$$\frac{d\Phi}{ds}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \sigma\\ 0 & -\sigma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_x & \tau_y & \tau_z\\ n_x & n_y & n_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kn_x & kn_y & kn_z\\ -k\tau_x+\sigma b_x & -k\tau_y+\sigma b_y & -k\tau_z+\sigma b_z\\ -\sigma n_x & -\sigma n_y & -\sigma n_z\end{pmatrix}$$

или
$$\begin{pmatrix}\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\\ \dfrac{d\vec{n}}{ds}\\ \dfrac{d\vec{b}}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\vec{n}\\ -k\vec{\tau}+\sigma\vec{b}\\ -\sigma\vec{n}\end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Рощева, Т. А.** Методические возможности использования теории линейных преобразований при изложении курса теоретической механики / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2009. – Вып. 3. – С. 197–205.

T. A. ROSHCHEVA, E. A. MITYUSHOV, O. S. KISELEVA

UNIVERSAL ALGORITHMS FOR PARTICLE AND SOLID BODY KINEMATICS

In the paper the universal method for calculating the kinematic characteristics for particle motion projected on the axis of moving coordinate systems based on the use of the matrix representation of Euler's formula is proposed.

Получено 11.09.2012

ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012

УДК 534.014

С. І. РУСАН

Баранавіцкі дзяржаўны універсітэт, Беларусь

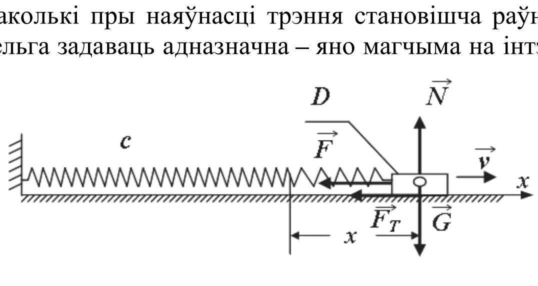
ДАСЛЕДАВАННЕ СПЫНЯЛЬНЫХ ВАГАННЯЎ ЦЕЛА

Вагальныя рухі часта з’яўляюцца вызначальным фактарам трываласці інжынерных канструкцый. Іх асноўныя уласцівасці мэтазгодна вывучаць на прасцейшых мадэлях, а затым пераходзіць да больш складаных пытанняў тэорыі ваганняў. Ніжэй аналізуецца рух цела ў механічнай сістэме с кулонавым трэннем.

Спыняльныя ваганні ўяўляюць сабою разнавіднасць згасальных ваганняў. Яны ўзнікаюць пры наяўнасці ў механічнай сістэме сухога трэння. Тэрмін «спыняльныя ваганні» запазычаны з вучэбнага дапаможніка [1]. Сутнасць тэрміна раскрываецца ніжэй пры апісанні ўласцівасцей такіх ваганняў. Спыняльныя ваганні шырока распаўсюджаны ў тэхніцы, аднак у вучэбным працэсе застаюцца па-за ўвагай. У прыватнасці, у вучэбнай літаратуры ([1, 2] і інш.) не разгледжаны варыянт кінематычнага ўзбуджэння ваганняў, не ўведзена паняцце дэкрэмента, не абмяркоўваецца пытанне працягласці ваганняў і г. д. Верагодная прычына такога становішча палягае ў тым, што працэс вывучэння спыняльных ваганняў больш карпатлівы і працаёмкі, чым звычайных згасальных ваганняў, а час, адведзены на вывучэнне тэмы, абмежаваны. Не прывабная для вывучэння асаблівасць спыняльных ваганняў заключаецца ў тым, што на кожным размаху рух цела апісваецца іншымі дыферэнцыяльным і кінематычным ураўненнямі.

Ніжэй выбраны стыль выкладання матэрыяла, даступны для дапытлівых студэнтаў.

Дыферэнцыяльныя ўраўненні ваганняў. Мадэль спыняльных ваганняў не істотна адрозніваецца ад мадэлей іншых відаў ваганняў (рысунак 1). Цела D, прымацаванае да свабоднага канца спружыны жорсткасці c, рухаецца ўправа са скорасцю v па шурпатай плоскасці. На яго дзейнічаюць: сіла цяжару $G = mg$ (m – маса цела, g – паскарэнне свабоднага падзення), сіла трэння слізгання $F_{\text{т}} = f_1 N$, нармальная рэакцыя плоскасці $N = G$ і аднаўляльная сіла (інакш – рэакцыя спружыны) $F = cx$. У крайніх становішчах (пры $v = 0$), калі цела мяняе напрамак руху, сіла трэння слізгання $F_{\text{т}}$ пераходзіць у сілу счаплення $F_{\text{сч}} = fN$. Паколькі дынамічны каэфіцыент трэння f_1 меншы, чым статычны f, то $F_{\text{т}} < F_{\text{сч}}$. Пачатак адліку 0 каардынаты цела x сумяшчаецца са становішчам яго *абсалютнай* раўнавагі, г. зн. *пры адсутнасці трэння*. Выдзелянае тут курсівам удакладненне неабходна, паколькі пры наяўнасці трэння становішча раўнавагі, як вядома са статыкі, нельга задаваць адназначна – яно магчыма на інтэрвале.



Рысунак 1

Цела D разглядаем як матэрыяльны пункт. Рашаем для яго другую задачу дынамікі. Запісываем дыферэнцыяльнае ўраўненне руху цела: $m\ddot{x} = \pm F_{\text{т}} - F$

ці $m\ddot{x} = \pm f_1 mg - cx$. Пасля простага пераўтварэння атрымліваем дыферэнцыяльнае ураўненне спыняльных ваганняў:

$$\ddot{x} = +k^2 x = \pm f_1 g \,. \tag{1}$$

Тут велічыня $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, як і ў свабодных ваганнях, уяўляе цыклічную частату. Дыферэнцыяльнае ўраўненне (1) адрозніваецца ад ураўнення свабодных ваганняў наяўнасцю правай часткі. Яна прымаецца дадатнай падчас руху цела супраць напрамку восі каардынат; пры гэтым праекцыя скорасці на вось адмоўная $(\dot{x} < 0)$, а праекцыя сілы трэння дадатная $(f_1 mg > 0)$. Як бачым, знак правай часткі ўраўнення (1) залежыць ад знака праекцыі сілы трэння, якая, у сваю чаргу, вызначаецца напрамкам скорасці цела.

Агульнае рашэнне ўраўнення (1). Рашэнне лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення (1), як заўжды, прадстаўляем у выглядзе сумы:

$$x = x_1 + x_2 \,, \tag{2}$$

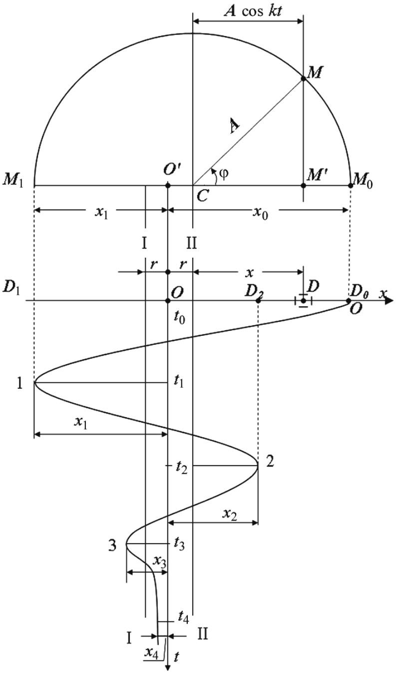
дзе x_1, x_2 – адпаведна рашэнне аднароднага (пры $f_1 g = 0$) і неаднароднага ўраўнення (1).

Прыняўшы рашэнне x_1 у экспаненцыяльнай форме $x = e^{nt}$, прыходзім да характарыстычнага ўраўнення $n^2 + k^2 = 0$, карані якога роўны: $n_{1,2} = \pm ik$ (тут $i = \sqrt{-1}$). Ім адпавядае агульнае рашэнне $x_1 = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$. Рашэнне неаднароднага ўраўнення x_2 прымаем у выглядзе пастаяннай $x_2 = \pm C$. Падстаўляем x_2 і $\ddot{x}_2$ у (1) замест x, $\ddot{x}$. Знойдзем: $x_2 = \pm \dfrac{f_1 g}{k^2}$.

Абазначым выраз $\dfrac{f_1 g}{k^2}$ літарай r. Атрымаем агульнае рашэнне ўраўнення (1) $x(t)$ і ўраўненне скорасці цела v_x:

$$x(t) = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \pm r\,; \;\; v_x = \dot{x} = k\left(C_1 \cos kt - C_2 \sin kt\right). \tag{3}$$

Тут залежнасць знака велічыні r ад напрамку руху цела такая, як і ва ўраўненні (1). Як відаць з ураўнення (3), цела, выведзенае са стану раўнавагі, выконвае *гарманічныя ваганні*. Паколькі ў вагальнай сістэме прысутнічае трэнне, то яны згасальныя. Каб ваганні распачаліся, неабходна ўвесці ў сістэму пачатковую кінетычную альбо патэнцыяльную энергію (можна і абедзве адначасова). Адпаведныя ім спосабы ўзбуджэння ваганняў назавем *кінематычным* і *геаметрычным*. У першым выпадку целу надаецца пачатковая скорасць v_0, у другім – цела змяшчаецца на адлегласць x_0 ад становішча раўнавагі. Ніжэй будуць разгледжаны абодва спосабы.



Рысунак 2

Геаметрычнае ўзбуджэнне ваганняў. Адхілім цела ад пачатку каардынаты O ўправа на адлегласць x_0 у становішча D_0 і адпусцім без пачатковай скорасці (рысунак 2). Калі ў гэтым палажэнні аднаўляльная сіла F расцягнутай спружыны будзе большая, чым сіла счаплення, то яно пачне рухацца да цэнтра O, г. зн. пачнецца працэс ваганняў. Неабходная ўмова для пачатку ваганняў выражаецца няроўнасцю $c|x_0| > fmg$ альбо $|x_0| > \dfrac{fg}{k^2}$. Абазначым выраз $\dfrac{fg}{k^2}$ літарай r'. Тады умова пачатку руху набывае выгляд:

$$|x_0| > r' . \tag{4}$$

Будзем лічыць, што няроўнасць (4) выконваецца. Каб вызначыць пастаянныя C_1, C_2 ва ўраўненнях (3) выкарыстоўваем пачатковыя ўмовы: пры $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = 0$.

Атрымліваем: $x_0 = 0 + C_2 + r$, $0 = k(C_1 - 0)$; адсюль $C_1 = 0$, $C_2 = x_0 - r$. Падстаўляем пастаянныя C_1, C_2 у (3); у выніку знаходзім кінематычнае ўраўненне руху цела $x(t)$ і ўраўненне яго скорасці v_x на першым размаху:

$$x(t) = (x_0 - r)\cos kt + r ; \; v_x = -k(x_0 - r)\sin kt . \tag{5}$$

Аналіз першага размаху ваганняў цела. Формулы (5) справядлівы ў інтэрвале ад $x = x_0$ да $x = -x_1$, дзе x_1 – каардыната цела ў крайнім левым становішчы. Перамяшчэнні цела з крайняга правага становішча ў крайняе левае ці наадварот называюць *размахамі* ваганняў, а яго наібольшыя адхіленні ад цэнтра ваганняў O – *амплітудамі*. Размахі ваганняў, падчас якіх цела рухаецца ў напрамку восі Ox, будзем называць *прамымі*, а размахі процілеглага напрамку – *адваротнымі*. Прыкметай прамога размаху ў формуле (5) можа служыць знак мінус перад параметрам r, што уваходзіць ва ўраўненне руху асобным складнікам. Ва ўраўненні (5) ён дадатны, таму што цела здзяйсняе адваротны размах. Зробленая тут заўвага аб знаках справядліва і для правай часткі дыферэнцыяльнага ўраўнення (1): калі ўраўненне апісвае прамы размах, то правая частка адмоўная, і наадварот.

Крайнія пункты размаху 0, 1 называюцца яго *вяршынямі*. Каардынаты вяршынь роўны адпаведна $x = x_0$, $x = x_1$. З ураунення (5) відаць, што размах 0–1 уяўляе сабою касінусоіду з амплітудай $A = x_0 - r$, цэнтр якой ссунуты ад цэнтра ваганняў управа на адлегласць $x = r$ (рысунак 2). Параметр r будзем называць *эксцэнтрысітэтам размахаў*. Як бачым, амплітуда касінусоіды A не супадае з амплітудамі ваганняў x_0, x_1.

Для вызначэння працягласці першага размаху t_1 зручна скарыстацца кругавой мадэллю, што паказана ўверсе на рысунку 2. На ей ваганне цела D мадэліруецца рухам праекцыі M' на дыяметр M_1M_0 пункта M, які раўнамерна перамяшчаецца па акружнасці радыуса A са становішча M_0 у M_1. Пры гэтым фаза ваганняў φ змяняецца ад значэння $\varphi_0 = kt_0 = 0$ да велічыні $\varphi_1 = kt_1 = \pi$.

Адсюль $t_1 = \dfrac{\pi}{k}$.

Вызначэнне параметраў другога і трэцяга размахаў. Прамы размах 1-2 (гл. рысунак 2) апісваецца дыферэнцыяльным ураўненнем (1) з адмоўнай правай часткай. За пачатак руху прымаем становішча D_1 цела D, якому на графіку вагання адпавядае пункт 1. Таму пачатковыя ўмовы запісваюцца так: пры $t = t_1 \quad x = -x_1$, $\dot{x} = 0$. Велічыню x_1 знаходзім з першага ўраўнення (5). Пры $t_1 = \dfrac{\pi}{k}$ атрымліваем: $x_1 = (x_0 - r)(-1) + r = -x_0 + 2r$. Цяпер для вызначэння новых пастаянных ва ўраўненні (3) маем: $-x_0 + 2r = -C_2 - r$, $0 = -kC_1$; адкуль $C_1 = 0$, $C_2 = x_0 - 3r$ і паводле (3)

$$x(t) = (x_0 - 3r)\cos kt - r; \; v_x = -k(x_0 - r)\sin kt. \qquad (6)$$

Мы атрымалі кінематычнае ўраўненне і ўраўненне скорасці руху цела для размаху D_1D_2, якому адпавядае участак 1–2 графіка ваганняў. Адзначым, што рух цела у пункце D_1 распачнецца, калі выконваецца ўмова, аналагічная (4): $|x_1| > r'$. З першага ўраўнення (6) відаць, што радыус новай кругавой мадэлі $A_1 = x_0 - 3r$. У становішчы D_2 скорасць цела роўна нулю і паводле (6) $\sin k(t_2 - t_1) = 0$, $k(t_2 - t_1) = \pi$, $t_2 - t_1 = \dfrac{\pi}{k}$ і $t_2 = \dfrac{2\pi}{k}$. Як бачым, працягласць другога размаху $t_2 - t_1$ роўна працягласці першага t_1, а працягласць перамяшчэння цела са становішча D_0 у D_2 роўна перыяду ваганняў $T = t_2 = \dfrac{2\pi}{k}$. Такім чынам, *перыяд спыняльных ваганняў цела не адрозніваецца ад перыяду свабодных ваганняў*, у той час, як пры наяўнасці ў сістэме вязкага трэння, ён павялічваецца.

Каб перайсці да трэцяга размаху, трэба вызначыць пачатковыя умовы ў пункце D_2. З першага ўраўнення (6) пры $t_2 = \dfrac{2\pi}{k}$ знаходзім: $x_2 = x_0 - 4r$. Правяраем выкананне няроўнасці $|x_2| > r'$. Затым вызначаем пастаянныя ва ўраўненнях (2); яны роўны: $C_1 = 0\,, C_2 = x_0 - 5r$. Атрымліваем ураўненні руху і скорасці цела на трэцім размаху:

$$x(t) = (x_0 - 5r)\cos kt + r\,;\; v_x = -k(x_0 - 5r)\sin kt\,. \tag{7}$$

Адсюль у момант часу $t_3 = \dfrac{3\pi}{k}$ знаходзім: $x_3 = -x_0 + 6r$.

Працэс складання ўраўненняў руху працягваецца да таго часу, пакуль выконваецца ўмова (4): $x_n > r'$. Пры гэтым для n-га размаху атрымаем:

$$x(t) = [x_0 - (2n-1)r]\cos kt \pm r\,;\; v_x = -k[x_0 - (2n-1)r]\sin kt\,. \tag{8}$$

Каардыната пункта $D_{n\text{-}1}$, што адпавядае пачатку n-га размаху, вызначаецца па формуле: $x_n = \pm x_0 \mp 2nr$. Тут і ў першай формуле (8) верхнія знакі прымаюцца для цотных n. Амплітуда касінусоіды ў формуле (8) роўна $A = x_0 - (2n-1)r$. Ад паловы размаху яна адрозніваецца на велічыню эксцэнтрысітэта r. Як ужо адзначалася, цэнтры размахаў зрушаны ад цэнтра ваганняў O на адлегласць r: у прамых размахаў улева ад пункта O, у адваротных – управа. Калі на графіку ваганняў гэтыя цэнтры злучыць паміж сабою, то атрымаем прамыя, паралельныя да восі Ot (рыс.2): I-I – для прамых размахаў, II-II – для адваротных. Велічыню размаху L можна выразіць праз каардынаты яго вяршынь па формулах: $L_1 = |x_0| + |x_1|$, $L_2 = |x_1| + |x_2|\,, L_3 = |x_2| + |x_3|\,,\ldots,$ $L_n = |x_{n-1}| + |x_n|$. Калі ўлічыць знойдзеныя вышэй значэнні каардынат, то атрымаем:

$$L_1 = 2x_0 - 2r\,,\; L_2 = 2x_0 - 6r\,,\; L_3 = 2x_0 - 10r\,,$$

$$L_n = 2x_0 - [2 + 4(n-1)]r\,. \tag{9}$$

Аналіз згасання ваганняў. Змясцім паслядоўныя амплітудныя значэнні каардынат цела x_0, x_1, x_2,…x_n, x_{n+1} у табліцу 1. Лёгка заўважыць, што розніца абсалютных значэнняў сумежных амплітуд падчас ваганняў застаецца пастаяннай: $|x_n| - |x_{n+1}| = 2r$. Гэта азначае, што *амплітуды памяншаюцца па закону арыфметычнай прагрэсіі*, рознасць якой роўна $2r$. Для размахаў гэта рознасць, як відаць з формулы (9), роўна $4r$. З табліцы 1 можна заўважыць, што і для сумежных аднабаковых амплітуд x_0, x_2, x_4,…, яна таксама роўна $4r$. Відавочна, калі злучыць правыя вяршыні размахаў 0, 2, 4, … і асобна левыя 1, 3, 5, …, то атрымаем дзве прамыя, паміж якімі знаходзіцца графік спыняльных ваганняў. Як і пры вывучэнні звычайных згасальных ваганняў, гэтыя лініі будзем называць *агінальнымі*. Бягучыя каардынаты пунктаў правай і левай прамых абазначым адпаведна літарамі $\bar{x}(t)$, $\bar{x}'(t)$. Можна паказаць, што агінальныя сіметрычны адносна восі Ot і таму перасякаюцца з ёй у адным пункце (рысунак 3). Для гэтага дастаткова вывесці іх ураўненні ў сістэмах каардынат $O\bar{x}t$ і $O\bar{x}'t$, што супадаюць з сістэмай Oxt, у якой пабудаваны графік ваганняў. Усе лініі – графік ваганняў і агінальныя – маюць агульныя пункты 0, 1, 2, …, для якіх $\bar{x}_0(t_0) = x_0$, $\bar{x}_1'(t_1) = x_1$, $\bar{x}_2(t_2) = x_2$, … . Як для пабудовы прамой, так і для вывада яе ўраўнення, дастаткова двух зададзеных пунктаў, напрыклад, $\bar{x}_0(t_0) = x_0$, $\bar{x}_2(t_2) = x_2$ для правай агінальнай і $\bar{x}_1'(t_1) = x_1$ $\bar{x}_3'(t_3) = x_3$ для левай. Выканаўшы нескладаныя матэматычныя аперацыі, атрымаем ураўненні агінальных:

$$\bar{x}(t) = x_0 - \left(\frac{2rk}{\pi}\right)t \; ; \; \bar{x}'(t) = -x_0 + \left(\frac{2rk}{\pi}\right)t \, . \qquad (9)$$

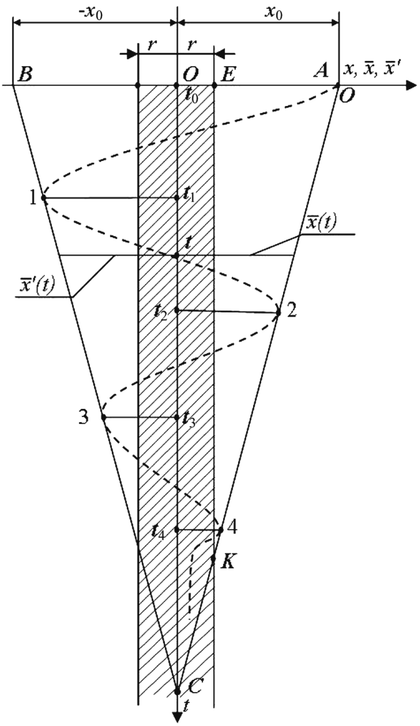
Табліца 1 – **Згасанне ваганняў пры геаметрычнам ўзбуджэнні**

Момант часу	Абазна-чэнне	t_0	t_2	t_2	t_2	…	t_n	t_{n+1}
	Зна-чэнне	0	π/k	$2\pi/k$	$3\pi/k$	…	$n\pi/k$	$(n+1)\pi/k$
Амплітуда	Абазна-чэнне	x_0	x_2	x_2	x_2	…	x_n	x_{n+1}
	Зна-чэнне	x_0	$-x_0 + 2r$	$x_0 - 4r$	$-x_0 + 6r$	…	$\mp x_0 \pm 2(n+1)r$	$\mp x_0 \pm 2(n+1)r$

Аналізуючы гэтыя ўраўненні, прыходзім да высновы, што адпаведныя ім прамыя AC і BC сіметрычны адносна восі Ot.

Як вядома, для апісання асаблівасцей звычайных згасальных ваганняў (пры вязкім супраціўленні) уводзіцца адмысловы параметр η – *дэкрэмент* (ад лацінскага decrementum – убыванне) *ваганняў*. Ён характарызуе хуткасць змяншэння іх размахаў. У якасці дэкрэмента спыняльных ваганняў можна прыняць тангенс вугла нахілу агінальнай АС да восі Ot (гл. рысунак 3): $\eta = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{(x_n - x_{n+2})}{(t_{n+2} - t_n)}$. Канчаткова $\eta = \dfrac{2rk}{\pi}$ (см/с).

Чым большае для вагальнай сістэмы значэнне η, тым хутчэй у ёй згасаюць ваганні цела.



Рысунак 3

Пераходзячы да вызначэння працягласці ваганняў, звернем увагу, што цела да астаноўкі выконвае цэлую колькасць ваганняў і таму спыніцца можа толькі ў канцы апошняга размаху (у яго вяршыні, а не ў прамежку). Гэта азначае, што *працягласць ваганняў кратна іх паўперыяду*. Як ужо адзначалася, пачатковая патэнцыяльная энергія прапарцыянальна каардынаце x_0. У працэсе ваганняў рэалізуецца жорсткая заканамернасць: першапачатковая каардыната x_0 за паўперыяд змяншаецца на $2r$. Інакш кажучы, патэнцыяльная энергія, уведзеная ў сістэму, вычэрпваецца раўнамернымі «дозамі», прапарцыянальнымі $2r$. З памяншэннем амплітуд ваганняў змяншаецца і прапарцыянальная ім аднаўляльная сіла F, што передольвае статычнае супраціўленне ў вяршынях касінусоід і забяспечвае «старт» наступнаму размаху. Наступае момант часу, калі яна не можа пераадалець сілу счаплення і цела спыняецца; пры гэтым выконваецца няроўнасць $|x_k| < r'$, дзе x_k – апошняя амплітуда ваганняў цела. Адпаведны ёй момант часу абазначым праз t_k; ён вызначае і працягласць ваганняў.

Выдзелім на восі Ox адрэзак $x = \pm r'$ (гл. рысунак 3). На графіку ваганняў яму адпавядае заштрыхаваная паласа, называемая «зонай застою». Калі пры згасанні ваганняў вяршыня размаху трапляе ў гэтую зону, то ваганні спыняюцца (пры яшчэ не вычарпанай патэнцыяльнай энергіі). Па гэтай прычыне іх называюць *спыняльнымі* ў адрозненне ад звычайных згасальных ваганняў, пры якіх амплітуда заўжды змяншаецца да нуля і цела спыняецца ў цэнтры ваганняў.

Цяпер, вывучыўшы ўмовы, пры якіх заканчваецца працэс ваганняў, лёгка вызначыць яго працягласць:

$$t_k = \frac{n_k \pi}{k}, \tag{10}$$

дзе n_k – колькасць паўперыядаў. Велічыню n_k знаходзім, прыняўшы да ўвагі, што пачатковая каардыната x_0 за адзін паўперыяд змяншаецца на $2r$.

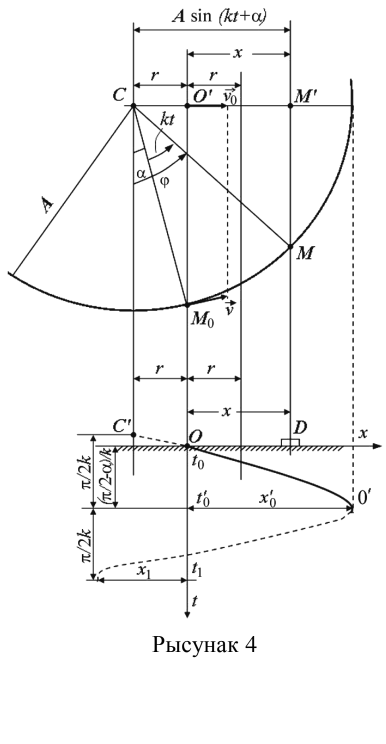
Прадстаўляем x_0 у выглядзе: $x_0 = p + s$. Тут p – цэлая частка дзелі ад дзялення каардынаты x_0 на $2r$, s – астатак дзялімага x_0. У залежнасці ад велічыні s магчымы два вынікі: калі $s < r'$ ці $s = 0$, то ў формуле (10) $n_k = p$; пры $s > r'$ цела будзе яшчэ рухацца на працягу паўперыяду, і таму $n_k = p + 1$. Па формуле (10) атрымліваем дакладны вынік. Набліжана працягласць ваганняў цела можна прыняць роўнай адрэзку часу EK (гл. рысунак 3). Знойдзем яго з першага ўраўнення (9). Запішам гэтае ураўненне для пункта K: $r' = x_0 - \left(\frac{2rk}{\pi}\right)EK$. Адсюль $EK \approx t_k = \frac{\pi(x_0 - r')}{2rk}$.

Установім механічны сэнс параметра $r = \frac{f_1 g}{k^2} = \frac{F_T}{c}$. Апошняя формула дазваляе назваць параметр r *адносным* (да жорсткасці c) *дынамічным супраціўленнем у вагальнай сістэме*. Чым большае ў сістэме значэнне r, тым хутчэй згасаюць ваганні. Блізкую па сэнсу характарыстыку $r' = \frac{fg}{k^2} = \frac{F_{\text{сч}}}{c}$ можна назваць *адносным статычным супраціўленнем*. Павелічэнне параметра r', а значыць, і пашырэнне “зоны застою” таксама прыводзіць да змяншэння працягласці ваганняў цела.

Кінематычнае ўзбуджэнне ваганняў. Мадэль ваганняў цела, прыведзеная вышэй, застаецца без змененняў. На цела ў адвольным становішчы дзейнічаюць тыя ж сілы. Цела выводзіцца са стану абсалютнай раўнавагі шляхам надання яму пачатковай скорасці v_0, накіраванай управа (рысунак 4). Таму рух цела напачатку будзе апісвацца дыферэнцыяльным ураўненнем (1) з адмоўнай правай часткай. Агульнае рашэнне (3) таксама запісываецца з адмоўным параметрам r. Для апісання руху цела на працягу пачатковай чвэрці перыяду агульнае рашэнне і ўраўненне скорасці зручна прадставіць у амплітуднай форме:

$$x = A\sin(kt + \alpha) - r\,;\ \dot{x} = A\cos(kt + \alpha). \quad (11)$$

Пастаянныя амплітуда сінусоіды A і пачатковая фаза α знаходзяцца з пачатковых умоў: пры $t = 0$ $x = x_0 = 0$, $v_x = \dot{x}_0 = v_0$.



Рысунак 4

Атрымліваем: $0 = A\sin\alpha - r$, $v_0 = Ak\cos\alpha$; адсюль $A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2 + r^2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{rk}{v_0}$. Момант часу калі цела дасягае крайняга правага становішча 0, абазначым праз t_0'. Каб знайсці велічыню x_0' у момант часу t_0', улічым, што ў гэты момант скорасць $\dot{x} = 0$. Тады з другога ўраўнення (11) знойдзем: $\cos(kt_0' + \alpha) = 0$. Паводле залежнасці $\sin^2(kt_0' + \alpha) + \cos^2(kt_0' + \alpha) = 1$ маем: $\sin(kt_0' + \alpha) = 1$, $kt_0' + \alpha = \frac{\pi}{2}$, $t_0' = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{k}$. Такім чынам, першае максімальнае адхіленне цела ад становішча раўнавагі (амплітуда ваганняў) знаходзіцца па формуле:

$$x_0' = A - r. \tag{12}$$

Каб лягчэй асэнсаваць атрыманы вынік, на рысунке 4 у версе пабудавана кругавая мадэль ваганняў. Фіктыўны адрэзак сінусоіды *C'O* адпавядае пачатковай фазе ваганняў α.

Для далейшага вывучэння ваганняў можна пераходзіць да наступнага размаху, выкарыстаўшы пачатковыя ўмовы руху ў пункце 0'. Але прасцей скарыстацца ўжо атрыманымі вынікамі пры геаметрычным узбуджэнні ваганняў. Для гэтага замест t_0' прымем $t_0 = 0$, а адпаведную амплітуду x_0' абазначым праз x_0; тады паводле (12) $x_0 = A - r$. Падставім гэтае значэнне x_0 у формулы, прыведзеныя ў табліцы 1. Атрымаем аналагічныя формулы для кінематычнага ўзбуджэння ваганняў (табліца 2). Усе ўстаноўленыя вышэй уласцівасці спыняльных ваганняў захоўваюцца без змяненняў. Працягласць ваганняў павялічваецца на адрэзак часу t_0'.

Табліца 2 – **Згасанне ваганняў пры кінематычным ўзбуджэнні**

Момант часу	Абазначэнне	t_0	t_0'	t_1	t_2	t_3	…	t_n
	Значэнне	0	0	$\frac{\pi}{k}$	$\frac{2\pi}{k}$	$\frac{3\pi}{k}$	…	$\frac{n\pi}{k}$
Амплітуда ваганняў	Абазначэнне	x_0	x_0'	x_1	x_2	x_3	…	x_n
	Значэнне	0	$A - r$	$-A + 3r$	$A - 5r$	$-A + 7r$	…	$\pm A \mp 7\pi r$

Спыняльныя ваганні цела апісваюцца звычайным лінейным неаднародным дыферэнцыяльным ураўненнем другога парадку. Для розных размахаў яны адрозніваюцца знакамі правай часткі. Змяншэнне амплітуд ваганняў адбываецца паводле закона ўбываючай арыфметычнай прагрэсіі, рознасць якой роўна $2r$. Устаноўлены механічны сэнс параметраў r і r'. Па аналогіі з апісаннем вагальных сістэм з вязкім трэннем, уведзена характарыстыка згасання спыняльных ваганняў – дэкрэмент ваганняў. Працягласць ваганняў вымяраецца цэлай колькасцю паўперыядаў. На гэтай падставе прапанавана методыка дакладнага вызначэння працягласці ваганняў; атрымана і формула для набліжанага яе вызначэння. Уведзены паняцці прамых і адваротных размахаў. Цэнтры тых і другіх на графіку ваганняў змешчаны на розных прамых, паралельных да восі Ot.

Прапанаваны алгарытм складання кінематычных ураўненняў руху цела і ўраўненняў яго скорасці для любога размаху без вызначэння адпаведных пастаянных інтэгравання. Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаны як у вучэбным працэсе для арганізацыі вучэбна-даследчай работы студэнтаў, так і ў інжынернай практыцы.

СПІС ЛІТАРАТУРЫ

1 **Лойцянский Л. Г.** Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – Москва: Гос. изд.-во тех.-теор. лит., 1955. – Т. II. – 595 с.

2 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Москва: Наука, 1971. – 462 с.

С. И. РУСАН

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА

Рассмотрено движение тела в колебательной механической системе с сухим трением при геометрическом и кинематическом способах начального возбуждения. Установлены закономерности затухания колебаний, предложена методика точного определения продолжительности колебаний и получена формула для ее приближенного определения. Показана возможность получения кинематического уравнения движения тела на любом размахе без составления и решения дифференциального уравнения колебаний.

S. I. RUSAN

STUDY OF THE DAMPED OSCILLATIONS OF BODY

There is considered the motion of the body in the oscillatory mechanical system with dry friction at the initial geometric and kinematic stimulation. Dependence of the compliance with the oscillation decaying has been determined, a method for precise determining the length of a vibration is proposed and a formula for the closest definition is obtained. The possibility of the kinematic equation of motion of the body in any scope without drawing up and the solution of a differential equation of oscillations is shown.

Получено 02.03.2012