количество функций формы (принято соглашение Эйнштейна).

Функции u и v – неизвестны (надо их подсчитать) и т. н. медленно переменны (анг. *slowly varying*). Медленнопеременность обозначает, что в пределах ячейки периодичности разности между значениями функции (включая значения производных до определённого порядка) малы в границах принятого нами допуска. Зато функция формы должна быть известна – её надо принять в соответствии с рассматриваемыми свойствами системы и характером физического явления. Кроме того, в пределах ячейки периодичности она должна быть периодическая (периодически переменная) и осциллирующая (значение интеграла от этой функции в области ячейки периодичности должно быть равно нулю).

Начиная создание модели, выпишем выражение, определяющее энергию явления – здесь это лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \rho(\dot{w})^2 - \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\alpha\beta} w_{,\gamma\delta} + pw. \quad (2)$$

Вводим в него перемещения в виде (1) и получаем:

$$L = \frac{1}{2}\rho(\dot{u})^2 - \frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(u_{,\alpha\beta} + h_{,\alpha\beta}^A v^A + h^A v_{,\alpha\beta}^A\right)\left(u_{,\gamma\delta} + h_{,\gamma\delta}^A v^A + h^A v_{,\gamma\delta}^A\right) + \rho\left(u + h^A v^A\right).$$

Теперь усредняем значение полученного в результате подстановки лагранжиана. Оператор усреднения имеет вид

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f(x_1, x_2) d\Delta. \quad (3)$$

Если f – медленно изменяющаяся переменная функция (включая соответствующие производные), а g – любая, то имеем $\langle fg \rangle = f \langle g \rangle$. Поскольку функция формы осциллирующая, $\langle h \rangle = 0$ и все члены $\langle hv \rangle$ и $\langle h v_{,\alpha\beta} \rangle$ будут равны нулю. Поэтому, среднее значение лагранжиана имеет вид

$$\langle L \rangle = \frac{1}{2}\langle \rho \rangle (\dot{u})^2 - \frac{1}{2}\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle u_{,\alpha\beta} u_{,\gamma\delta} - \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle u_{,\alpha\beta} v^A - \frac{1}{2}\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle v^A v^B + \langle \rho \rangle u. \quad (4)$$

Затем применяем к этой формуле уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial u_{,\alpha\beta}} \right)_{,\gamma\delta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial u} = 0; \\ \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial v^A} = 0 \end{array} \right.$$

и получаем уравнения движения многокомпонентной плиты [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \rho \rangle \ddot{u} + \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle v_{,\alpha\beta}^A = \langle p \rangle \\ \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle v^B + \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle u_{,\alpha\beta} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

3. Анализ. Поскольку $A = 1, 2, \dots, n$, то в системе (5) находится в действительности $n + 1$ уравнений, где n – количество функций формы. Из уравнений (5) находим флуктуацию, учитывая, что $\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle$ и $\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle$ это матрицы:

$$v^B = - \left(\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle \right)^{-1} \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle u_{,\alpha\beta}$$

и подставляем в (5)₁:

$$\langle \rho \rangle \ddot{u} + \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle u_{,\alpha\beta\gamma\delta} - \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^B \rangle \left(\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle \right)^{-1} \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle u_{,\alpha\beta} = \langle p \rangle.$$

Принимая обозначение

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{eff} = \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle - \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^B \rangle \left(\langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha\beta}^A h_{,\gamma\delta}^B \rangle \right)^{-1} \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma\delta}^A \rangle,$$

получим уравнение очень похожее на классическое уравнение колебаний однородной плиты:

$$\langle \rho \rangle \ddot{u} + C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{eff} u_{,\alpha\beta\gamma\delta} = \langle p \rangle. \quad (6)$$

Сначала примем $n = 2$ и вид ячейки периодичности, как на рисунке 3 («шахматная доска», [5]). В такой ячейке присутствуют четыре разных материала, но возможны несколько модификаций. Тогда уравнения (5) и флуктуации принимают вид:

$$\begin{cases} \langle \rho \rangle \ddot{u} + \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \langle C_{\alpha\beta 11} h_{,11}^1 \rangle v_{,\alpha\beta}^1 + \langle C_{\alpha\beta 22} h_{,22}^2 \rangle v_{,\alpha\beta}^2 = p, \\ \langle C_{1111} (h_{,11}^1)^2 \rangle v^1 + \langle C_{1122} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle v^2 + \langle C_{11\gamma\delta} h_{,11}^1 \rangle u_{,\gamma\delta} = 0, \\ \langle C_{2211} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle v^1 + \langle C_{2222} (h_{,22}^2)^2 \rangle v^2 + \langle C_{22\gamma\delta} h_{,22}^2 \rangle u_{,\gamma\delta} = 0, \end{cases} \quad (7a)$$

$$v^1 = \frac{\langle C_{2222} (h_{,22}^2)^2 \rangle \langle C_{11\gamma\delta} h_{,11}^1 \rangle - \langle C_{22\gamma\delta} h_{,22}^2 \rangle \langle C_{1122} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle}{\langle C_{2211} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle \langle C_{1122} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle - \langle C_{2222} h_{,22}^2 \rangle \langle C_{1111} (h_{,11}^1)^2 \rangle} u_{,\gamma\delta},$$

$$v^2 = \frac{\langle C_{2211} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle \langle C_{11\gamma\delta} h_{,11}^1 \rangle - \langle C_{22\gamma\delta} h_{,22}^2 \rangle \langle C_{1111} (h_{,11}^1)^2 \rangle}{\langle C_{2211} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle \langle C_{1122} h_{,11}^1 h_{,22}^2 \rangle - \langle C_{2222} h_{,22}^2 \rangle \langle C_{1111} (h_{,11}^1)^2 \rangle} u_{,\gamma\delta}.$$

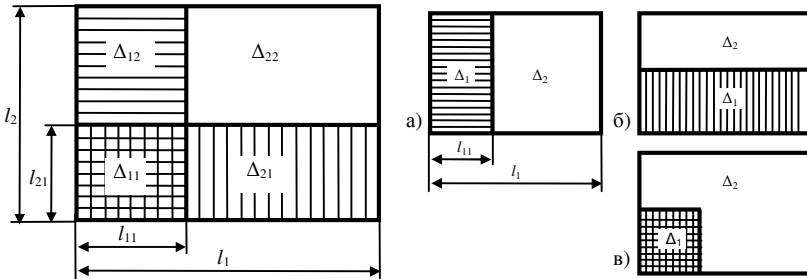


Рисунок 3 – Ячейка периодичности в виде шахматной доски и ее модификации

Если у нас только одна функция формы (неоднородность в одном направлении – $A = 1$, $h^1 \equiv h$), получаем по очереди:

$$\begin{cases} \langle \rho \rangle \ddot{u} + \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle u_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \langle C_{\alpha\beta 11} h_{,11} \rangle v_{,\alpha\beta}^1 = p, \\ \langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle v^1 + \langle C_{11\gamma\delta} h_{,11} \rangle u_{,\gamma\delta} = 0, \end{cases} \quad (7б)$$

$$v^1 = -\frac{\langle C_{11\gamma\delta} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle} u_{,\gamma\delta}, \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{eff} = \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle - \frac{\langle C_{\alpha\beta 11} h_{,11} \rangle \langle C_{11\gamma\delta} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle}.$$

Итак:

$$C_{1111}^{eff} = \langle C_{1111} \rangle - \frac{\langle C_{1111} h_{,11} \rangle \langle C_{1111} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle} = \frac{g^3}{12} \left[\left\langle \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \frac{\left\langle \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) h_{,11} \right\rangle^2}{\left\langle \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) (h_{,11})^2 \right\rangle} \right],$$

$$C_{2222}^{eff} = \langle C_{2222} \rangle - \frac{\langle C_{2211} h_{,11} \rangle \langle C_{1122} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle} = \frac{g^3}{12} \left[\left\langle \lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \frac{\left\langle \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) h_{,11} \right\rangle^2}{\left\langle \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) (h_{,11})^2 \right\rangle} \right],$$

$$C_{1122}^{eff} = \langle C_{1122} \rangle - \frac{\langle C_{1111} h_{,11} \rangle \langle C_{1122} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle} = \frac{g^3}{12} \left[\left\langle \lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \frac{\left\langle \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) h_{,11} \right\rangle \left\langle \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) h_{,11} \right\rangle}{\left\langle \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) (h_{,11})^2 \right\rangle} \right] = C_{2211}^{eff},$$

$$C_{1212}^{eff} = \langle C_{1212} \rangle - \frac{\langle C_{1211} h_{,11} \rangle \langle C_{1112} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle} = \frac{g^3}{12} \langle \mu \rangle = C_{2121}^{eff} = C_{1221}^{eff} = C_{2112}^{eff}.$$

4 Функция формы. Подбирая функцию формы, надо помнить, что она должна быть непрерывной и должна отображать физическое явление, которое рассматриваем. В нашем случае рассчитываем колебания, а конкретно, прогиб плиты – поэтому надо подобрать такую функцию формы, которая обеспечивает непрерывность напряжений на границах ячеек периодичности и на границах их компонентов, следовательно такую, вторые производные которой непрерывны – отсюда следует

$$(h_1)_{,11}|_{x=l_{11}} = (h_2)_{,11}|_{x=l_{11}}, \quad (h_1)_{,11}|_{x=0} = (h_2)_{,11}|_{x=l_1}. \quad (8a)$$

Кроме того, функция формы должна быть осциллирующая, т.е. интеграл от этой функции во всей области ячейки периодичности должен быть равен нулю. В случае ячейки в виде шахматной доски это обозначает, что площадь под эпюрой функции формы для первой компоненты (*I* на рисунке 4) должна быть равна площади под эпюрой для второй компоненты (*II* на рисунке 4), то есть

$$\int_0^{l_{11}} h_1 dx = \int_{l_{11}}^{l_1} h_2 dx. \quad (8б)$$

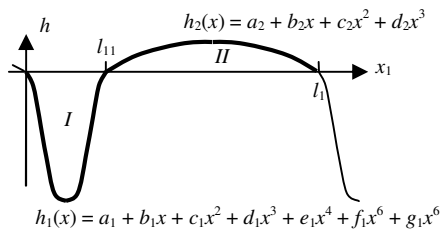


Рисунок 4 – Функция формы

Затем, третье условие говорит о том, что если модель неоднородной плиты применим к однородной плите, она должна дать те же самые результаты, что модель однородной плиты (т.е., подставляя, например, одинаковые физические характеристики для обеих компонентов ячейки периодичности или нулевую ширину одного из компонентов, мы должны получить результаты, как для однородной плиты). Чтобы точнее обговорить это условие, посмотрим на формулы, определяющие коэффициенты C^{eff} . Если мы переходим к однородной плите, каждый из них принимает значение, равное коэффициенту для однородной плиты, т. е. $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{eff} = \langle C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle = C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – следовательно, в каждой из формул исчезает дробь, ее числитель превращается в нуль. Поэтому получим (пренебрегая коэффициентом $g^3/12$):

$$\langle C_{1111} h_{,11} \rangle = \left\langle \left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) h_{,11} \right\rangle = 0, \text{ отсюда}$$

$$\frac{1}{l_1} \left(\int_0^{l_{11}} \left(\lambda_1 + 2\mu_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + 2\mu_1} \right) (h_1)_{,11} + \int_{l_{11}}^{l_1} \left(\lambda_2 + 2\mu_2 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right) (h_2)_{,11} \right) dx = 0,$$

$$\langle C_{1122} h_{,11} \rangle = \langle C_{2211} h_{,11} \rangle = \left\langle \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} \right) h_{,11} \right\rangle = 0, \text{ отсюда}$$

$$\frac{1}{l_1} \left(\int_0^{l_{11}} \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + 2\mu_1} \right) (h_1)_{,11} + \int_{l_{11}}^{l_1} \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right) (h_2)_{,11} \right) dx = 0.$$

Для однородной плиты происходит $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\mu_1 = \mu_2$, что приводит вышеуказанные формулы к равности

$$\int_0^{l_{11}} (h_1)_{,11} dx = \int_{l_{11}}^{l_1} (h_2)_{,11} dx. \quad (8в)$$

Последнее условие заставляет так выбирать функцию формы, чтобы у жёсткого компонента прогиб был больший, чем у податливого.

В дальнейшем покажем способ выбора функции формы для плиты периодической только в одном направлении, т. е. вдоль оси x_1 ($A = 1$ – рису-

нок 3, а). Вышеуказанные условия достаточно строгие, поэтому функция формы должна быть высокой степени – особенно в узкой области (l на рисунке 4; это не могут быть, например, комбинации синусов и косинусов или параболы). Итак, наша функция будет состоять из многочленов: шестой степени для компонента 1 (для $x \in (0, l_{11})$), третьей степени для компонента 2 (для $x \in (l_{11}, l_1)$, рисунок 4).

Следовательно, мы должны подсчитать 11 коэффициентов. Прежде всего используем условия (8а), (8б) и (8в). Затем, устанавливаем, что на краях компонентов значение функции формы равно 0:

$$h_1|_{x=0} = 0, \quad h_1|_{x=l_{11}} = 0, \quad h_2|_{x=l_{11}} = 0, \quad h_2|_{x=l_1} = 0. \quad (8д)$$

Условия (8д) обозначают непрерывность функции формы. Из них и из условий (8а) (непрерывность второй производной) следует непрерывность первой производной (которая описывает деформации).

Стоит подчеркнуть, что принятие условий (8д) довольно редкое. В большинстве случаев ([2], [4], [5]) функции формы принимают на краях компонентов экстремальные значения (противоположных знаков на каждом из краев).

Два дополнительных условия определяют, что обе составные функции имеют экстремум в середине компонентов:

$$(h_1)_{,1}|_{x=l_{11}/2} = 0, \quad (h_2)_{,1}|_{x=(l_1+l_{11})/2} = 0. \quad (8е)$$

Благодаря условиям (8е) получаем такую функцию, что ее составные части симметричны относительно середин компонентов.

Существует 10 условий – останется произвольно выбрать один коэффициент. С его помощью возможно так определить функцию формы, чтобы значения ее экстремумов были близки к длине ячейки периодичности, а также так выполнить условие, чтобы в жёстком компоненте прогиб был больший, чем в податливом (т.е. часть функции формы для жёсткого компонента должна быть отрицательная, для податливой – положительная).

Пользуясь условиями (8) и общими формулами для составных функций из рисунка 4, получаем:

$$h_1 = c_1 \left[(l_1 - l_{11})x + x^2 + 10 \frac{7l_1^3 - 21l_1^2 l_{11} + 12l_1 l_{11}^2}{3l_{11}^4} x^3 - 5 \frac{14l_1^3 - 42l_1^2 l_{11} + 25l_1 l_{11}^2}{l_{11}^5} x^4 + \right. \\ \left. + 14 \frac{5l_1^3 - 15l_1^2 l_{11} + 9l_1 l_{11}^2}{l_{11}^6} x^5 - 14 \frac{5l_1^3 - 15l_1^2 l_{11} + 9l_1 l_{11}^2}{3l_{11}^6} x^6 \right]; \quad x \in (0, l_{11}), \quad (9) \\ h_2 = c_1 \left[l_{11} l_1 - (l_{11} + l_1)x + x^2 \right] \quad x \in (l_{11}, l_1).$$

Коэффициент c_1 можно выбрать произвольно.

5 Расчётный пример. Вычислим частоты и формы собственных колебаний плиты с размерами, указанными на рисунке 5, и сравним их с результа-

тами для однородной плиты тех же размеров. Значения всех необходимых величин приведены в таблице 1. Надо подчеркнуть, что значения величин для подкрепленного компонента ячейки отобраны случайно – точно их можно вычислить, пользуясь так называемой функцией насыщения, которая выражает значение данной величины в подкрепленной области в зависимости от физического содержания подкрепляющего материала в основе (например, от соотношения объема стальных арматурных стержней к объему бетона, в котором они находятся).

Средняя плотность подсчитана из формулы (3), в которую подставлено $\Delta = (0, l_1)$ (область ячейки периодичности), $|\Delta| = l_1$ (ее длина):

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \rho(x_1, x_2) d\Delta = \frac{1}{l_1} \left(\int_0^{l_{11}} \rho_1 dx + \int_{l_{11}}^{l_1} \rho_2 dx \right) = \rho_1 \frac{l_{11}}{l_1} + \rho_2 \frac{l_1 - l_{11}}{l_1}.$$

Функция формы для неоднородной плиты имеет вид:

$$h_1 = -0,625 x - 5 x^2 - 552000 x^3 + 6,648 \cdot 10^7 x^4 - 2,66112 \cdot 10^9 x^5 + 3,54816 \cdot 10^{10} x^6 \quad \text{для } x \in (0; 0,025),$$

$$h_2 = -0,01875 + 0,875 x - 5 x^2 \quad \text{для } x \in (0,025; 0,15).$$

Таблица 1 – Значения величин, определяющих плиты (коэффициенты C подсчитаны с применением приведенной функции формы; для неоднородной плиты $C \equiv C^{eff}$)

Величина	Неоднородная плита		Однородная плита
	основа	подкрепленная область	
Модуль Юнга E , МПа	20000	40000	20000
Плотность ρ , кг/м ³	3000	4000	3000
Средняя плотность $\langle \rho \rangle$, кг/м ³	3166 ² / ₃		3000
Коэффициент Пуассона ν	0,2	0,2	0,2
Толщина g , м	0,25	0,25	0,25
λ , МПа	5555 ⁵ / ₉	11111 ¹ / ₉	5555 ⁵ / ₉
μ , МПа	8333 ¹ / ₃	16666 ² / ₃	8333 ¹ / ₃
C_{1111} , кН·м	31647,38		27127
C_{2222} , кН·м	31647,39		27127
$C_{1122} = C_{2211}$, кН·м	6329,40		5425
$C_{1212} = C_{2121} = C_{1212} = C_{2121}$, кН·м	12659,0		10850

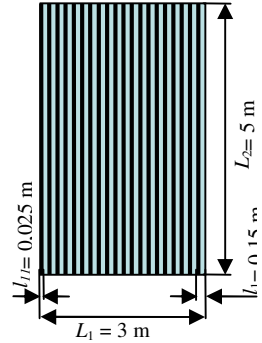


Рисунок 5 – Периодически неоднородная плита: область тёмная – подкрепленная, светлая – податливая

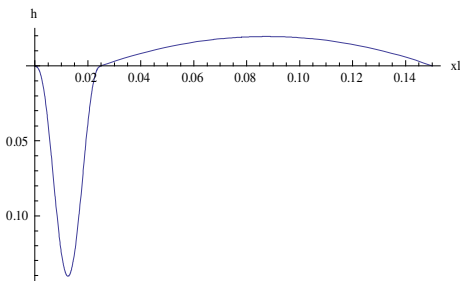


Рисунок 6 – Функция формы для рассматриваемой плиты

Её представляет рисунок 6. Коэффициент c_1 принят равным -5 ; минус гарантирует, что часть функции формы для жёсткого компонента отрицательная, зато значение 5 говорит о том, что экстремальное значение функции равно 0,14 (точно $-0,14$), т.е. близко к длине ячейки периодичности ($l_1 = 0,15$ м).

Затем, преобразуем уравнение (6) к виду:

$$\ddot{u} + \frac{C_{1111}^{eff}}{\langle \rho \rangle} u_{,1111} + 2 \frac{C_{1122}^{eff} + 2C_{1212}^{eff}}{\langle \rho \rangle} u_{,1122} + \frac{C_{2222}^{eff}}{\langle \rho \rangle} u_{,2222} = 0,$$

а выражая дробь в этом уравнении через A, B, C , найдем:

$$\ddot{u} + Au_{,1111} + 2Bu_{,1122} + Cu_{,2222} = 0.$$

Для неоднородной плиты получим:

$$\ddot{u} + 9993,91 u_{,1111} + 2 \cdot 9994,03 u_{,1122} + 9994,05 u_{,2222} = 0,$$

а для однородной:

$$\ddot{u} + 8566,34 (u_{,1111} + 2 u_{,1111} + u_{,1111}) = 0.$$

Оба эти уравнения решаем классическим методом разделения переменных [6]. Если решение представим в виде $u = U(x_1, x_2)T(t)$, тогда задача о собственных значениях имеет вид

$$AU_{,1111} + 2BU_{,1122} + CU_{,2222} - \omega^2 U = 0,$$

где U – согласно решению Леви, представляем в виде

$$U = Y_m(x_2) \sin \frac{m\pi x_1}{L_1},$$

$$Y_m(x_2) = \beta_1 \sin(r_{1m}x_2) + \beta_2 \sinh(r_{2m}x_2) + \beta_3 \cos(r_{1m}x_2) + \beta_4 \cosh(r_{2m}x_2);$$

$$r_{1m/2m} = \sqrt{\frac{1}{C} \sqrt{\left(B^2 - AC \left(\frac{m\pi}{L_1} \right)^4 + C\omega^2 \mp \frac{B}{C} \left(\frac{m\pi}{L_1} \right)^2}}},$$

а коэффициенты $\beta_1 - \beta_4$ определяем из граничных условий. Итак, для неоднородной плиты получаем

$$r_{1m/2m} = \sqrt{\frac{1}{9994,05} \sqrt{1121,226m^4 + 9994,05\omega^2 \mp 1,097m^2}},$$

а для однородной ($A = B = C$) –

$$r_{1m/2m} = \sqrt{0,0108\omega \mp 1,097m^2}.$$

Рассмотрены плиты (рисунок 7), которые на краях вдоль оси x_2 свободно оперты (согласно решению Леви), а края вдоль оси x_1 :

- тоже свободно оперты (рисунок 7, а);
- защемлены (рисунок 7, б);
- один свободен, другой защемлён (рисунок 7, в).

Как известно, частоты собственных колебаний плит двухиндексны; рисунок 7 представляет частоты вычисленные для $m = 3$ (существуют 3 полуволны в направлении вдоль оси x_1).

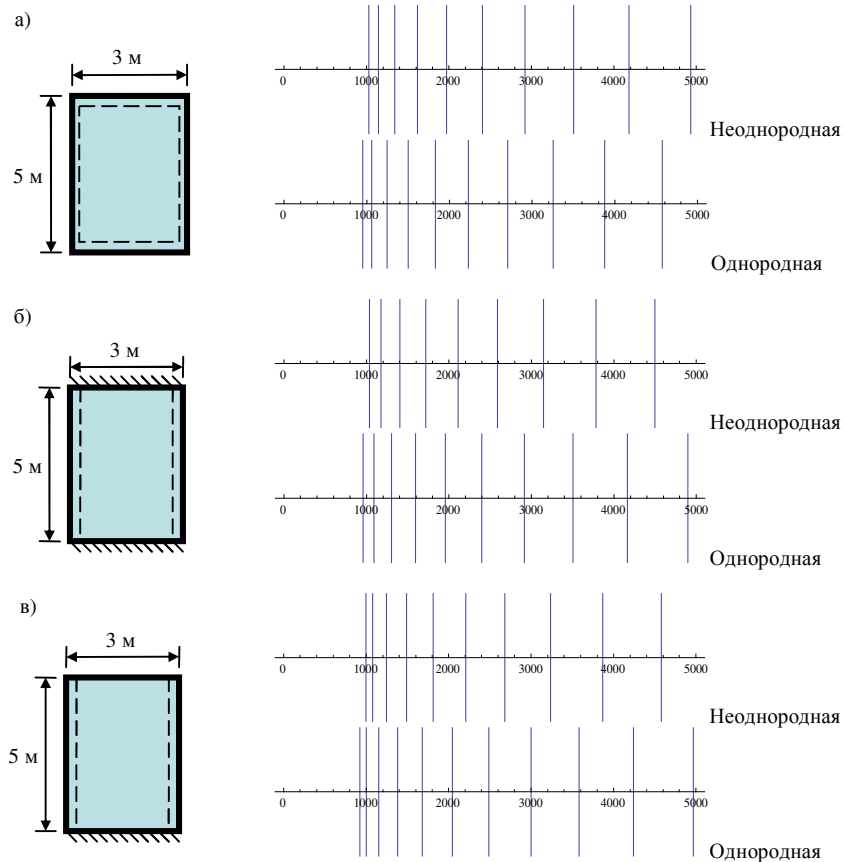


Рисунок 7 – Частоты собственных колебаний для плит, опертых разным образом

Для свободно опертой плиты подсчитаны тоже формы собственных колебаний для частоты с индексами $m = 2, n = 3$. Согласно (1), для $A = 1$ полные колебания $w(x_1, x_2, t)$ состоят из средних колебаний $u(x_1, x_2, t)$ и произведения флуктуации $v(x_1, x_2)$ и функции формы $h(x_1)$. Флуктуацию получаем из (7б):

$$v^1 \equiv v = - \frac{\langle C_{1111} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle} u_{,11} - \frac{\langle C_{1122} h_{,11} \rangle}{\langle C_{1111} (h_{,11})^2 \rangle} u_{,22}. \quad (10)$$

Результаты представляют рисунки 8 и 9. Флуктуация имеет тот же самый вид, как среднее перемещение (согласно (10) и формуле для Y_m), но значения – намного меньше: около 5 порядков. Поэтому на рисунке 9 надо было увеличить флуктуацию $2 \cdot 10^5$ раз, чтобы она была заметна (из-за плохого разрешения не все неоднородности заметны). Неоднородности более всего влияют на процесс в местах экстремумов прогибов – там, где плита более всего деформируется. Это лучше видно на рисунках 10 и 11. В нашем примере неоднородности – это подкрепления, поэтому они сопротивляются этим деформациям. Вообще неоднородности не влияют значительно на формы колебаний, но – как видно из рисунка 7 – скорее на их частоты, особенно для высших их значений. Если неоднородности являются подкреплениями, они будут увеличивать частоты, так как плита становится жёстче.

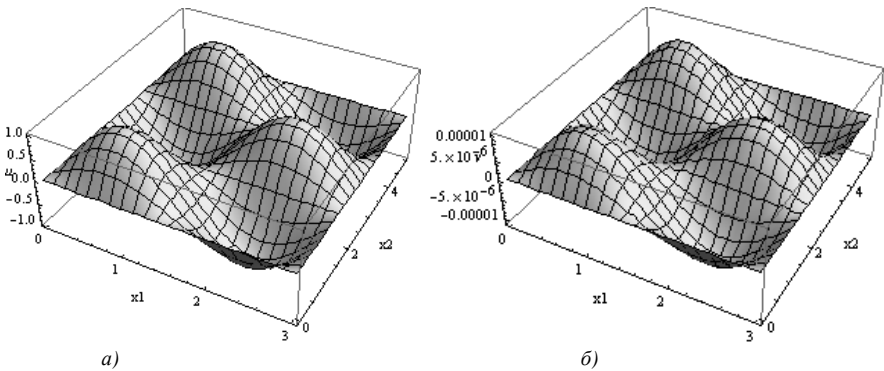


Рисунок 8 – Форма колебаний плиты из рисунка 7, а для частоты ω_{32} : а – средние колебания; б – флуктуация

Диаграммы 12 и 13 представляют соответственно 1-ю и 2-ю производные формы полных колебаний из рисунка 10 по переменной x_1 (эквивалент деформации и напряжений) для $x_1 \in (0,5; 1)$. Они все непрерывны – согласно принятому; в 1-й производной флуктуация увеличена в 200 раз.

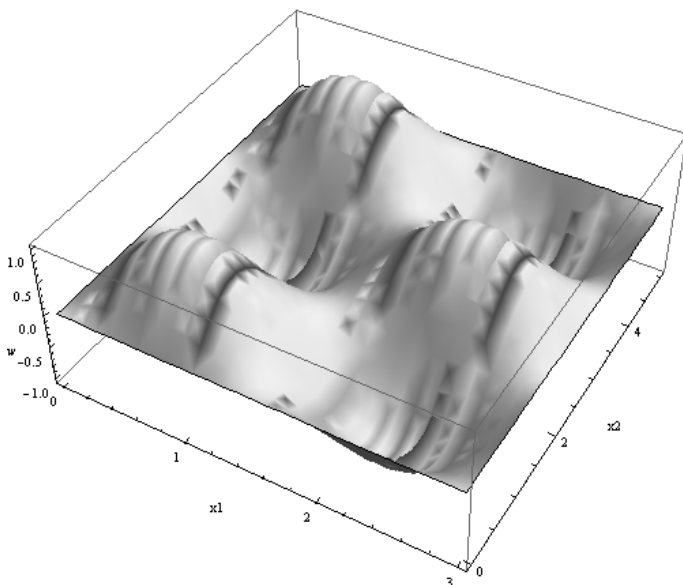


Рисунок 9 – Форма колебаний плиты из рисунка 7, а для частоты ω_{32} – полные колебания (флуктуация в них увеличена в $2 \cdot 10^5$ раз)

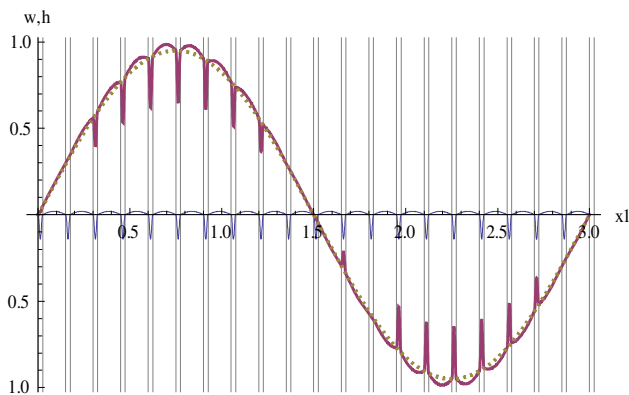


Рисунок 10 – Диаграмма полных колебаний для установленной координаты $x_2 = 1$ м (толстая линия; флуктуация увеличена в $2 \cdot 10^5$ раз) вместо с функцией формы (тонкая сплошная линия) и средними колебаниями (штриховая линия). Прямые вертикальные линии – это границы ячеек и их компонентов

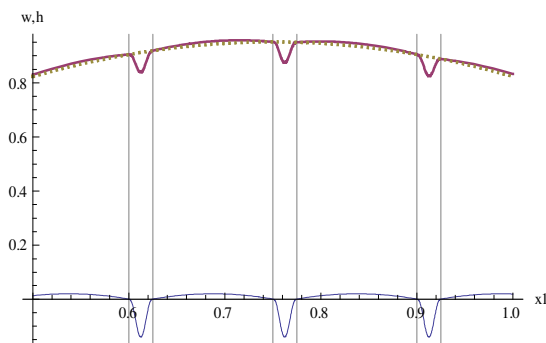


Рисунок 11 – Полные колебаний для координаты $x_2 = 1$ м в интервале $x_1 \in (0, 1)$ (штриховая линия – 1-я производная средних колебаний, обозначена линией, как на рисунке 10, флуктуация увеличена в $5 \cdot 10^4$ раз)

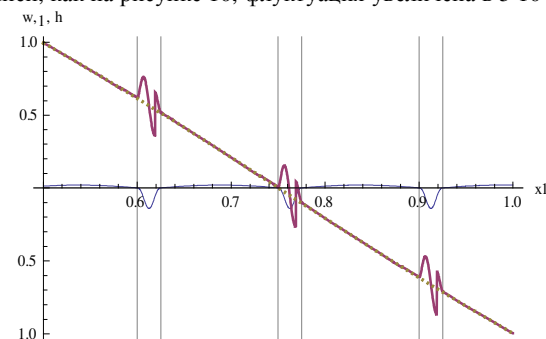


Рисунок 12 – Первая производная формы полных колебаний для координаты $x_2 = 1$ м (толстая линия; флуктуация увеличена в 200 раз) вместо функции формы (тонкая сплошная линия) и первой производной формы средних колебаний (штриховая линия)

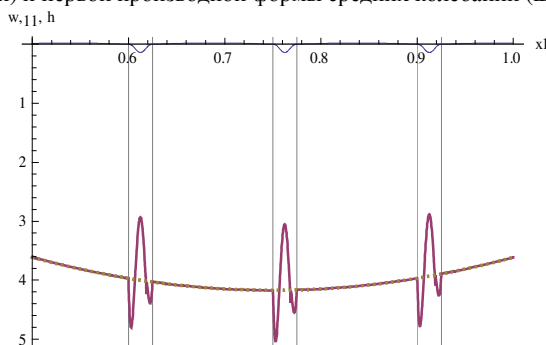


Рисунок 13 – Вторая производная формы полных колебаний для координаты $x_2 = 1$ м (толстая линия; флуктуация увеличена в 200 раз) вместе с функцией формы (тонкая сплошная линия) и второй производной формы средних колебаний (штриховая линия)

6 Заключение. В статье представлен метод расчёта частот собственных колебаний неоднородных плит. Расчётная модель опирается на методе, называемым *tolerance averaging technique (TAT)*. В модели существует $n + 1$ уравнений для перемещения и флуктуации, расчёт которых зависит от некоторых функций, называемых функциями формы (n – их число). Эти функции должны быть известны – их надо отобразить так, чтобы отображали характер рассматриваемого процесса или явления. В статье также представлены такие функции.

Модель была применена в расчётном примере. Представляется, что она хорошо отображает действительность, но требует эксперимента. Стоит ещё упомянуть о так называемом масштабном эффекте (англ. *scale effect*, [1]), который означает, что результаты расчёта зависят от размера ячейки периодичности. В нашей модели коэффициенты C^{eff} зависят от l_1 и l_{11} – что особенно влияет на результаты в случае с флуктуаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Woźniak, Cz.** Averaging techniques in thermo-mechanics of composite solids / Cz. Woźniak, E. Wierzbicki – Częstochowa, Wydawnictwa Politechniki Częstochowskiej, 2000.

2 **Nagórko, W.** Nonasymptotic Modelling of Thin Plates Reinforced by a System of Stiffeners / W. Nagórko, Cz. Woźniak // Electronic Journal of Polish Agricultural Universities – Civil Engineering – Vol. 5 – Iss. 2 – 2002. – www.ejpau.media.pl

3 **Chalecki, M.** Drgania własne ośrodków periodycznie wieloskładnikowych (Free Vibrations of Periodically Multicomponent Media – in Polish) / M. Chalecki, W. Nagórko // 50. Sympozjon “Modelowanie w Mechanice”. – Ustroń, 26.02-02.03.2011.

4 **Thermomechanics of Heterogeneous Solids and Structures. Tolerance Averaging Approach** / pod red. Cz. Woźniaka, B. Michalaka i J. Jędrysiaka. – Łódź: Wydawnictwa Politechniki Łódzkiej, 2008.

5 **Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media** / pod red. Cz. Woźniaka. – Gliwice: Wydawnictwa Politechniki Śląskiej, 2010.

6 **Drgania i fale** / pod red. S. Kaliskiego // Mechanika Techniczna – T. 8. – Warszawa: PWN, 1986.

M. CHALECKI

FREE VIBRATIONS OF NON-HOMOGENEOUS PLATES

The paper presents a calculation procedure of free vibrations of non-homogeneous plate. The non-homogeneity of the plate is periodical. There are calculated natural frequencies and forms of free vibrations. The tolerance averaging technique and Euler-Lagrange equations were applied.

Получено 23.03.2011