

УДК 539.3

Е. А. КОРЧЕВСКАЯ, Л. В. МАРКОВА

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Беларусь

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ СЛОИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрены свободные колебания тонкой слоистой композитной некруговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием давления. Разработана методика построения форм локализованных собственных колебаний и определения соответствующих собственных частот слоистой цилиндрической оболочки, находящейся под действием давления, с учетом поперечных сдвигов и наличия на поверхности оболочки “слабой” образующей.

Тонкие слоистые композитные оболочки, сочетающие в себе высокую прочность и относительно малый вес, нашли широкое применение в качестве составляющих элементов различных инженерных сооружений, в машино- и судостроении, в авиационной и ракетно-космической технике, в различных областях промышленности, они являются частью нефте- и теплотранспортных трубопроводов, корпусов судов и самолетов и т. п. В последнее время происходит стремительное развитие в этих отраслях. Появляются новые материалы, новые технологии и вслед за ними интенсивно разрабатываются методы их расчета. Применение многослойных конструкций при их рациональном проектировании позволяет обеспечить достижение высокой удельной жесткости и прочности, требуемых звуко- и теплоизоляционных свойств, демпфирующих и вибропоглощающих характеристик.

В представленной работе исследуются локальные формы колебаний слоистых оболочек под действием статических нагрузок. Природа локализации свободных колебаний и форм потери устойчивости оболочек хорошо изучена. Переменность физических и геометрических характеристик материала, из которого изготовлена оболочка, неоднородность напряженно-деформированного состояния оболочки, вызванного характером статической нагрузки, могут быть причиной появления на поверхности оболочки “наиболее слабых” областей, которые приводят к сильной локализации форм колебаний и форм потери устойчивости.

Существует немало приближенных методов, используемых в теории оболочек: методы, основанные на представлении решений в виде рядов, вариационные методы, метод сеток и т. д. Но эти методы несовершенны, так как при решении конкретных задач они предполагают фиксирование парамет-

ров, а также их применение связано с большими вычислительными трудностями. Использование точных аналитических методов также сопровождается математическими сложностями. Так как колебания происходят в окрестности некоторых линий, то наиболее эффективными в этом случае могут быть асимптотические методы, которые сочетают в себе простоту и точность.

Для решения рассматриваемой задачи применим уравнения слоистых оболочек, учитывающие параметры поперечных сдвигов, которые получены Э. И. Григолюком и Г. М. Куликовым с использованием обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко. Для исследования свободных колебаний здесь используем асимптотический метод П. Е. Товстика, согласно которому благодаря локализации форм колебаний в окрестности некоторой образующей $\varphi = \varphi_0$ двумерные уравнения, описывающие состояние слоистых оболочек, можно свести к последовательности одномерных краевых задач. В работе этот метод распространяется на случай многослойных оболочек.

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L , состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k , модулем Юнга E_k , плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k , $k = 1, 2, \dots, N$. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-либо k -го слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs$, $\alpha_2 = R\varphi$

(рисунок 1). Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, φ и s – окружная и продольная координаты соответственно. Пусть δ_k – расстояние между исходной поверхностью и верхней границей k -го слоя, u_i, w – тангенциальные и нормальное (прогиб) перемещения

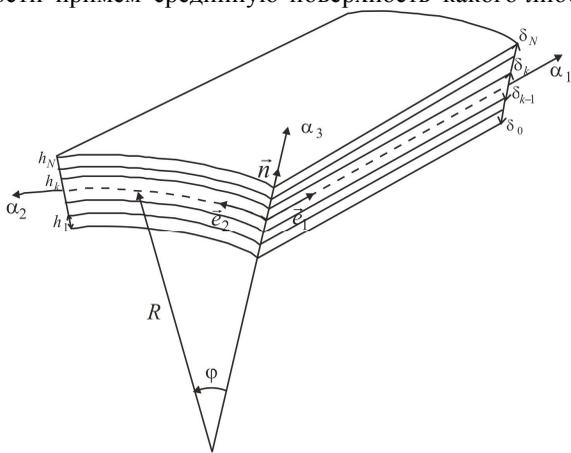


Рисунок 1 – Система координат для слоистой цилиндрической оболочки

точек исходной поверхности, $u_i^{(k)}$ – тангенциальные перемещения точек k -го слоя, θ_i – углы поворота нормали \vec{n} к поверхности оболочки вокруг векторов \vec{e}_i , где $i = 1, 2$.

Для исследования колебаний слоистой цилиндрической оболочки при давлении используем уравнения [1]:

$$\begin{cases} \frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)}\left(1-\frac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \frac{1}{R(\alpha_2)}\frac{\partial^2 F^*}{\partial\alpha_1^2} - T_2^0\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_2^2} - \rho h\Omega^2 W^* = 0, \\ \Delta^2 F^* = \frac{Eh}{R(\alpha_2)}\frac{\partial^2 W^*}{\partial\alpha_1^2}, \quad W^* = \left(1-\frac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2 ; E, ν, ρ – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно; F^*, χ^* – функции напряжений и перемещений; W^* – нормальный прогиб; Ω – частота собственных колебаний; T_2^0 – сила, возникающая в результате давления; η_3, θ, b – параметры, учитывающие поперечные сдвиги, определяемые по формулам [1, 2].

Положим $K/\pi^2 = \varepsilon^2 \kappa$, $K\theta/\pi^2 = \varepsilon^3 \tau$, $\kappa, \tau \sim 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $K = \pi^2 h^2 / (bR^2)$, а $\varepsilon^8 = h^2 \eta_3 / [12R^2(1-\nu^2)]$ – малый параметр.

Уравнения (1) перепишем в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \varepsilon^4(1-\varepsilon^3\tau\Delta)\Delta^2\chi + k(\varphi)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \varepsilon^2 f\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi - \Lambda(1-\varepsilon^2\Delta)\chi = 0, \\ \varepsilon^4\Delta^2 F - k(\varphi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}(1-\varepsilon^2\kappa\Delta)\chi = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $T_2^0(\varphi) = -Eh\varepsilon^6 f$, $\Lambda\varepsilon^4 = \frac{\rho R^2}{E}\Omega^2$, $l = L/R$, $\chi^* = R\chi$, $F^* = \varepsilon^4 EhR^2 F$.

В качестве граничных условий на краях рассмотрим условия шарнирного опирания

$$F = \Delta F = \chi = \Delta\chi = \Delta^2\chi = 0, \quad \text{при } s = 0, l.$$

Напряженно-деформированное состояние оболочки часто представляет собой сумму основного напряженного состояния и краевых эффектов. Первое из них распространяется на всю оболочку, а вторые имеют местный характер и локализуются вблизи определенных кривых – линий искажения напряженно-деформированного состояния (края оболочки, линии излома срединной поверхности и т. п.).

В качестве приближенного подхода к решению задач теории оболочек может быть использован следующий метод: на первых этапах расчета основное напряженное состояние и краевые эффекты строятся отдельно и рассматриваются совместно только для выполнения граничных условий. В работе рассмотрено лишь основное напряженное состояние, которое позволяет постро-

ить решение с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$. Здесь и ниже запись $\varphi = 0(\mathfrak{S})$ означает существование не зависящей от ε постоянной $e > 0$ такой, что $|\varphi| \leq e|\mathfrak{S}|$.

Решение краевой задачи. Согласно методу, предложенному в [3], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\xi.$$

Решение задачи (3) будем искать в виде

$$\chi(s, \varphi, \varepsilon) = \chi^{**} \exp\left\{i\left(\varepsilon^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right\},$$

$$F(s, \varphi, \varepsilon) = F^{**} \exp\left\{i\left(\varepsilon^{-1/2}q\xi + \frac{1}{2}a\xi^2\right)\right\},$$

$$\chi^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \chi_j(\xi, s), \quad F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_j(\xi, s),$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + \varepsilon^2\Lambda_2 + \dots, \quad k(\varphi) = k(\varphi_0) + \varepsilon^{1/2}k'(\varphi_0)\xi + \frac{1}{2}\varepsilon k''(\varphi_0)\xi^2 + \dots \quad (3)$$

где $\chi_j(\xi, s)$, $f_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ , имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты. Исходя из требования убывания решения (3) вдали от образующей $\xi = 0$, принимаем: $q > 0$, $\text{Im } a > 0$.

Подставим анзац (3) в систему уравнений (2). Для определения неизвестных функций $f_j(s, \xi)$, $\chi_j(s, \xi)$ и чисел q , a , φ_0 , λ_n приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. В результате получим рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^j H_k \chi_{j-k} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

и последовательность соответствующих граничных условий:

$$\sum_{k=0}^j \Gamma_k^i \chi_{j-k} = 0, \quad i = 0, 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad \text{при } s = 0, l(\varphi). \quad (5)$$

Здесь

$$H_0 \chi_0 = \left(\frac{1 + \kappa q^2}{q^4} \right) k^2(\varphi_0) \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} + (q^4 - f q^2(1 + \kappa q^2) - \Lambda_0(1 + \kappa q^2)) \chi_0,$$

а операторы H_k ($k > 0$) определяются следующим образом [3]:

$$H_1\chi_0 = \left(a \frac{\partial H_0}{\partial q} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} \right) \xi \chi_0 - i \frac{\partial H_0}{\partial q} \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi},$$

$$H_2\chi_0 = \frac{1}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + 2a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi_0} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \varphi_0^2} \right) \xi^2 \chi_0 - i \left(a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi_0} \right) \xi \frac{\partial \chi_0}{\partial \xi} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} \left(ia \chi_0 + \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \xi^2} \right) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} \chi_0 + H^* \chi_0.$$

В случае шарнирного опирания одного из краев оболочки граничные условия для первых трех приближений примут вид:

$$\chi_0 = \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0, \quad (6)$$

$$\chi_1 + \xi s' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial s^2} + \xi s' \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} = 0, \quad (7)$$

$$\chi_2 + \xi s' \frac{\partial \chi_1}{\partial s} + \frac{\xi^2}{2} \left(s'^2 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} + s'' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial s^2} + \xi s' \frac{\partial^3 \chi_1}{\partial s^3} + \frac{\xi^2}{2} \left[s'' \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} + s'^2 \frac{\partial^4 \chi_0}{\partial s^4} \right] - \frac{4is'}{q} \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} = 0. \quad (9)$$

Условия (6)–(9) выполняются при $s = 0$ или $s = l(\varphi)$.

В случае если на каком-то крае задано условие жесткой заделки, граничные условия для первых трех приближений на соответствующем крае $s = 0$ или $s = l$ имеют вид:

$$\chi_0 = \frac{\partial \chi_0}{\partial s} = 0, \quad \chi_1 + \xi s' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial s} + \xi s' \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} = 0,$$

$$\chi_2 + \xi s' \frac{\partial \chi_1}{\partial s} + \frac{\xi^2}{2} \left(s'^2 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} + s'' \frac{\partial \chi_0}{\partial s} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial s} + \xi s' \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial s^2} + \frac{\xi^2}{2} \left[s'' \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial s^2} + s'^2 \frac{\partial^3 \chi_0}{\partial s^3} \right] = 0.$$

Таким образом, двумерная задача сводится к последовательности одномерных краевых задач (4), (5).

Далее для определенности исследуем случай шарнирного опирания краев, т. е. предполагаем верность условий (6)–(9).

Рассмотрим краевую задачу, возникающую в нулевом приближении:

$$\left(\frac{1+\kappa q^2}{q^4}\right)k^2(\varphi_0)\frac{\partial^4\chi_0}{\partial s^4} + (q^4 - fq^2(1+\kappa q^2) - \Lambda_0(1+\kappa q^2))\chi_0 = 0, \quad (10)$$

$$\chi_0 = \frac{\partial^2\chi_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s=0, \quad s=l.$$

Очевидно, что наименьшей частоте колебаний оболочки соответствует наименьшее положительное собственное значение Λ_0 краевой задачи (10).

Из (10) следует, что $\Lambda_0 = \Lambda_0(q, \varphi_0)$.

Положим

$$\Lambda_0^0 = \min_{q, \varphi_0} \Lambda_0(q, \varphi_0) = \Lambda_0(q^0, \varphi_0^0),$$

где параметры q^0, φ_0^0 будут определяться из соотношений:

$$\frac{\partial\Lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial\Lambda_0}{\partial\varphi_0} = 0 \quad \text{при } q = q^0, \varphi = \varphi_0^0. \quad (11)$$

Предположим, что второй дифференциал Λ_0 в точке q^0, φ_0^0 – положительно-определенная квадратичная форма:

$$d^2\Lambda_0 = \Lambda_{qq}dq^2 + 2\Lambda_{q\varphi}dq d\varphi + \Lambda_{\varphi\varphi}d\varphi^2 > 0, \quad (12)$$

где через $\Lambda_{qq}, \Lambda_{q\varphi}, \Lambda_{\varphi\varphi}$ обозначены производные λ_0 по соответствующим переменным при $q = q^0, \varphi = \varphi_0^0$.

Для вычисления производных, входящих в (11), (12), можно дифференцировать задачу (10) по параметрам q и φ_0 .

Краевую задачу, возникающую в нулевом приближении, решаем согласно методу, предложенному в [3].

Решением краевой задачи (17) будет функция:

$$\chi_0(\xi, s) = P_0(\xi)\chi_0^0(s),$$

где $\chi_0^0(s)$ – собственная функция задачи (10), $P_0(\xi)$ – пока неопределенная функция.

При $j=1$ имеем неоднородную краевую задачу. Условие существования решения задачи эквивалентно равенствам (11).

Решение уравнения, полученного в первом приближении, можно представить в виде [3]:

$$\chi_1(\xi, s) = P_1(\xi)\chi_0^0 + \xi P_0(a\chi_q + \chi_\varphi) - i\frac{dP_0}{d\xi}\chi_q,$$

где χ_q, χ_ϕ – решения задач, полученных при дифференцировании задачи (10) по параметрам q и ϕ_0 при $\chi_0 = \chi_0^0$, а функция $P_1(\xi)$ еще не определена.

Во втором приближении имеем уравнение, из которого получаем условие существования решения χ_2 :

$$-\frac{1}{2}\Lambda_{qq} \frac{d^2 P_0}{d\xi^2} + \xi \varpi \frac{dP_0}{d\xi} + \left(\Xi - \Lambda_1 + \frac{1}{2}\varpi + c\xi^2 \right) P_0 = 0, \quad (13)$$

где $\varpi = -i(a\Lambda_{q\phi} + \lambda_{q\phi})$, $2c = a^2\Lambda_{qq} + 2a\Lambda_{q\phi} + \Lambda_{\phi\phi}$, $\Xi = \frac{\tau q^6}{1 + \kappa q^2}$.

Условие $c = 0$ необходимо для существования решения уравнения (13) в виде полинома по ξ . Из этого условия находим единственную величину a такую, что $\text{Im} a > 0$:

$$a = i \left(\frac{\Lambda_{\phi\phi}^0}{\Lambda_{qq}^0} \right)^{1/2}.$$

При $c = 0$

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(n)} = \varpi \left(\frac{1}{2} + n \right) + \Xi, \quad n = 0, 1, \dots,$$

уравнение (13) имеет решение $P_0(\xi) = H_n(\xi)$, где $H_n(\xi)$ – полином Эрмита n -й степени. Величина Λ_1 минимальна при $n = 0$. И в этом случае $H_n(\xi) \equiv 1$. Тогда наименьшим будет параметр:

$$\Lambda_1^{(0)} = \varpi \frac{1}{2} + \Xi.$$

Найденная здесь поправка Λ_1 учитывает как эксцентриситет поперечного сечения, так и наличие поперечных сдвигов (зависимость от параметров τ и κ).

Разработано программное обеспечение на языке Java в среде разработки NetBeans, позволяющее производить вычисления по полученным формулам, а также представлять результаты графически. Для этого была использована графическая библиотека JFreeChart и разработана библиотека параллельных вычислений ParallelLibrary.

Проведенная работа позволяет избежать рутинных лабораторных исследований и связанных с ними материальных затрат при проектировании слоистых конструкций.

Работа выполнена в рамках гранта БРФФИ Ф11М-060 “Совершенствование методов расчета на устойчивость и колебания гофрированных и слоистых тонкостенных конструкций” на 2011–2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Григолюк, Э. И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.

2 Ботогова, М. Г. Свободные колебания слоистых вязкоупругих цилиндрических оболочек / М. Г. Ботогова, Г. И. Михасев, Е. А. Корчевская // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фунд. науки. Механика. – 2006. – № 10. – С. 125–133.

3 Товстик, П. Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П. Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

E. A. KORCHEVSKAYA, L. V. MARKOVA

FREE VIBRATIONS OF THIN COMPOSITE LAMINATED NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS UNDER EXTERNAL PRESSURE

In the article free vibrations of thin composite laminated non-circular cylindrical shells under external pressure are considered. Method for the construction of the localized forms of natural vibrations and the definition of the corresponding natural frequencies of the laminated cylindrical shell under external pressure the transverse shears and the “weakest” generatrix on the shell surface into account has been worked out.

Получено 18.04.2012

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 6. Гомель, 2012**

УДК 629.114.2

М. Г. КУЗНЕЦОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКИХ ГРУЗОВ В РЕЗЕРВУАРАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

Рассмотрены конструкции перегородок, позволяющие снизить влияние перетекания жидкости на колебания и устойчивость автоцистерн. Приведены некоторые результаты конечно-элементных расчетов перетекания жидкости в цистернах с перегородками, а также распределения гидродинамического давления внутри цилиндрического резервуара.

Высокое расположение центра масс груза над дорогой и возможность перемещения транспортируемого груза относительно резервуара цистерны – это основные особенности перевозки жидких грузов автоцистернами [1]. В