

УДК 69.04 : 519.6

С. А. ОРЛОВ

Резидент Парка высоких технологий Беларуси, Гомель

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В МЕХАНИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены особенности получения символьно-аналитического решения задачи по нахождению внутренних силовых факторов и перемещений в тестовой рамной конструкции на основе авторского экспериментального программного обеспечения. Методика получения аналитического решения отличается от метода конечных элементов и представлена в более ранних работах. Выполнено сравнение результатов со значениями, полученными с помощью САЕ системы Autodesk Robot Structural Analysis.

Актуальность исследований. В последнее время на улицах городов Беларуси можно наблюдать процесс монтажа каркасных стержневых конструкций. Стержневые системы обладают высокой удельной по отношению к весу прочностью, весьма технологичны. Единственным недостатком принято считать относительную дороговизну производства. Некоторые конструкции стержневого типа представлены на рисунке 1.

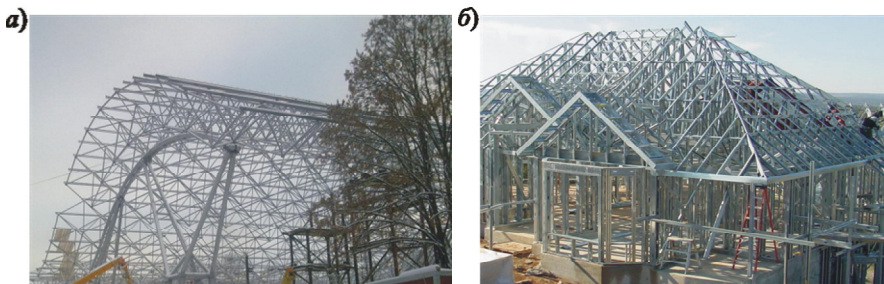


Рисунок 1 – Примеры каркасных стержневых конструкций:
а – конструкция перекрытия; б – стержневой каркас жилого дома

Традиционным общим подходом к анализу подобных систем является применение метода конечных элементов (МКЭ). В отличие от усовершенствованного метода Рэлея-Ритца – модификации МКЭ для исследования континуальных систем, по отношению к стержневым конструкциям МКЭ представляет собой матричную реализацию метода перемещений строительной механики. Результатом расчетов по МКЭ служат массивы чисел и графические представления на их основе. Метод универсален, удобен и практичен, что определило его доминирование в расчетной практике различных технических областей и

возможность научно-исследовательского анализа широкого круга задач математической физики. Практика применения МКЭ сводится, в основном, к проверочным расчетам предварительно выбранных, утвержденных форм конструкций.

Однако процедура проведения параметрического анализа посредством МКЭ, поиска и выявления определяющих зависимостей между входными – внешними параметрами задачи и искомыми внутренними факторами, напряжениями и перемещениями затруднена в силу “стационарного” численного характера решений. Преимущества аналитического описания поведения сложных объектов и широкое распространение стержневых систем определяют актуальность исследований.

Постановка задачи. Рассмотрим произвольную тестовую конструкцию, общий вид которой представлен на рисунке 2. Конструкция нагружена вертикальными сосредоточенными силами $F = 15000$ Н, горизонтальными усилиями $F = 2000$ Н, сосредоточенными моментами $m = 5000$ Н/м и распределенными нагрузками в вертикальном направлении $q = 500$ Н/м так, как показано на рисунке 2, узлы системы – жесткие. В крайних точках основания устроены жесткие опоры.

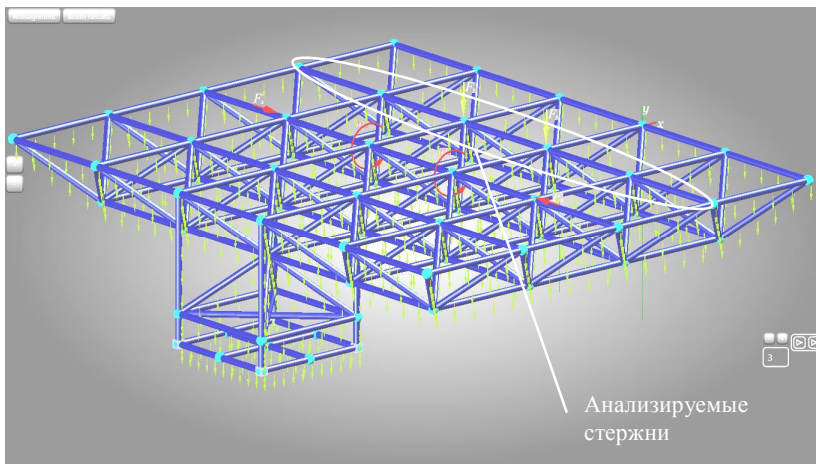


Рисунок 2 – Общий вид исследуемой конструкции – экспериментальное программное обеспечение

Не нарушая общности исследования, примем, что все элементы конструкции – невесомые стержни круглого поперечного сечения. Материал стержней – линейно упругий, модель предполагает работу конструкции в области выполнения закона Гука при заданных нагрузках. Характеристики геометрии и материала стержней таковы: модуль Юнга $E = 2,05 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, модуль сдвига $G = E / (2(1+\nu)) = 0,7885 \cdot 10^{11}$ Па, диаметр $d = 4$ см, площадь поперечного сечения $A = \pi d^2 / 4 = 12,566 \cdot 10^{-4}$ см²,

осевые моменты инерции $I_x = I_y = \pi d^4/64 = 12,566 \cdot 10^{-8} \text{ см}^4$, $I_z = 2I_x = 25,133 \cdot 10^{-8} \text{ см}^4$ (z – ось стержня).

Пример полностью символично-аналитического (буквенного) расчета простейшей плоско-пространственной рамы представлен в работе [2], здесь также приведены самые общие аналитические решения для реакций опор конструкции, обсуждаются возможности параметрического анализа. Поставим задачу получить функциональные решения для тестовой конструкции (см. рисунок 2) и провести численную верификацию решений для стержней выделенного пояса. В качестве эталонного решения используем результаты, полученные с помощью системы промышленного анализа Autodesk Robot Structural Analysis (Robot). Основные габаритные размеры исследуемой стержневой системы показаны в окне программы Robot (рисунок 3).

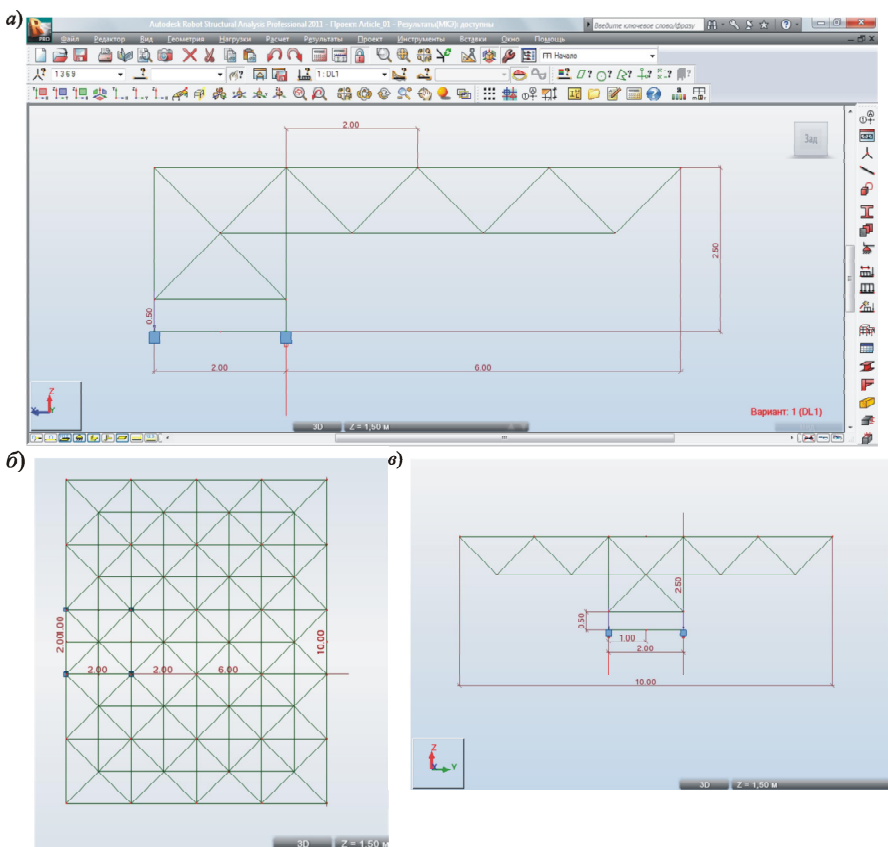


Рисунок 3 – Основные габаритные размеры конструкции: *а* – вид спереди; *б* – вид сверху; *в* – вид сбоку. Программное обеспечение Autodesk Robot Structural Analysis

Решение и анализ результатов. Полученные в двух программах значения опорных реакций сведем в таблицы 1 и 2. Заметим, что в каждой из программных сред системы координат отличаются, поэтому будем обращать внимание лишь на абсолютные значения. Точность округления назначим в девять знаков после запятой. В целом отмечается полное совпадение результатов, найденных с помощью двух программных сред: экспериментальной системы и продукта компании Autodesk (см. таблицы 1, 2), ошибка не превышает двух десятитысячных процента.

Таблица 1 – Сравнительный анализ силовых реакций в опорах конструкции
Реакции в килоньютонах

Узел (Robot/ЭПО)	Реакция	Экспериментальное ПО	Robot	Относительная ошибка ЭПО – Robot, %
<i>I группа симметричных опор</i>				
1/2	R_x	0,817206253	0,817206329	$9,30 \cdot 10^{-6}$
	R_y	0,832894399	0,832894491	$11,05 \cdot 10^{-6}$
	R_z	197,097730160	197,097774333	$22,44 \cdot 10^{-6}$
9/9	R_x	0,817206253	0,817206329	$9,3 \cdot 10^{-6}$
	R_y	-0,832894399	-0,832894491	$11,05 \cdot 10^{-6}$
	R_z	197,097730160	197,097774333	$22,41 \cdot 10^{-6}$
<i>II группа симметричных опор</i>				
3/3	R_x	-0,817206253	-0,817206329	$9,30 \cdot 10^{-6}$
	R_y	0,772780249	0,772780331	$10,61 \cdot 10^{-6}$
	R_z	-96,810472543	-96,810493811	$21,97 \cdot 10^{-6}$
6/7	R_x	-0,817206253	-0,817206329	$9,30 \cdot 10^{-6}$
	R_y	-0,772780249	-0,772780331	$10,61 \cdot 10^{-6}$
	R_z	-96,810472544	-96,810493811	$21,97 \cdot 10^{-6}$

Обратимся к внутренним факторам в пяти стержнях, отмеченных на рисунке 2. При этом учтем отличие в локальных системах координат, используемых в двух программах, а также традиционно принятое в строительной механике правило построения эпюр внутренних изгибающих моментов на растянутом волокне (Robot). Как уже отмечалось, экспериментальное программное обеспечение позволяет получать функции внутренних факторов, действующих вдоль стержня. Возможность построения эпюр внутренних факторов и перемещений, а также расчета их аналитических представлений демонстрирует рисунок 4.

Таблица 2 – Сравнительный анализ моментных реакций в опорах конструкции

Реакции в килоньютонах·метрах

Узел (Robot/ЭПО)	Реакция	Экспериментальное ПО	Robot	Относительная ошибка ЭПО – Robot, %
1/2	m_x	0,204348249	0,204348235	$6,85 \cdot 10^{-6}$
	m_y	-0,199610890	-0,199610877	$6,51 \cdot 10^{-6}$
	m_z	0,002324396	0,002324396	0,00
9/9	m_x	-0,204348249	-0,204348235	$6,85 \cdot 10^{-6}$
	m_y	-0,199610890	-0,199610877	$6,51 \cdot 10^{-6}$
	m_z	-0,002324396	-0,002324396	0,00
3/3	m_x	0,214393934	0,214393922	$5,6 \cdot 10^{-6}$
	m_y	0,214391197	0,214391187	$4,66 \cdot 10^{-6}$
	m_z	0,002808083	0,002808083	0,00
6/7	m_x	-0,214393934	-0,214393922	$5,6 \cdot 10^{-6}$
	m_y	0,214391197	0,214391187	$4,66 \cdot 10^{-6}$
	m_z	-0,002808083	-0,002808083	0,00



Рисунок 4 – Внутренние силовые факторы в первом стержне пояса (удаленном от наблюдателя) согласно рисунку 2 (авторское экспериментальное программное обеспечение)

В таблице 3 приведены аналитические выражения внутренних факторов для каждого из пяти отмеченных стержней рисунка 2, сгенерированные экспериментальным программным обеспечением.

Таблица 3 – Внутренние силовые факторы в тестовых стержнях конструкции.
Отчет текущей координаты z стержня справа налево

Внутренний фактор	Аналитическое выражение с машинной точностью
<i>Стержень 1</i>	
Продольная сила N , Н	2062,8680439223986
Поперечная сила Q_{xz} , Н	-8,220313984758423
Поперечная сила Q_{yz} , Н	581,2947092892236-500 z
Изгибающий момент M_{xz} , Нм	8,220313984758423 z -8,83040654997277
Изгибающий момент M_{yz} , Нм	-250 z^2 +581,2947092892236 z -218,0146258604799
Крутящий момент M , Нм	-3,8828112337261536
<i>Стержень 2</i>	
Продольная сила N , Н	14973,140715084675
Поперечная сила Q_{xz} , Н	-7,374528933053006
Поперечная сила Q_{yz} , Н	501,19205006240753-500 z
Изгибающий момент M_{xz} , Нм	7,3745289330553006 z -7,403809976200805
Изгибающий момент M_{yz} , Нм	-250 z^2 +501,19205006240753 z -175,19777428019754
Крутящий момент M , Нм	-18,822209243747682
<i>Стержень 3</i>	
Продольная сила N , Н	22155,832265308454
Поперечная сила Q_{xz} , Н	7,113765135132746·10 ⁻¹¹
Поперечная сила Q_{yz} , Н	500,0000000028314-500 z
Изгибающий момент M_{xz} , Нм	1,3542353800668805-7,113765135132746·10 ⁻¹¹ z
Изгибающий момент M_{yz} , Нм	-250 z^2 +500,0000000028314 z -167,90826323858442
Крутящий момент M , Нм	1,462834369712637·10 ⁻¹¹
<i>Стержень 4</i>	
Продольная сила N , Н	14973,140715898253
Поперечная сила Q_{xz} , Н	7,374528933730029
Поперечная сила Q_{yz} , Н	498,80794993784417-500· z
Изгибающий момент M_{xz} , Нм	7,345247890674755-7,374528933730029 z
Изгибающий момент M_{yz} , Нм	-250 z^2 +498,80794993784417 z -172,81367415581968
Крутящий момент M , Нм	18,82220924390035
<i>Стержень 5</i>	
Продольная сила N , Н	2062,8680439152104
Поперечная сила Q_{xz} , Н	8,220313983848133
Поперечная сила Q_{yz} , Н	418,70529071035656-500 z
Изгибающий момент M_{xz} , Нм	7,610221418918445-8,220313983848133 z
Изгибающий момент M_{yz} , Нм	-250 z^2 +418,70529071035656 z -55,425207281627664
Крутящий момент M , Нм	3,882812337259644

Приведем результаты сравнительного анализа значений внутренних факторов в узлах первого удаленного стержня выделенного на рисунке 2 пояса

конструкции. Ввиду различия локальных систем координат стержней в обеих программах, будем, во избежание путаницы, придерживаться обозначений таблицы 3, то есть примем обозначения экспериментального программного обеспечения. В таблице 4 представлены узловые значения внутренних факторов, которые могут быть рассчитаны с использованием функций, приведенных в таблице 3.

Таблица 4 – Сравнение значений внутренних силовых факторов для первого стержня

Внутренний фактор (по локальной системе координат ЭПО)	Экспериментальное ПО	Robot	Относительная ошибка, %
Продольная сила N , Н	2062,868044	-2062,868573	$25,64 \cdot 10^{-6}$
Поперечная сила Q_{xz} , Н	-8,220314	-8,220316	$25,33 \cdot 10^{-6}$
Поперечная сила Q_{yz} , Н	-418,705291 ... 581,294709	418,705264 ... -581,294736	$6,45 \cdot 10^{-6}$... $4,64 \cdot 10^{-6}$
Изгибающий момент M_{xz} , Нм	7,610221 ... -8,830407	-7,610223 ... 8,830408	$26,28 \cdot 10^{-6}$... $11,32 \cdot 10^{-6}$
Изгибающий момент M_{yz} , Нм	-55,425207 ... -218,014626	-55,425170 ... 218,014642	$66,76 \cdot 10^{-6}$... $7,34 \cdot 10^{-6}$
Крутящий момент M , Нм	-3,882812	3,882813	$25,75 \cdot 10^{-6}$

Как следует из данных таблицы 4, ошибки в определении внутренних силовых факторов весьма малы. Для оставшихся стержней пояса (см. рисунок 2) отмеченная тенденция сохраняется. По указанной причине данные аналогичного анализа не приводятся.

Подобно тому, как это было сделано для внутренних силовых факторов, могут быть получены аналитические выражения для функций всех перемещений, включая углы изгиба, полный и относительный углы закручивания. Сравнение численных результатов для перемещений точек стержней тестового пояса конструкции (см. рисунок 2) демонстрирует корректность определения искомых величин в среде экспериментального программного обеспечения.

Заключение. Таким образом, программно реализованный алгоритм расчетов, основанный на общей теории поведения стержня Эйлера-Бернулли, может быть применен и для самой общей, буквенно-символьной постановки задач строительной механики. Последнее обстоятельство представляется весьма полезным в части проектирования новых форм каркасных конструкций, их оптимизации и параметрического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Орлов, С. А. Новый метод расчета в механике стержневых систем / С. А. Орлов // Вестник БелГУТа. – 2004. – № 2(9). – С. 29–34.

2 Орлов, С. А. Символьно-аналитический подход к анализу задач строительной механики / С. А. Орлов // Строительная наука и техника. – 2010. – № 4. – С. 47–50.

S. A. ARLOU

ANALYTICAL SOLUTIONS IN MECHANICS OF FRAMED STRUCTURES

In the article the features of analytical-functional solutions for internal force factors as well as deflections in test framed structure by experimental author's software are discussed. The technique of analytical representation generation different from finite element method is presented in our previous papers. These results are used as a standard solution generated on industry CAE system Autodesk Robot Structural Analysis for the arbitrary test construction.

Получено 19.03.2011

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 621.4.01

А. В. ПУТЯТО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРЫШКИ ЛЮКА ПОЛУВАГОНА ПРИ ПАДЕНИИ КУСКОВ ГРУЗА

Разработаны конечно-элементные модели, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние крышки разгрузочного люка полувагона при падении кусков груза в процессе загрузки вагона. Расчет крышки люка при условиях ударного нагружения, рекомендуемого нормативом, показал, что ее типовая конструкция не соответствует современным нормативным требованиям.

В соответствии с требованиями [1] разгрузочные крышки люка полувагона должны рассчитываться на случай падения отдельных кусков груза массой 150 кг с высоты 3 м. Такие случаи могут возникать при погрузке вагонов кусковыми грузами, например, грейферными машинами. При падении груза в кузов вагона возникают существенные динамические напряжения, что приводит к повреждению элементов конструкций подвижного состава. Характерно, что ударные взаимодействия отрицательно влияют не только на несущие элементы конструкции, но и на навесное оборудование вагонов. Расчет на удар конструктивных узлов и элементов позволяет оценить на эта-