ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012

УДК 531.1

Т. А. РОЩЕВА, Е. А. МИТЮШОВ, О. С. КИСЕЛЕВА

Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ КИНЕМАТИКИ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предложен универсальный метод вычисления кинематических характеристик движения точки в проекциях на оси подвижных систем координат, основанный на использовании матричного представления формулы Эйлера.

Одним из фундаментальных результатов, определившим развитие классической механики, а также краеугольным камнем, лежащим в основании этой науки, являются кинематические уравнения, выведенные Леонардом Эйлером в 1750 г. в мемуаре «Découverte d'un nouveau principe de Mécanique» («Открытие нового принципа механики»). К сожалению, все его наследие (кроме формулы, носящей его имя) остается за рамками учебных курсов теоретической механики. Существующая тенденция сокращения часов, отведенных на изучение этой дисциплины, привела к исчезновению многих разделов кинематики даже из курсов, читаемых по направлению «механика» в классических университетах. Задачи, решение которых основано на использовании полярной или цилиндрической систем координат предлагаются на олимпиадах Российского и Международного уровней или становятся объектами научных исследований. Сферические же координаты прописаны исключительно в списках компетенций курса математики.

Инженерное искусство стало закрытым для непосвященных, к числу которых относится нынче все бакалавры, лишенные возможности прослушать качественный курс теоретической механики.

Некоторые возможности совершенствования фундаментальной базы технического и естественнонаучного образования, одним из кирпичиков которой является теоретическая механика, дает в рамках существующих ограничений лекционного времени использование теории линейных преобразований при изложении курса [1]. Переход к этой новой парадигме преподавания теоретической механики требует некоторого согласования рабочих программ по курсам теоретической механики и математики и работы по снятию «шор» с ведущих методистов этих учебных дисциплин. Традиционный раздел линейной алгебры посвящен исключительно векторной алгебре, определителям, матрицам и теории решения линейных уравнений, в то время как уже в первой половине XX века основным содержанием линейной алгебры как науки стала теория линейных преобразований. Такой консерватизм в рабочих программах более чем странен, если учесть, что теория линейных преобразований в настоящее чрезвычайно активно применяется во многих прикладных областях, в частности при решении задач вычислительной геометрии, компьютерной графики, визуализации и анимации. Почему этот раздел оказался для будущих бакалавров менее важным, чем, например, решение дифференциальных уравнений четвертого порядка или вычисление моментов инерции тел с гипотетическим распределением масс с помощью тройных интегралов? Понятно, что вопрос об эффективном использовании учебного времени и наполнении рабочих программ требует отдельного обсуждения.

В данной работе предлагается алгоритм определения кинематических характеристик движения точки в проекциях на оси подвижных систем координат на основе матричного представления формулы Эйлера, не требующий от студентов дополнительных знаний и умений, кроме умений выполнять элементарные операции сложения и умножения матриц.

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной полностью определяется заданием матрицы линейного преобразования

$$P = P(t) = \left\| \alpha_{ij}(t) \right\| .$$

Элементы этой матрицы – направляющие косинусы ортов подвижной системы отсчета $\alpha_{ij}(t) = \cos(\widehat{Ox_i; Ox'_j})$. Нетрудно показать, что одним из собственных значений этой матрицы является 1. Это означает, что найдется система коллинеарных собственных векторов, удовлетворяющих равенству $P\hat{l} = \hat{l}$. То есть в каждый момент времени движения существует мгновенная ось вращения подвижной системы координат.

Как показано в работе [1], тензор угловой скорости такого поворота может быть представлен формулой

$$\Omega = \dot{P}(t) P^{-1}(t) . \tag{1}$$

Умножив обе части уравнения (1) справа на $P(t)$, получим

$$\dot{P} = \Omega P . \tag{2}$$

Вторая производная по времени от матрицы преобразования с учетом формулы (2) принимает вид

$$\ddot{P} = (\dot{\Omega} + \Omega^2) P . \tag{3}$$

При решении некоторых задач кинематики и динамики точки удобно воспользоваться подвижными системами отсчета с началом в рассматриваемой точке – такими, как оси естественного трехгранника, полярная, цилиндрическая или сферическая системы координат. Определение проекций скорости и ускорения точки на оси подвижных систем связано с определением производных по времени (или по дуговой координате) ортов этих систем.

Эти величины могут быть легко получены с использованием формул (2) и (3), если заметить, что записанные как элементы матриц проекции ортов подвижных систем на оси декартовой системы координат являются элементами матрицы преобразования последней при переходе к подвижной системе координат. Это обстоятельство приводит к необходимости рассмотрения обратного движения – неподвижной декартовой системы координат относительно рассматриваемой подвижной. При этом элементы тензора угловой скорости Ω противоположны по знаку элементам тензора угловой скорости вращения подвижной системы координат.

Так в полярной системе координат (рисунок 1)

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}; \quad \Pi = \begin{pmatrix} e_{\rho x} & e_{\rho y} \\ e_{\varphi x} & e_{\varphi y} \end{pmatrix};$$

$$\dot{\Pi} = \Omega\Pi\,; \ \ddot{\Pi} = (\dot{\Omega} + \Omega^2)\Pi\,;$$

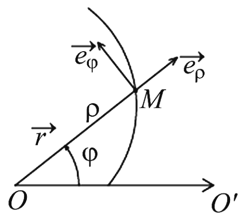

Рисунок 1 – Полярная система координат

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{\rho x} & \dot{e}_{\rho y} \\ \dot{e}_{\varphi x} & \dot{e}_{\varphi y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\rho x} & e_{\rho y} \\ e_{\varphi x} & e_{\varphi y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} e_{\varphi x} & \dot{\varphi} e_{\varphi y} \\ -\dot{\varphi} e_{\rho x} & -\dot{\varphi} e_{\rho y} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}_\rho \\ \dot{\vec{e}}_\varphi \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \vec{e}_\varphi \\ -\vec{e}_\rho \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{e}_{\rho x} & \ddot{e}_{\rho y} \\ \ddot{e}_{\varphi x} & \ddot{e}_{\varphi y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ -\ddot{\varphi} & -\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\rho x} & e_{\rho y} \\ e_{\varphi x} & e_{\varphi y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}^2 e_{\rho x} + \ddot{\varphi} e_{\varphi x} & -\dot{\varphi}^2 e_{\rho y} + \ddot{\varphi} e_{\varphi y} \\ -\ddot{\varphi} e_{\rho x} - \dot{\varphi}^2 e_{\varphi x} & -\ddot{\varphi} e_{\rho x} - \dot{\varphi}^2 e_{\varphi x} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \ddot{\vec{e}}_\rho \\ \ddot{\vec{e}}_\varphi \end{pmatrix} = \ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \vec{e}_\varphi \\ -\vec{e}_\rho \end{pmatrix} - \dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}.$$

Так как $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$, то

$$\overline{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

а ускорение точки получим, продифференцировав это выражение по времени

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \rho\ddot{\vec{e}}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

или

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

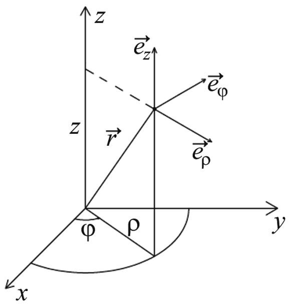

Рисунок 2 – Цилиндрическая система координат

В цилиндрической системе координат (рисунок 2)

$$\dot{Z} = \Omega Z\ ;$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dot\varphi & 0 \\ -\dot\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z = \begin{pmatrix} \mathrm{e}_{\rho x} & \mathrm{e}_{\rho y} & \mathrm{e}_{\rho z} \\ \mathrm{e}_{\varphi x} & \mathrm{e}_{\varphi y} & \mathrm{e}_{\varphi z} \\ \mathrm{e}_{zx} & \mathrm{e}_{zy} & \mathrm{e}_{zz} \end{pmatrix};$$

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{\mathrm{e}}_{\rho x} & \dot{\mathrm{e}}_{\rho y} & \dot{\mathrm{e}}_{\rho z} \\ \dot{\mathrm{e}}_{\varphi x} & \dot{\mathrm{e}}_{\varphi y} & \dot{\mathrm{e}}_{\varphi z} \\ \dot{\mathrm{e}}_{zx} & \dot{\mathrm{e}}_{zy} & \dot{\mathrm{e}}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dot\varphi & 0 \\ -\dot\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}_{\rho x} & \mathrm{e}_{\rho y} & \mathrm{e}_{\rho z} \\ \mathrm{e}_{\varphi x} & \mathrm{e}_{\varphi y} & \mathrm{e}_{\varphi z} \\ \mathrm{e}_{zx} & \mathrm{e}_{zy} & \mathrm{e}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\varphi\mathrm{e}_{\varphi x} & \dot\varphi\mathrm{e}_{\varphi y} & \dot\varphi\mathrm{e}_{\varphi z} \\ -\dot\varphi\mathrm{e}_{\rho x} & -\dot\varphi\mathrm{e}_{\rho y} & -\dot\varphi\mathrm{e}_{\rho z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или
$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}_\rho \\ \dot{\vec{e}}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_z \end{pmatrix} = \dot\varphi \begin{pmatrix} \vec{e}_\varphi \\ -\vec{e}_\rho \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\vec{e}}_\rho \\ \ddot{\vec{e}}_\varphi \\ \ddot{\vec{e}}_z \end{pmatrix} = \ddot\varphi \begin{pmatrix} \vec{e}_\varphi \\ -\vec{e}_\rho \\ 0 \end{pmatrix} + \dot\varphi \begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}_\varphi \\ -\dot{\vec{e}}_\rho \\ 0 \end{pmatrix} = \ddot\varphi \begin{pmatrix} \vec{e}_\varphi \\ -\vec{e}_\rho \\ 0 \end{pmatrix} + \dot\varphi^2 \begin{pmatrix} -\vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

или
$$\ddot{\vec{e}}_\rho = \ddot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} - \dot\varphi\overrightarrow{e_\rho}\ ;\ \ddot{\vec{e}}_\varphi = -\ddot\varphi\overrightarrow{e_\rho} + \dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\ ;\ \ddot{\vec{e}}_z = 0\ .$$

В цилиндрической системе координат $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + ze_z$, тогда

$$\overline{v} = \dot{\vec{r}} = \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{e}_z = \dot\rho\vec{e}_\rho + \rho\dot\varphi\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z\ ,$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot\rho\vec{e}_\rho + 2\dot\rho\dot{\vec{e}}_\rho + \rho\ddot{\vec{e}}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec{e}_\rho + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

или
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 \\ 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi \\ \ddot{z} \end{pmatrix},$$

или
$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\ ;\ a_\varphi = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi\ ;\ a_z = \ddot{z}\ .$$

В сферической системе координат имеют место следующие соотношения, получаемые аналогичным способом (рисунок 3)

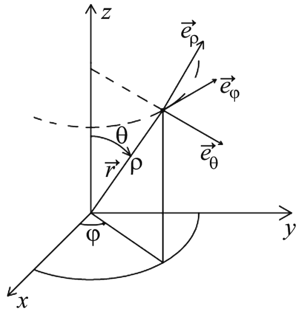

Рисунок 3 – Сферическая система координат

$$\dot{C} = \Omega C\,;$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dot\varphi\cos\theta & -\dot\theta \\ -\dot\varphi\cos\theta & 0 & -\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\theta & \dot\varphi\sin\theta & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} e_{\varphi x} & e_{\varphi y} & e_{\varphi z} \\ e_{\theta \mathrm{x}} & e_{\theta y} & e_{\theta z} \\ e_{\rho x} & e_{\rho x} & e_{\rho x} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dot e_{\theta x} & \dot e_{\theta y} & \dot e_{\theta z} \\ \dot e_{\varphi x} & \dot e_{\varphi y} & \dot e_{\varphi z} \\ \dot e_{\rho x} & \dot e_{\rho x} & \dot e_{\rho x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot\varphi\cos\theta & -\dot\theta \\ -\dot\varphi\cos\theta & 0 & -\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\theta & \dot\varphi\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\theta x} & e_{\theta y} & e_{\theta z} \\ e_{\varphi x} & e_{\varphi y} & e_{\varphi z} \\ e_{\rho x} & e_{\rho x} & e_{\rho x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot\varphi\cos\theta e_{\varphi x} - \dot\theta e_{\rho x} & \dot\varphi\cos\theta e_{\varphi y} - \dot\theta e_{\rho y} & \dot\varphi\cos\theta e_{\varphi z} - \dot\theta e_{\rho z} \\ -\dot\varphi\cos\theta e_{\theta x} - \dot\varphi\sin\theta e_{\rho x} & -\dot\varphi\cos\theta e_{\theta y} - \dot\varphi\sin\theta e_{\rho y} & -\dot\varphi\cos\theta e_{\theta z} - \dot\varphi\sin\theta e_{\rho z} \\ \dot\theta e_{\theta x} + \dot\varphi\sin\theta e_{\varphi x} & \dot\theta e_{\theta y} + \dot\varphi\sin\theta e_{\varphi y} & \dot\theta e_{\theta z} + \dot\varphi\sin\theta e_{\varphi z} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec e}_\theta \\ \dot{\vec e}_\varphi \\ \dot{\vec e}_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\varphi\cos\theta\vec{\mathrm{e}}_\varphi - \dot\theta\vec{e}_\rho \\ -\dot\varphi\cos\theta\vec{\mathrm{e}}_\theta - \dot\varphi\sin\theta\vec{\mathrm{e}}_\rho \\ \dot\theta\vec{\mathrm{e}}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\vec{\mathrm{e}}_\varphi \end{pmatrix};$$

или $\dot{\vec e}_\theta = \dot\varphi\cos\theta\vec{e}_\varphi - \dot\theta\vec{e}_\rho$; $\dot{\vec e}_\varphi = -\dot\varphi\cos\theta\vec{e}_\theta - \dot\varphi\sin\theta\vec{e}_\rho$; $\dot{\vec e}_\rho = \dot\theta\vec{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi$;

$$\begin{pmatrix} \ddot{\vec e}_\theta \\ \ddot{\vec e}_\varphi \\ \ddot{\vec e}_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \ddot\theta\vec{\mathrm{e}}_\Theta + \dot\theta\dot{\vec{\mathrm{e}}}_\theta + \ddot\varphi\sin\theta\vec{\mathrm{e}}_\varphi + \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\vec{\mathrm{e}}_\varphi + \dot\varphi\sin\theta\dot{\vec{\mathrm{e}}}_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ (\ddot\theta - \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\vec{\mathrm{e}}_\theta + (\dot\theta\dot\varphi\cos\theta + \ddot\varphi\sin\theta + \dot\varphi\dot\theta\cos\theta)\vec{\mathrm{e}}_\varphi - (\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)\vec{e}_\rho \end{pmatrix}.$$

В этой матрице вычислен только последний элемент, т. к.

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho\,,$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}(\cos\varphi\vec{e}_\theta + \sin\varphi\vec{e}_\varphi)\,;$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \rho\ddot{\vec{e}}_\rho = \begin{pmatrix} a_\theta \\ a_\varphi \\ a_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta \\ \rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + \rho\ddot{\varphi}\sin\theta + \rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta \\ \ddot{\rho} - \rho(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) \end{pmatrix}$$

или
$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} - \rho\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta\,;$$

$$a_\varphi = \rho\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + \rho\ddot{\varphi}\sin\theta + \rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta\,;$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)\,.$$

Таким образом, для вычисления проекции скорости и ускорения точки на оси подвижных систем координат требуется выполнение следующих действий:

– записать матрицу угловой скорости «обратного» вращения неподвижной системы отсчета в подвижной системе координат;

– записать матрицу, элементами которой являются проекции ортов подвижной системы на оси неподвижной;

– записать радиус-вектор точки в подвижной системе координат и непосредственным дифференцированием определить ее скорость и ускорение;

– провести необходимые вычислительные действия по формулам (2) и (3);

– получить результат, подставив в выражения скорости и ускорения соответствующие производные ортов подвижной системы отсчета, вычисленные на предварительном этапе.

В заключение заметим, что формулы Френе также могут быть получены с использованием соотношения (3). Действительно,

$$\dot{\Phi} = \Omega\Phi\,;\ \Phi = \begin{pmatrix} \tau_x & \tau_y & \tau_z \\ n_x & n_y & n_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix};\ \dot{s}\frac{d\Phi}{ds} = \Omega\Phi\,;$$

С учетом определения кривизны k и кручения σ кривой в точке тензор угловой скорости запишется через эти параметры следующим образом.

$$\Omega = \dot{s}\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \sigma \\ 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{d\Phi}{ds}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \sigma\\ 0 & -\sigma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_x & \tau_y & \tau_z\\ n_x & n_y & n_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kn_x & kn_y & kn_z\\ -k\tau_x+\sigma b_x & -k\tau_y+\sigma b_y & -k\tau_z+\sigma b_z\\ -\sigma n_x & -\sigma n_y & -\sigma n_z\end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix}\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\\ \dfrac{d\vec{n}}{ds}\\ \dfrac{d\vec{b}}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\vec{n}\\ -k\vec{\tau}+\sigma\vec{b}\\ -\sigma\vec{n}\end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Рощева, Т. А.** Методические возможности использования теории линейных преобразований при изложении курса теоретической механики / Т. А. Рощева, Е. А. Митюшов // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2009. – Вып. 3. – С. 197–205.

T. A. ROSHCHEVA, E. A. MITYUSHOV, O. S. KISELEVA

UNIVERSAL ALGORITHMS FOR PARTICLE AND SOLID BODY KINEMATICS

In the paper the universal method for calculating the kinematic characteristics for particle motion projected on the axis of moving coordinate systems based on the use of the matrix representation of Euler's formula is proposed.

Получено 11.09.2012

ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012

УДК 534.014

С. І. РУСАН

Баранавіцкі дзяржаўны універсітэт, Беларусь

ДАСЛЕДАВАННЕ СПЫНЯЛЬНЫХ ВАГАННЯЎ ЦЕЛА

Вагальныя рухі часта з'яўляюцца вызначальным фактарам трываласці інжынерных канструкцый. Іх асноўныя уласцівасці мэтазгодна вывучаць на прасцейшых мадэлях, а затым пераходзіць да больш складаных пытанняў тэорыі ваганняў. Ніжэй аналізуецца рух цела ў механічнай сістэме с кулонавым трэннем.