

УДК 539.3

Ю. П. СМЕРНОВ, В. К. ТАРАСОВ

Тульский государственный университет, Россия

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ, ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Вращающиеся детали, имеющие форму диска, очень часто встречаются в самых разнообразных машинах. Рассмотрена и проанализирована физически и геометрически линейная задача определения напряженно-деформированного состояния однородного вращающегося диска, выполненного из изотропного материала.

Анализ распределения напряжений во вращающихся телах произвольной формы – сложная задача, поэтому ограничимся рассмотрением случая вращения диска. Определяются радиальные  $\sigma_r$  и тангенциальные  $\sigma_\theta$  напряжения, перемещения и деформации, возникающие в материале диска в результате действия центробежных сил. Задача строится в перемещениях и записывается в полярных координатах. Вследствие осесимметричности диска уравнение относительного равновесия частицы диска имеет вид [1]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + r\omega^2\rho = 0. \quad (1)$$

Здесь  $r$  – радиус произвольной точки диска,  $\omega$  – угловая скорость вращающегося диска,  $\rho$  – плотность материала диска.

Компоненты тензора деформации [1]

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r},$$

где  $u$  – радиальное перемещение точек диска.

Соотношения между напряжениями и деформациями [1]

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dr} + \frac{\mu}{r} u \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \mu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right), \quad (2)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Подставив соотношения (2) в уравнение равновесия (1), получим разрешающее дифференциальное уравнение в перемещениях

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{r\omega^2\rho(1-\mu^2)}{E} = 0.$$

Решением этого уравнения является соотношение

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{r^3 \omega^2 \rho (1 - \mu^2)}{8E},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования.

Строим выражения для напряжений

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \left( C_1 (1 + \mu) - \frac{C_2}{r^2} (1 - \mu) - \frac{r^2 \omega^2 \rho (1 - \mu^2) (3 + \mu)}{8E} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} \left( C_1 (1 + \mu) + \frac{C_2}{r^2} (1 - \mu) - \frac{r^2 \omega^2 \rho (1 - \mu^2) (1 + 3\mu)}{8E} \right). \quad (4)$$

Константы интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем, полагая равным нулю радиальное напряжение  $\sigma_r$  на внутреннем  $r_1$  и внешнем  $r_2$  радиусах диска:

$$\begin{aligned} C_1 (1 + \mu) - \frac{C_2}{r_1^2} (1 - \mu) &= \frac{r_1^2 \omega^2 \rho (1 - \mu^2) (3 + \mu)}{8E}, \\ C_1 (1 + \mu) - \frac{C_2}{r_2^2} (1 - \mu) &= \frac{r_2^2 \omega^2 \rho (1 - \mu^2) (3 + \mu)}{8E}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из системы уравнений (5) следуют соотношения для констант

$$C_1 = \frac{\rho \omega^2}{8E} (1 - \mu) (3 + \mu) (r_1^2 + r_2^2), \quad C_2 = \frac{\rho \omega^2}{8E} (1 + \mu) (3 + \mu) r_1^2 r_2^2.$$

Подставив выражения констант в соотношения (3) и (4), найдем в окончательном виде формулы для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \mu) \left( r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\rho \omega^2}{8} (3 + \mu) \left( r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} \right). \end{aligned}$$

**Анализ формул для напряжений.** Построим графики распределения напряжений по радиусу. Графики строятся с точностью до множителя  $\rho \omega^2 / 8$ , во всех случаях величина  $r_2 = 1$ , а коэффициент Пуассона  $\mu$  может принимать значения от 0 до 0,5.

Численный анализ напряжений показывает, что оба напряжения являются растягивающими. Тангенциальные напряжения возрастают с уменьшением расстояния от оси диска. Радиальные напряжения в любой точке всегда не больше тангенциальных. Радиальное напряжение равно тангенциальному

в единственной точке – центре диска (это имеет место, если в диске нет отверстия). Для сплошного диска центральная точка является самой нагруженной. Диск с исчезающе малым отверстием в центре является концентратором тангенциальных напряжений. Для диска с малой разностью радиусов (тонкое кольцо) радиальные напряжения существенно меньше тангенциальных. В примерах на рисунках 1–3 ( $r_1 = 0,9$ ) радиальные напряжения на два порядка меньше тангенциальных. С увеличением коэффициента  $\mu$  радиальные напряжения возрастают в любой точке диска. С другой стороны, при увеличении  $\mu$  тангенциальные напряжения возрастают во внутренней области диска и снижаются во внешней.

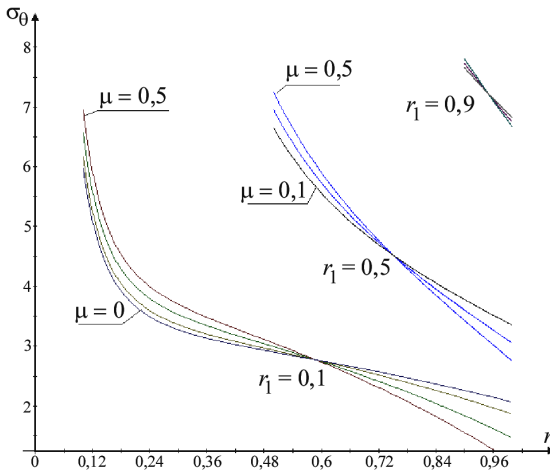


Рисунок 1 – Графики тангенциальных напряжений для диска с отверстием

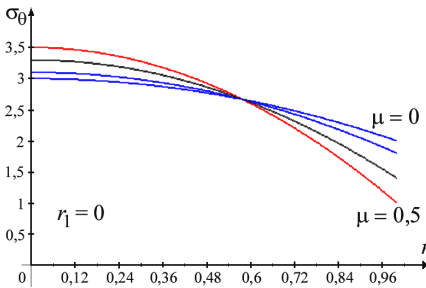


Рисунок 2 – Графики тангенциальных напряжений для сплошного диска

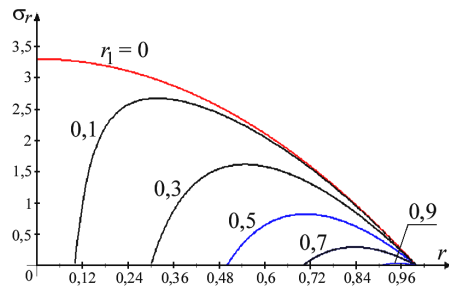


Рисунок 3 – Графики радиальных напряжений  $\mu = 0,3$

Из приведенного анализа следует, что внутренняя область вращающегося диска во всех случаях нагружена инерционными силами в большей мере, нежели внешняя.

**Анализ перемещений.** Подставив константы интегрирования в формулу для радиальных перемещений точек диска, получим

$$u = \frac{\rho\omega^2}{8E} \left( (1-\mu)(3+\mu)(r_1^2 + r_2^2)r + (1+\mu)(3+\mu)\frac{r_1^2 r_2^2}{r} - (1-\mu^2)r^3 \right).$$

В долях множителя  $\rho\omega^2/(8E)$  построим графики перемещений для случаев с различными значениями внутреннего радиуса  $r_1$  и коэффициента  $\mu$ , во всех случаях считается  $r_2 = 1$  (рисунки 4–5).

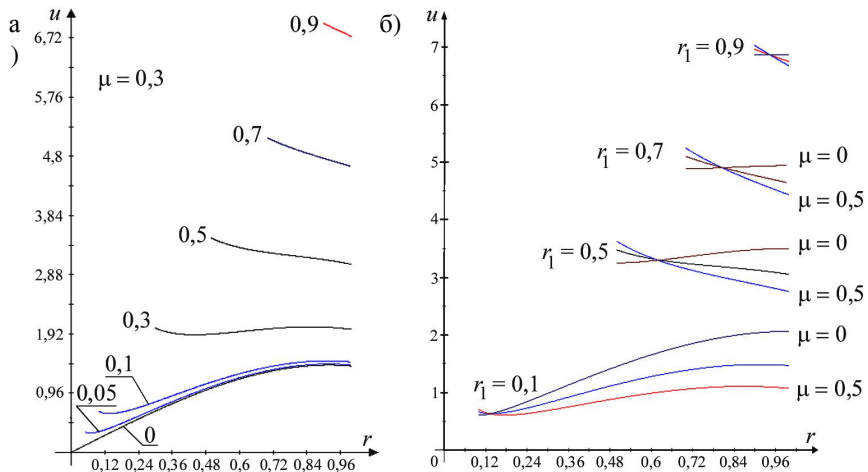


Рисунок 4 – Графики перемещений для диска с отверстием

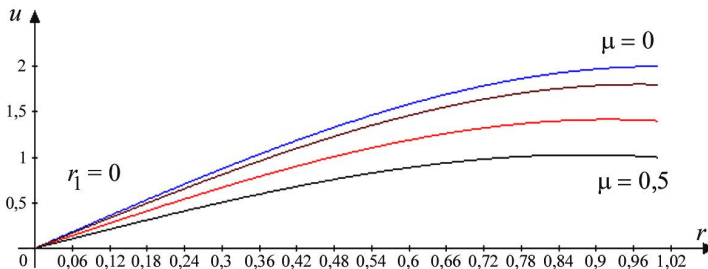


Рисунок 5 – Графики перемещений для сплошного диска

Приведенные графики показывают, что с увеличением  $r_1$  радиальные перемещения точек возрастают по всему радиусу. Начиная с некоторого значе-

ния  $r_1$ , радиальные перемещения точек диска во внутренней области больше, чем во внешней ( $u$  монотонно снижается по мере увеличения  $r$ ) (см. рисунок 4, а). При меньших значениях  $r_1$  имеют место два экстремума функции  $u(r)$ , вблизи внутреннего  $r_1$  и внешнего радиусов  $r_2$  диска. С увеличением  $\mu$  увеличивается перемещение точек во внутренней области диска и уменьшается во внешней (см. рисунок 4, б). Для сплошного диска увеличение коэффициента Пуассона  $\mu$  снижает перемещения точек.

**Анализ деформаций.** Подставив формулу для радиальных перемещений точек диска в соотношения для деформаций, получим:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{\rho\omega^2}{8E} \left( (1-\mu)(3+\mu)(r_1^2 + r_2^2) - (1+\mu)(3+\mu)\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - 3(1-\mu^2)r^2 \right),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{\rho\omega^2}{8E} \left( (1-\mu)(3+\mu)(r_1^2 + r_2^2) + (1+\mu)(3+\mu)\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - (1-\mu^2)r^2 \right)$$

В долях множителя  $\rho\omega^2/(8E)$  построим графики деформаций для случаев с различными значениями внутреннего радиуса  $r_1$  и коэффициента  $\mu$ , во всех случаях считается  $r_2 = 1$ .

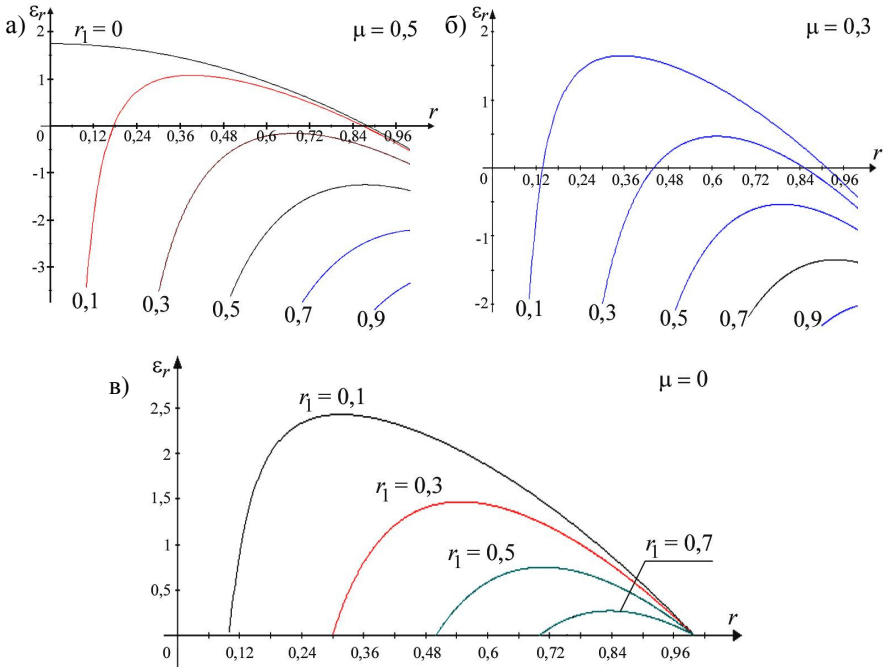


Рисунок 6 – Графики радиальных деформаций: а –  $\mu = 0,5$ ; б –  $\mu = 0,3$ ; в –  $\mu = 0$

Графики на рисунках 6, а–в показывают, что радиальные деформации  $\varepsilon_r(r)$  могут быть знакопеременными и что  $\varepsilon_r(r)$  существенно зависят от коэффициента Пуассона  $\mu$ . С увеличением  $\mu$  радиальные деформации смещаются в отрицательную сторону. При  $\mu = 0$  радиальные деформации оказываются неотрицательными. В знакопеременных случаях точки с отрицательными значениями  $\varepsilon_r$  располагаются вблизи внутреннего и внешнего радиусов диска.

На рисунке 7 приведены графики тангенциальных деформаций  $\varepsilon_\theta(r)$ . Тангенциальные деформации существенно зависят от коэффициента Пуассона  $\mu$ . С увеличением  $\mu$  деформации  $\varepsilon_\theta$  увеличиваются в окрестности внутреннего радиуса и снижаются с другой стороны. Для сплошного диска увеличение  $\mu$  повышает  $\varepsilon_\theta$  при всех значениях радиальной координаты.

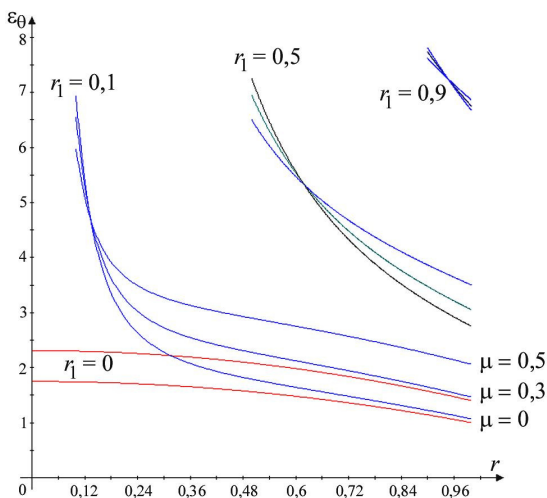


Рисунок 7 – Распределение тангенциальных деформаций

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

*У. Р. SMIRNOV, В. К. TARASOV*

## ON PRESSURE, DEFORMATION AND DISPLACEMENT DISTRIBUTION IN THE ROTATING DISK

It is considered and analyzed physically and geometrically linear problem of determining the strain-stress condition of the homogeneous rotating disk made from an isotropic material.

Получено 25.04.2012