

N. K. PAPUSHINA, E. V. DANILOVA

GRAPHICAL RESEARCH METHODS FOR MULTILINK MECHANISM IN TRAINING THE PROFESSIONAL SKILLS OF AN ENGINEER

During the process of studying the mechanical engineering course such tasks as research and computation of mechanisms operation are considered to be of main priority in the training course of engineering specialists.

Получено 28.04.2011

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012**

УДК 531.132: 532.5.01

А. В. ПЕРИГ¹, Н. Н. ГОЛОДЕНКО²

¹ *Донбасская государственная машиностроительная академия,
Краматорск, Украина*

² *Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
Макеевка, Украина*

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КУРСЕ МЕХАНИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ-ХИМИКОВ

В рамках разработки учебного программного обеспечения для курса классической механики предложен и практически реализован быстрый алгоритм численного конечноразностного решения краевых задач для уравнений Навье-Стокса в форме уравнений переноса вихря, описывающих установившиеся плоские течения вязких несжимаемых ньютоновских жидкостей в составных переходных коленах трубопроводов простой геометрии.

К настоящему времени в ряде классических [1–2] и современных [3–8] курсов теоретической механики сформировался подход к одновременному изложению основных разделов динамики систем материальных точек и сплошных сред. Такое параллельное изложение целесообразно во втузах на фоне непрерывного сокращения аудиторных часов на изучение курсов высшей математики и технической механики. Поскольку основы тензорного и вариационного исчислений [7–8], теории управляемых движений, а также решение уравнений в частных производных [9] выходят за рамки курса теоретической механики во втузах, то эффективное изложение элементов динамики вязких жидкостей требует разработки соответствующего свободного программного обеспечения для иллюстрации излагаемых вопросов. Специфика построения курса механики для инженеров-химиков состоит в необходимости изложения разделов динамики системы как введения в курсы рео-

логии полимеров, что и обуславливает выбор соответствующих расчетных схем для течения вязких жидкостей через систему пересекающихся труб, обобщающих условие задачи 36.12 сборника Мещерского И. В. [10].

В рамках разработки учебного программного обеспечения рассмотрим численное нахождение линий тока и полей скоростей, основанное на конечно-разностном решении краевых задач для уравнений Навье-Стокса в форме уравнений переноса вихря, описывающих установившиеся плоские течения вязких несжимаемых ньютоновских жидкостей через систему пересекающихся труб одинакового поперечного сечения шириной a . В данном случае уравнения для количеств движения вязкой жидкости вместе с уравнением неразрывности имеют следующий вид:

$$v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \nabla^2 v_x; \quad (1)$$

$$v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \nabla^2 v_y; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; x, y – декартовы координаты точек

вязкого континуума; m ; v_x, v_y – проекции скоростей точек среды при координатном способе задания движения, м/с; ρ – плотность жидкости, кг/м³; p – давление в рассматриваемой точке среды, Па; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, Па·с.

Для стационарного течения в системе уравнений (1)–(2) полагаем $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0$. Выполним дифференцирование (1) по y и (2) по x , исключим

давление p и определим вихрь ζ как $\zeta = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

В консервативной форме уравнение переноса вихря (4) имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (v_x \zeta)}{\partial x} - \frac{\partial (v_y \zeta)}{\partial y} + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Будем определять функцию тока ψ следующими соотношениями

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y. \quad (6)$$

Тогда вихрь ζ запишется в виде $\zeta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$. Если перейти к безразмерным переменным, то безразмерный вихрь ζ определяется как $\tilde{\zeta} = \frac{\zeta a}{v_0}$, а

безразмерная функция тока $\tilde{\Psi} = \frac{\Psi}{(v_0 a)}$, где v_0 – скорость жидкости во входной трубе, м/с; характерный размер a – ширина трубы, м. Тогда уравнение (5) в безразмерном виде записывается как

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{t}} = -\text{Re} \left(\frac{\partial(\tilde{v}_x \tilde{\zeta})}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{v}_y \tilde{\zeta})}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad (7)$$

где введены следующие безразмерные величины: $\tilde{x} = \frac{x}{a}$; $\tilde{y} = \frac{y}{a}$ – координаты; $\tilde{v}_x = \frac{v_x}{v_0}$; $\tilde{v}_y = \frac{v_y}{v_0}$ – проекции скоростей точек среды; $\tilde{p} = \frac{p}{(\rho v_0^2)}$ – давление жидкости; $\tilde{t} = \frac{t \mu}{(\rho a^2)}$ – безразмерное время; $\text{Re} = \frac{\rho v_0 a}{\mu}$ – число Рейнольдса, причем $\tilde{x} = \text{Re} \cdot \tilde{v}_x \tilde{t}$; $\tilde{y} = \text{Re} \cdot \tilde{v}_y \tilde{t}$.

Уравнения (6) для функции тока $\tilde{\Psi}$ записываются аналогично:

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{v}_x; \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{v}_y, \quad (8)$$

а безразмерная функция вихря $\tilde{\zeta}$ имеет вид $\tilde{\zeta} = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}}$.

Разработка алгоритма. Для численного конечноразностного решения задачи (7) покроем расчетную зону пересечения труб (рисунок 1) равномерной сеткой квадратных элементов с последующей заменой искомым функций $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(\tilde{x}, \tilde{y})$; $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$; $\tilde{v}_x = \tilde{v}_x(\tilde{x}, \tilde{y})$; $\tilde{v}_y = \tilde{v}_y(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$ на функции узловых аргументов. Тогда соотношение (7) записывается в конечных разностях по методу чередующихся направлений [9]. Программная реализация осуществлена на языке Object Pascal (IDE Lazarus), причем процесс расчёта осуществляется достаточно быстро, поскольку в данном случае вместо системы (1)–(2) решается лишь одно уравнение (7).

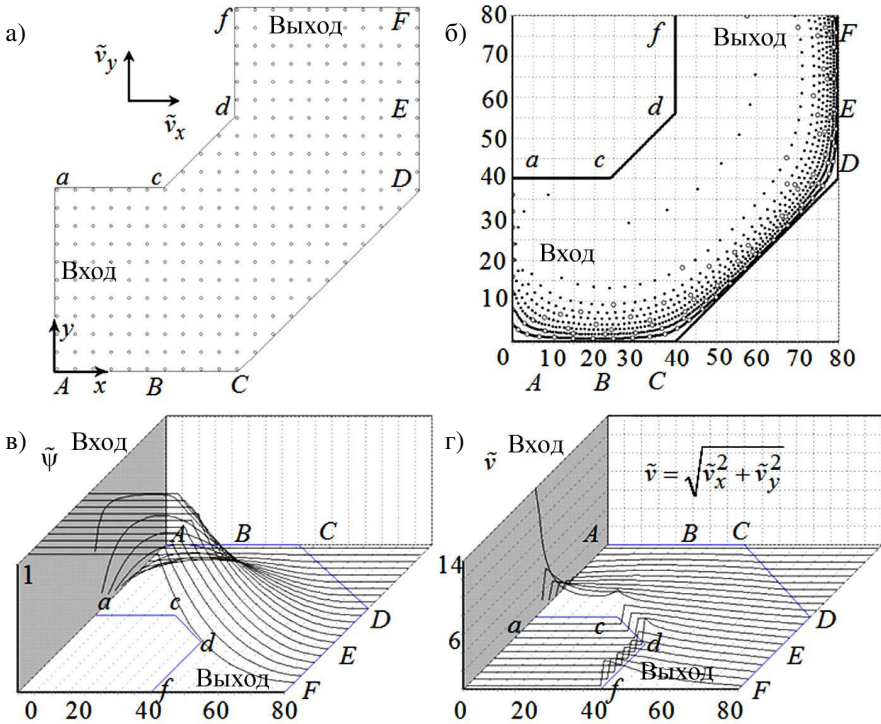


Рисунок 1 – Расчетная схема поперечного сечения зоны $acdf-ABCDEF$ пересечения трех труб одинакового поперечного сечения, заполненных вязкой жидкостью (a), расчетные линии тока с соответствующими изохронами ($б$), а также пространственные поля безразмерной функции тока $\tilde{\psi}$ ($в$) и модуля безразмерной скорости вязкого потока \tilde{v} ($г$), где вход (aA) – слева ($a-c$), а выход (fF) – вверх ($a, б$) и к нам ($в-г$)

В рамках разработки учебного программного обеспечения принимаем во внимание, что численная реализация алгоритма интегрирования уравнения переноса вихря (7) должна осуществляться в такой последовательности:

1 Задаем параметры вязкой жидкости (плотность, удельная теплоемкость, возможное значение коэффициента вязкости), а также геометрическую конфигурацию составной трубы, состоящей из спаянных цилиндров одинакового поперечного сечения, а также скорость истечения жидкости во входной трубе.

2 Построение конечноразностной сетки.

3 Задание начальных условий при $\tilde{t} = 0$.

4 Расчет нового значения момента безразмерного времени $\tilde{t} = \tilde{t} + \Delta\tilde{t}$, расчет нового значения функции вихря $\tilde{\zeta}$ во внутренних точках согласно (7).

5 Выполнение итераций для нахождения новых значений безразмерной функции тока $\tilde{\psi}$ во всех точках расчетной сетки по уравнениям $\nabla^2\tilde{\psi} = \tilde{\zeta}$ с использованием новых значений функции вихря $\tilde{\zeta}$ во внутренних точках; расчет нового значения скорости вязкого потока $\tilde{v} = \sqrt{\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2}$ по формулам (8).

6 Расчет новых граничных значений вихря $\tilde{\zeta}$ с использованием $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\zeta}$ во внутренних точках. Переход к шагу № 4.

7 Достижение стационарного решения с заданной степенью точности. Расчет линий тока и давления жидкости. Вывод вычисленного значения давления жидкости во входной трубе. Ввод нового приближения для значения коэффициента вязкости. Переход к шагу № 1.

8 Достижение расчетного значения давления жидкости во входной трубе, которое совпадает с заданным.

9 Представление результатов расчетов в виде графиков.

Решим краевую задачу для уравнения переноса вихря (7) в случае течения вязкой жидкости через составное колено, образованное тремя пересекающимися трубами одинакового поперечного сечения (см. рисунок 1).

Сформулируем начальные условия для уравнения (7). Во всей области составного колена (см. рисунок 1, *a, б*) функция вихря $\tilde{\zeta} = 1$. Во входной трубе колена, т.е. в области (*acDCBA*) имеем $\tilde{v}_x = 1$; $\tilde{v}_y = 0$, а в выходной трубе составного колена, т.е. в области (*fdCDEF*) имеем $\tilde{v}_x = 0$; $\tilde{v}_y = 1$ (см. рисунок 1).

Граничные условия для безразмерных функций вихря $\tilde{\zeta}$ и тока $\tilde{\psi}$ в уравнении переноса вихря (7) сформулируем из следующих соображений. Семейство линий функции тока $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = const$ представляет собой совокупность линий тока. Можем произвольно принять, что на линиях составной трубы, образующих внешнюю стенку колена (*ABCDEF*) на рисунке 1 *a, б* имеем $\tilde{\psi} = 0$; $\tilde{\zeta} = 0$; $\tilde{v}_x = 0$; $\tilde{v}_y = 0$; $\tilde{p} = 0$, а во внутренней области на рисунке 1 *a, б* выше и левее от внутренней стенки составного колена (*acdf*), вокруг которой закручиваются линии тока, считаем, что $\tilde{\psi} = 1$; $\tilde{\zeta} = 1$; $\tilde{v}_x = 0$; $\tilde{v}_y = 0$; $\tilde{p} = 0$. Здесь единица для значений $\tilde{\psi}$; $\tilde{\zeta}$ на внутренней стенке составной трубы (*acdf*) принимается потому, что величины функций тока $\tilde{\psi}$ и вихря $\tilde{\zeta}$ являются безразмерными (см. рисунок 1, *a, б*).

- Граничные условия для стенок колена (см. рисунок 1 *a, б*) имеют вид:
- для узлов на горизонтальной внутренней стенке (*ac*) $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i,j-1} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\zeta^2}$;
 - на наклонной внутренней стенке (*cd*) $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i+1,j} + \tilde{\Psi}_{i,j-1} - 2\tilde{\Psi}_{i,j})}{\zeta^2}$;
 - на вертикальной внутренней стенке (*df*) $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i+1,j} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\zeta^2}$;
 - в узле (*c*) – в левой вершине внутреннего тупого угла $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2\tilde{\Psi}_{i,j-1}}{\zeta^2}$;
 - в узле (*d*) – в правой вершине внутреннего тупого угла $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2\tilde{\Psi}_{i+1,j-1}}{\zeta^2}$;
 - для узлов на горизонтальной внешней стенке (*ABC*) $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i,j+1} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\zeta^2}$;
 - для узлов на наклонной внешней стенке (*CD*) имеем соотношение $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i-1,j} + \tilde{\Psi}_{i,j+1} - 2\tilde{\Psi}_{i,j})}{\zeta^2}$;
 - узлов на вертикальной внешней стенке (*DEF*) $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i-1,j} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\zeta^2}$;
 - для узлов на входной поверхности (*aA*) в зону колена $(\tilde{v}_x)_{i,j} = 1$;
 $(\tilde{v}_y)_{i,j} = 0$; $\tilde{\Psi}_{i,j} = \tilde{\Psi}_{i+1,j}$;
 - для узлов на выходной поверхности (*fF*) из зоны колена $(\tilde{v}_x)_{i,j} = 0$;
 $\tilde{\zeta}_{i,j} = \tilde{\zeta}_{i,j-1}$; $\tilde{\Psi}_{i,j} = 2\tilde{\Psi}_{i,j-1} - \tilde{\Psi}_{i,j-2}$, где ζ – шаг сетки.

Очевидно, что граничные условия вниз по течению вязкого потока следует брать на наиболее удаленной границе сетки. Фактически наклонный участок колена (*cd-CD*) создает вклад, подобный тому, какой бы создавало внешнее закругление.

Из формул Пуазейля определяем расход вязкой жидкости:

$$Q = \frac{v_y \pi a^2}{4} = \frac{\pi a^4 \Delta p}{128 \zeta \mu}, \quad (9)$$

откуда следуют выражения для перепадов размерного и безразмерного давления на шаге ζ координаты:

$$\Delta p = \frac{32 \zeta \mu v_y}{a^2}; \quad \Delta \tilde{p} = \frac{32 \zeta \mu v_y}{\rho v_0^2 a^2}. \quad (10)$$

Таким образом, граничные условия на входе (*aA*) в зону пересечения трех труб (см. рисунок 1, *a, б*) имеют вид

$$\tilde{\Psi}_{i,-1} = -\frac{i}{m}; p_{i,-1} = \tilde{p}_{i,0} + \frac{32\zeta\mu v_y}{\rho v_0^2 a^2}. \quad (11)$$

Граничные условия на выходе (FF) (см. рисунок 1, $a, б$) записываем в виде

$$\tilde{\Psi}_{m+1,j} = \tilde{\Psi}_{m,j}; \tilde{p}_{m+1,j} = 0. \quad (12)$$

В рамках разработки учебной компьютерной программы, уравнение (7) численно интегрировалось с соответствующими начальными и граничными (9)–(12) условиями, причем функция тока $\tilde{\Psi}$ и давление \tilde{p} определялись итерационным методом Рундсона. На рисунке 1 приведены расчетные результаты, полученные для течения пластилиновой модели вязкой жидкости, вычисленные для следующих входных параметров: ширина сечения каждой из труб составного колена $a = 40$ мм, плотность пластилиновой модели жидкости $\rho = 1850$ кг/м³, предел текучести $\sigma_s = 217$ кПа, удельная теплоемкость пластилина $c = 1,004$ кДж/(кг·К), удельная теплопроводность $\lambda = 0,7$ Дж/(м·с·К), скорость истечения вязкой жидкости во входной трубе $v_0 = 0,27$ мм/с, динамическая вязкость жидкости $\mu = 135$ Па·с, число Рейнольдса $Re = 1,48 \cdot 10^{-4}$, число шагов координаты $n = 80$, момент времени для построения первой изохроны $t_1 = 30$ с и погрешность итераций $\epsilon = 0,001$.

В рамках дальнейшего развития предложенного расчетного подхода рассмотрим задачу течения вязкой жидкости через составное колено, образованное тремя трубами одинакового поперечного сечения, пересекающимися под прямыми углами (рисунок 2). Начальные условия берем в виде приближения к стационарному решению:

$$(\tilde{v}_x)_{i,j}^0 = 0; (\tilde{v}_y)_{i,j}^0 = 0; \tilde{\zeta}_{i,j}^0 = 0; \tilde{\Psi}_{i,j}^0 = 0. \quad (13)$$

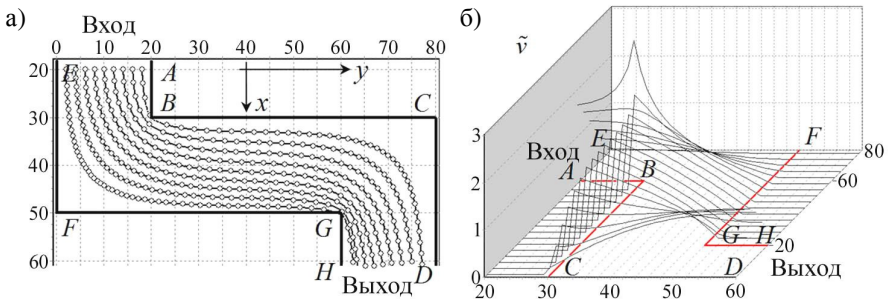


Рисунок 2 – Расчетные линии тока с соответствующими изохронами в поперечном сечении зоны $ABCD-EFGH$ пересечения трех труб одинакового поперечного сечения (a), где начальные точки взяты на расстоянии 20 шагов координаты от входа AE с одинаковым шагом вдоль оси y , ширина канала $a = 40$ мм, метки времени выбраны через 50 с, а также пространственное поле модуля скорости вязкого потока \tilde{v} (b), причем вход (AE) – сверху (a) и слева (b), а выход (DH) – вниз (a) и вправо (b)

Граничные условия для стенок составного прямоугольного колена (условия с прилипанием) имеют следующий вид:

– для границы потока ($ABCD$) имеем $\tilde{\Psi}_{i,j} = 0$;

– для границы потока ($EFGH$) $\tilde{\Psi}_{i,j} = 0$;

– для участков (AB) и (CD) $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i,j-1} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\eta^2}$;

– для участка (BC) $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i+1,j} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\xi^2}$;

– для участков колена (EF) и (GH) имеем $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i,j+1} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\eta^2}$;

– для переходного участка (FG) имеем $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i-1,j} - \tilde{\Psi}_{i,j})}{\xi^2}$;

– для угловых точек, лежащих в вершинах «вогнутых» углов C и F , $\tilde{\zeta}_{i,j} = 0$;

– для угловой точки B в разностном уравнении, записанном для узла $(i, j - 1)$, $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2\tilde{\Psi}_{i,j-1}}{\eta^2}$, а в разностном уравнении, записанном для узла

$(i + 1, j)$, $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2\tilde{\Psi}_{i+1,j}}{\xi^2}$;

– для угловой точки G в разностном уравнении, записанном для узла $(i - 1, j)$, $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2\tilde{\Psi}_{i-1,j}}{\xi^2}$, а в разностном уравнении, записанном для узла

$(i, j + 1)$, $\tilde{\zeta}_{i,j} = \frac{2\tilde{\Psi}_{i,j+1}}{\xi^2}$;

– на входе (AE) имеем: $\tilde{\Psi}_{0,j} = \tilde{\Psi}_{1,j}$; $(\tilde{v}_x)_{0,j} = 1$; $(\tilde{v}_y)_{0,j} = 0$;

– на выходной поверхности (DH) из зоны колена имеем: $\tilde{\Psi}_{n,j} = \tilde{\Psi}_{n-4,j} - 2\tilde{\Psi}_{n-3,j} + \tilde{\Psi}_{n-1,j}$; $\tilde{\zeta}_{n,j} = \tilde{\zeta}_{n-4,j} - 2\tilde{\zeta}_{n-3,j} + \tilde{\zeta}_{n-1,j}$; $(\tilde{v}_y)_{n,j} = 0$,

где η и ξ – шаги разностной сетки вдоль осей x и y ; i и j – номера ячеек по горизонтали и по вертикали; k – номер итерации; n – номер шага времени.

На рисунках 2–3 приведены расчетные результаты, полученные для течения пластилиновой модели вязкой жидкости через составное прямоугольное колено, вычисленные для следующих входных параметров: ширина сечения каждой из труб составного колена $a = 40$ мм, скорость истечения вязкой

жидкости во входной трубе $v_0 = 0,27$ мм/с, динамическая вязкость жидкости $\mu = 135$ Па·с, число Рейнольдса $Re = 1,48 \cdot 10^{-4}$, число шагов координатной сетки вдоль оси $x - 80$, вдоль оси $y - 100$, шаг координаты 2 мм и относительная погрешность итераций составляет $\varepsilon = 0,001$.

Обращаем внимание студентов на расчетные линии тока на рисунках 2, а и 3, а. При этом отмечаем, что неустойчивости численного решения, зарождающиеся на входной границе (AE), распространяются вниз по потоку, а неустойчивости, зарождающиеся на выходной границе (DH) движутся вверх по потоку. Численное решение корректно лишь в том случае, когда вход (AE) и выход (DH) потока находятся достаточно далеко от интересующей нас области (BCFG), в идеале на бесконечности. На рисунке 3, а показаны расчетные линии тока, получаемые при условии, что начальные точки взяты на входе с одинаковым шагом $a/10$ вдоль оси y . Из-за искажений, вызванных неустойчивостями на входе (AE), эти линии тока прижимаются к стенке (EFGH), а линии тока, лежащие ближе к стенке (ABCD), выпадают из поля зрения. На рисунке 2, а показаны линии тока, получаемые при условии, что начальные точки взяты не у границы координатной сетки, соответствующей входу (AE) потока ($i = 0$), а на удалении 20 ячеек от неё, также с одинаковым шагом $a/10$ вдоль оси y . Аналогично были обрезаны расчётные линии тока на расстоянии 20 ячеек от границы координатной сетки, соответствующей выходу (DH) потока ($i = 80$), чтобы в поле зрения не попадали искажения, вызванные неустойчивостями на выходе.

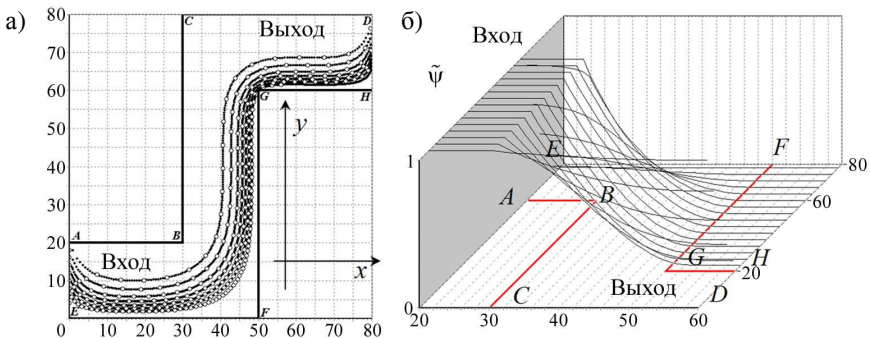


Рисунок 3 – Расчетные линии тока с соответствующими изохронами в поперечном сечении зоны ABCD-EFGH пересечения трех труб одинакового поперечного сечения (а), где начальные точки взяты на входе (AE) с одинаковым шагом вдоль оси y и пространственное поле функции тока $\tilde{\psi}$ (б); вход (AE) – слева, а выход (DH) – вправо

В процессе изложения лекционного материала обращаем внимание целевой аудитории на наличие пиковых значений на рисунках 1, *а* и 2, *б*, которые свидетельствует о формировании значительных градиентов полной скорости потока вязкой жидкости. Такие всплески обуславливают относительное вращательное движение частиц сплошной среды, значительную неравномерность перемешивания вязкой жидкости, а также интенсивную макроскопическую ротацию в объеме жидкости, протекающем через зону *acdf-ABCDEF* (рисунок 1, *а*) и *ABCD-EFGH* (рисунок 2, *б*) пересечения трех труб.

Данный материал излагается в курсе теоретической механики студентам специальностей «Литейное производство» и «Обработка металлов давлением» в рамках разделов «Основы кинематики твердого тела и сплошных сред», «Общие теоремы динамики. Основы динамики сплошных сред».

Выводы. 1 В современной системе высшего технического образования на фоне постоянного сокращения аудиторных часов, отводимых на изучение теоретической механики и высшей математики, существует необходимость углубленного изложения курса классической механики с элементами механики сплошных сред. Эффективность изложения вопросов кинематики и динамики сплошных сред в курсе классической механики может быть повышена посредством применения систем компьютерной алгебры, но высокая стоимость коммерческого и недостаточная гибкость существующего свободного программного обеспечения по-прежнему не способствуют их широкому распространению в учебном процессе.

2 В рамках разработки учебного программного обеспечения предложен и практически реализован быстрый алгоритм численного решения уравнений переноса вихря, который корректно учитывает геометрические особенности составных колен сложных трубопроводов. Получены численные конечно-разностные решения краевых задач для уравнений Навье-Стокса в форме уравнений переноса вихря, описывающие установившиеся плоские течения вязких несжимаемых ньютоновских жидкостей и расширяющие представления целевой аудитории о характере вязких течений в составных переходных коленах трубопроводов простой геометрии. Применение полученных результатов показывает студентам, что все разнообразие течений вязких жидкостей описывается решениями одних и тех же дифференциальных уравнений в частных производных, уравнений Навье-Стокса, причем разные течения (т. е. решения) отличаются только граничными и начальными условиями, а также такими параметрами решения как число Рейнольдса Re .

3 Результаты динамического моделирования, основанные на численном интегрировании уравнений для количеств движения вязкой жидкости вместе с уравнением неразрывности позволяют расширить представления целевой

аудитории о характере перемешивания вязких жидкостей в составных переходных коленах трубопроводов на основании геометрической аналогии между величиной макроскопической ротации и величинами градиентов скоростей в потоке вязкой жидкости. На рисунках 1, *з* и 2, *б* можно наблюдать пики полной скорости вязкого потока непосредственно в переходных зонах составных колен сложных трубопроводов, которые характеризуют неоднородность течения и высокую интенсивность перемешивания жидкостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Кильчевский, Н. А.** Курс теоретической механики. Т. 2 / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – 544 с.

2 **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 5-е изд., 1990. – 607 с.

3 **Бондаренко, А. А.** Теоретическая механика: учебник: В 2 ч. / А. А. Бондаренко, О. А. Дубинин, А. Н. Переяславцев. – Киев: Знання, 2004. – Ч. 1: Статика. Кинематика. – 599 с. – Ч.2: Динамика. – 590 с. (на укр. яз.)

4 **José, J. V.** Classical Dynamics: A Contemporary Approach / J. V. José, E. J. Saletan. – New York: CUP, 1998. – 696 p.

5 **Johns, O.** Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics / O. Johns. – Oxford: OUP, 2005. – 597 p.

6 **Scheck, F.** Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos / F. Scheck. – Berlin: Springer, 2010. – 547 p.

7 **Корнев, Г. В.** Тензорное исчисление / Г. В. Корнев. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 240 с.

8 **Поляхов, Н. Н.** Теоретическая механика / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков. – 2-е изд.– М.: Высш. шк, 2000. – 592 с.

9 **Самарский, А. А.** Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

10 **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике / И. В. Мещерский. – 39-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2002. – 448 с.

A. V. PERIG, N. N. GOLODENKO

ELEMENTS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS IN THE COURSE OF MECHANICS FOR CHEMICAL ENGINEERS

As a part of the developing the educational software for the course on classical mechanics there is proposed and practically implemented a quick algorithm for the numerical solution of the finite boundary value problems for the Navier-Stokes equations in the form of transfer of the vortex describing the steady plane flow of viscous incompressible Newtonian fluids in the composite transitive pipeline knees of simple geometry.

Получено 18.03.2012