

УДК 531.395

Б. А. БОРОХОВИЧ

*Магнитогорский государственный технический университет
им. Г. И. Носова, Россия*

ЗАКОНЫ ПЕРЕДАЧИ ТЯГОВЫХ УСИЛИЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГИБКОЙ НЕРАСТЯЖИМОЙ ЛЕНТЫ С ВЫПУКЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА КРИВИЗНЫ

Рассмотрены условия равновесия гибкой нерастяжимой ленты на криволинейной цилиндрической поверхности переменного радиуса кривизны. Определены соотношения между усилиями в ветвях гибкого элемента в зависимости от радиуса кривизны. Для полярной системы координат получены формулы тяговых коэффициентов при взаимодействии гибкой ленты с эллиптическими и спиралевидными цилиндрическими поверхностями. Показано, что классическая формула Л. Эйлера для передачи тяговых усилий при охватывании гибким элементом кругового цилиндра может рассматриваться как предельный частный случай.

Применение гибкой стальной ленты вместо канатов на подъемных установках в качестве несущего тягового элемента [1] влечет за собой необходимость теоретических и практических исследований такого класса машин.

Некоторые особенности динамики работы подъемных установок при взаимодействии ленты с цилиндрической поверхностью движущего шкива трения, выполненного в виде кругового цилиндра, рассмотрены в [2]. В полиспастных системах подъемных устройств [3], вантовых конструкциях, концевых креплениях, подвижных и неподвижных направляющих лента может взаимодействовать с цилиндрическими поверхностями переменного радиуса кривизны.

В зависимости от специфики работы в вышеприведенных системах реализуются два противоположных условия:

- максимальное увеличение передаваемой нагрузки за счет трения при неподвижном положении ленты относительно криволинейной поверхности;
- максимальное снижение сил трения в относительном движении при взаимодействии ленты с криволинейной поверхностью [4].

Уравнения равновесия выделенного элемента MM'' длиной dl в проекциях на оси τ и n (рисунок 1):

$$\begin{cases} dP \cos \frac{d\theta}{2} - dF_{\text{тр}} = 0; \\ (2P + dF) \sin \frac{d\theta}{2} - dN = 0, \end{cases}$$

где $P, dP, dN, dF_{\text{тр}} = fdN$ – силы, действующие на элемент дуги $M'M''$; f – коэффициент трения скольжения при взаимодействии ленты с цилиндрической поверхностью; $d\theta = \frac{dl}{\rho}$ – центральный угол; $\rho = \rho(\varphi)$ – радиус кривизны плоской кривой; φ – полярный угол.

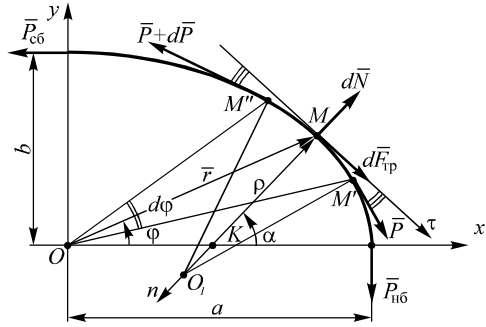


Рисунок 1 – Расчетная схема ленты на неподвижной поверхности

После совместного решения уравнений и интегрирования в пределах от $F_{\text{нб}}$ до $F_{\text{сб}}$ (силы в сбегающей и набегающей ветвях) получаем тяговый коэффициент:

$$\chi = \frac{F_{\text{сб}}}{F_{\text{нб}}} = e^{f \int \frac{dl}{\rho}}.$$

В полярной системе отсчета $OM = r(\varphi)$ согласно дифференциальному исчислению dl и ρ принимают следующий вид:

$$dl = \left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right)^{1/2} d\varphi = (r^2 + r'^2)^{1/2} d\varphi; \quad \rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r r' - r r'^2}. \quad (1)$$

С учетом (1) представим χ следующей зависимостью:

$$\chi = e^{f \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r'^2 - r r'}{r^2 + r'^2} d\varphi \right]}. \quad (2)$$

Соотношение между силами в ветвях гибкого нерастяжимого элемента, как следует из (2), зависит от f, φ и $\rho(\varphi)$.

В частности, при огибании гибким элементом кругового цилиндра ($r = \rho = \text{const}$) получаем классическую формулу Л. Эйлера:

$$\chi^x = \frac{F_{\text{сб}}}{F_{\text{нб}}} = e^{f(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Определим уравнение криволинейной поверхности, на которой χ достигает наибольшего значения, полагая, что в формуле (2) выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой сумму двух слагаемых, второе из которых является интегралом.

Исследуем на экстремум нелинейный функционал, зависящий от производных второго порядка [5]:

$$v[r(\varphi)] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F[\varphi, r(\varphi), r'(\varphi), r''(\varphi)] d\varphi.$$

Функцию $F = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$ будем считать непрерывной на участке от φ_1 до φ_2 и дифференцируемой четыре раза по всем аргументам, а также полагаем, что граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} r(\varphi_1) = r_1; & r'(\varphi_1) = r'_1; & r''(\varphi_1) = r''_1; \\ r(\varphi_2) = r_2; & r'(\varphi_2) = r'_2; & r''(\varphi_2) = r''_2. \end{cases}$$

Запишем дифференциальное уравнение второго порядка и определим интегральные кривые – экстремали рассматриваемой вариационной задачи механики с неподвижными границами.

Уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial r'} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial F}{\partial r''} = 0. \quad (3)$$

Для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{2r(rr'' - r'^2) - r''(r^2 + r'^2)}{(r^2 + r'^2)^2}; \\ \frac{\partial F}{\partial r'} &= \frac{2r'}{r^2 + r'^2} \cdot \left[1 + \frac{rr'' - r'^2}{r^2 + r'^2} \right]; & \frac{\partial^2 F}{\partial r''} &= -\frac{r}{r^2 + r'^2}. \end{aligned}$$

При подстановке $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{d}{d\varphi} \frac{\partial F}{\partial r'}$, $\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial F}{\partial r''}$ уравнение Эйлера-Пуассона (3)

превращается в тождество вида $0 = 0$, а интеграл $v[r(\varphi)]$ не зависит от пути интегрирования, по какой бы кривой мы не интегрировали. Вариационная задача теряет смысл.

Таким образом, задача по определению кривой $r = r(\varphi)$, при которой функция χ достигает максимума, в общем виде не решается. То же самое относится и к отысканию минимума данной функции.

Поэтому необходимо рассматривать законы передачи тяговых усилий на семействах кривых, являющихся образующими для криволинейных цилиндрических поверхностей и определять экстремальные значения внутри этого семейства.

Для примера изучим равновесие ленты на эллиптических [4] и спиралевидных [6] поверхностях.

Рассмотрим случай эллиптических кривых, параметрические уравнения которых в полярной системе координат:

$$\begin{cases} x_M = a(1 + c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}; \\ y_M = b \operatorname{tg} \varphi (1 + c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Тяговый коэффициент для них

$$\chi = e^{c^2 f \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + c^4 \operatorname{tg}^2 \varphi} d\varphi}, \quad (4)$$

или

$$\chi = e^{f [\operatorname{arctg}(c^2 \operatorname{tg} \varphi_2) - \operatorname{arctg}(c^2 \operatorname{tg} \varphi_1)]}.$$

где $c = \frac{a}{b}$ – коэффициент сжатия эллипса.

При $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \varphi$ получаем

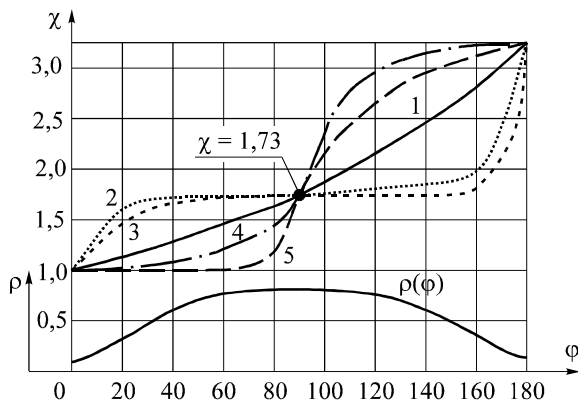
$$\chi = e^{f \operatorname{arctg}(c^2 \operatorname{tg} \varphi)}.$$

Соотношение между полярным углом φ и углом охвата лентой эллиптической поверхности α определяется из уравнения нормали (МК) к эллипсу:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(c^2 \operatorname{tg} \varphi),$$

причем $c \geq 1$ или $c \leq 1$.

На рисунке 2 представлены графики значений χ на эллиптической поверхности при $f = 0,3$ и значениях коэффициента сжатия эллипса $c = 4; 2; 0,5; 0,25$.



$$1 - \chi^x = e^{f\varphi}; \quad 2 - c = 4; \quad 3 - c = 2; \quad 4 - c = 0,5; \quad 5 - c = 0,25;$$

Рисунок 2 – Зависимость тягового коэффициента от полярного угла для эллиптических поверхностей

Из графиков на рисунке 2 следует, что при изменении угла φ от 0 до 90° тяговая сила нарастает больше, чем χ^x для кругового цилиндра на эллиптических кривых при $c = 4$ и $c = 2$ до значения $\varphi = 20\dots 30^\circ$. Для кривых с $c = 0,5$ и $c = 0,25$ тяговые силы в данном диапазоне φ меньше, чем при охвате лентой кругового цилиндра. Для угла $\varphi = 90^\circ$ значение коэффициента χ заданных эллиптических кривых оказывается равным аналогичному значению χ^x . В диапазоне изменения φ от 90 до 180° силы, возникающие на кривых с $c = 0,25$ и $c = 0,5$ оказываются большими по сравнению с кривыми при $c = 2$ и $c = 0,4$.

В отличие от движения гибкого элемента по круговому цилиндру, для которого тяговое усилие χ^x в зависимости от $\varphi = \alpha^x$ плавно изменяется по экспоненте, на эллиптических кривых при $c > 1$ (например, $c = 4$) уже при малых значениях φ угол обхвата α принимает большие значения ($\varphi = 10^\circ < \alpha = 70,4^\circ$) и коэффициент $\chi = 1,5 > \chi^x = 1,1$. Для семейства кривых при $c < 1$ (например, $c = 0,25$) при малых значениях φ угол обхвата α принимает меньшие значения ($\varphi = 10^\circ > \alpha = 0,6^\circ$) и $\chi = 1 < \chi^x = 1,1$.

Итак, на эллиптических кривых χ изменяется сложным образом на участках от φ , изменяющегося от 0 до 90° , и для аналогичных участков с φ в пределах от 90 до 180° и т. д.

Следует отметить:

1 Тяговые силы на участках семейства эллиптических кривых, уравнение которых в полярных координатах

$$r = a \left[(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1 + c^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \right]^{1/2},$$

для одного и того же значения полярного угла φ отличаются друг от друга внутри семейства и зависят от постоянных (a , b , c) эллипса, входящих в уравнение (4).

2 Тяговые силы на участках семейства эллиптических кривых равны тяговому силам на дуге окружности, угол обхвата которой $\alpha = \operatorname{arctg}(c^2 \operatorname{tg} \varphi) = \alpha^x$, совпадает с углом обхвата α эллиптических кривых.

3 Тяговые силы на участках семейства эллиптических кривых, главные нормали в точках начала и конца которых совпадают с направлениями радиусов векторов \vec{r} данных точек, не зависят от постоянных параметров, входящих в уравнения кривых, являются одинаковыми для всего семейства эллиптических кривых и равны тяговому усилию на дуге окружности, угол обхвата которой $\alpha^x = \varphi$ ($\varphi = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$).

4 Величины и изменение тягового коэффициента χ на эллиптической поверхности зависят от сопротивления движения гибкого элемента по данной поверхности. Например, для $f = 0,35$ при движении в 1-м квадрате по эллиптической кривой с $c = 4$ (φ изменяется от 0 до $89,9^\circ$) угол обхвата α_1 изменяется от $70,5$ до $89,9^\circ$ и тяговый коэффициент χ_1 от $1,5$ до $1,7$. При движении во 2-м квадрате, по симметричной 1-му квадрату эллиптической кривой с

$c = 0,25$ (изменение φ_2 от 0 до $89,9^\circ$) угол обхвата α_2 изменяется от 0,6 до $88,4^\circ$ и χ_2 изменяется от 1,0 до 1,7.

Рассмотрим законы передачи сил трения на криволинейных поверхностях спиралевидных кривых [6].

Уравнение спирали в полярных координатах:

$$r = A\varphi^{\pm n},$$

где A – постоянная спирали; n – показатель степени.

Радиус кривизны спиралевидных кривых $r = A\varphi^{\pm n}$:

$$\rho = \frac{A(\varphi^2 + n^2)^{1,5}}{\varphi^2 + n^2 + n} \varphi^{(n-1)}.$$

Радиус кривизны спиралевидных кривых $r = A\varphi^{-n}$:

$$\rho = \frac{A(\varphi^2 + n^2)^{1,5}}{\varphi^2 + n^2 + n} \varphi^{-(n+1)}.$$

Отношение растягивающих сил в набегающей и сбегающей ветви ленты:

$$\chi = \exp \left\{ f \left[\varphi_2 - \varphi_1 \pm \arctg \frac{\varphi_2}{|n|} \mp \arctg \frac{\varphi_1}{|n|} \right] \right\}.$$

Как видно из таблицы 1, из всех спиралей только логарифмическая имеет тяговый коэффициент χ , равный тяговому коэффициенту при взаимодействии ленты с круговым цилиндром, и отношение $\frac{r}{\rho} = \sqrt{1+k^2} = \text{const}$. При

взаимодействии ленты со спиралями 1, 2 и 3 тяговый фактор возрастает по сравнению с уравнением Эйлера. На спиралях 5, 6 и 7 происходит снижение сил трения.

Таблица 1 – Тяговые коэффициенты спиралевидных кривых при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \varphi$

Вид кривой	Уравнение	Тяговый коэффициент
1 Спираль Ферма	$r = A\varphi^{0,5}$	$\chi = e^{f(\varphi + \arctg 2\varphi)}$
2 Спираль Архимеда	$r = A\varphi$	$\chi = e^{f(\varphi + \arctg \varphi)}$
3 Спираль Галилея	$r = A\varphi^2$	$\chi = e^{f(\varphi + \arctg 0,5\varphi)}$
4 Логарифмическая спираль	$r = Ae^{k\varphi}$	$\chi = e^{f\varphi}$
5 Спираль	$r = A\varphi^{-2}$	$\chi = e^{f(\varphi - \arctg 0,5\varphi)}$
6 Гиперболическая спираль	$r = A\varphi^{-1}$	$\chi = e^{f(\varphi - \arctg \varphi)}$
7 Жезл	$r = A\varphi^{-0,5}$	$\chi = e^{f(\varphi - \arctg 2\varphi)}$

Отношение тяговых сил на спиралах по отношению к круговому цилиндру находится в пределах

$$4,8^{-f} \leq \frac{\chi}{\chi^x} \leq 4,8^f$$

и является постоянной величиной для каждой спирали и заданного фиксированного значения f .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Борохович, А. И.** Перспективи за прилагане на стоманени ленти в товароподемните машини вместо теглещи въжета / А. И. Борохович, Б. А. Борохович // Минно дело. – 1990. – № 7. – С. 27–30.

2 **Борохович, Б. А.** Исследование законов передачи тягового усилия при взаимодействии гибкой нерастяжимой ленты с цилиндрической поверхностью движущего шкива трения / Б. А. Борохович, Р. П. Рау // Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании: материалы международной конференции. Ч. 2. – Новосибирск-Алматы, 2002. — С. 39–49.

3 **Полиспагст:** а. с. СССР № 918259, МПК³: В 66D 3/04 / Б. А. Борохович, Г. А. Борохович; заявитель Рудненский индустриальный институт – № 2951423/29-11; заявл. 07.07.80; опубли. 07.04.82 // БИ № 13, 1982. – С. 64.

4 **Борохович, Б. А.** К вопросу взаимодействия гибкого несущего тягового элемента с цилиндрической поверхностью / Б. А. Борохович // Топорковские чтения: сб. статей РИИ. – Рудный, 1999. – Вып. 4. – С. 353–355.

5 **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М.: Наука. Физматиздат, 1969. – 424 с.

6 **Борохович, Б. А.** Об одном способе увеличения тягового усилия на подъемных установках с движущими шкивами трения / Б. А. Борохович, Т. А. Калдыбиев // Научно-технический прогресс: управление качеством, энерго- и ресурсосбережение на пороге XXI века: материалы II респ. науч.-техн. конф. Ч. 1. – Усть-Каменогорск: ВКГТУ им. Д. Серикбаева. – С. 126–128.

B. A. BOROKHOVICH

EQUATIONS FOR TRANSMISSION TRACTION FORCE AT STATIC INTERACTION OF FLEXIBLE INEXTENSIBLE TAPE AND A CONVEX CYLINDRICAL SURFACE WITH THE VARIABLE RADIUS OF CURVATURE

Conditions of balance of a flexible inextensible tape on a curvilinear cylindrical surface of variable radius of curvature are considered. Ratios between efforts in branches of a flexible element depending on curvature radius are defined. For polar system of coordinates formulas of traction factors are received, at interaction of a flexible tape with elliptic and helicoid cylindrical surfaces. It is established that L. Euler's classical formula for transfer of traction efforts when rounding by a flexible element of the circular cylinder is considered as a limiting special case.

Получено 18.04.2012