

УДК 531.3

В. К. ТАРАСОВ, Ю. П. СМЕРНОВ

Тулский государственный университет, Россия

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

Рассматриваются колебательные движения двух взаимодействующих цилиндров с осесимметричным расположением масс при отсутствии проскальзывания и отрыва друг от друга.

Одной из классических задач, решаемых в курсе теоретической механики, является анализ малых колебаний систем с двумя степенями свободы. В то же время практически не уделяется внимания анализу динамики таких систем при учете больших (конечных) значений обобщенных координат. Использование компьютерной техники и специализированных программных продуктов позволяет решать подобные задачи в нелинейной постановке.

В качестве примера рассмотрим систему, в которой цилиндр радиуса R и массой m_1 может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси (рисунок 1), а по его внутренней поверхности катится другой цилиндр радиуса r и массой m_2 .

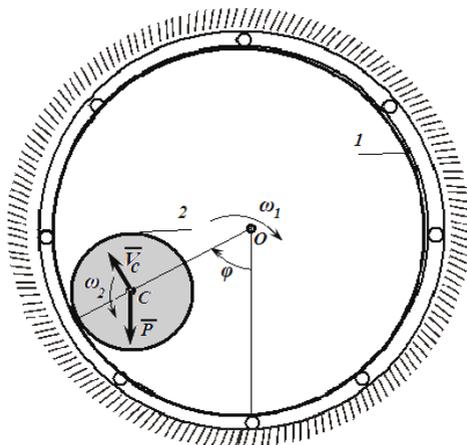


Рисунок 1 – Расчетная схема системы

Заметим, что рассматриваемая в статье расчетная модель не предполагает отрыва внутреннего цилиндра. Чтобы этого не происходило, будем считать, что центры цилиндров связаны между собой невесомым стержнем (водилом).

Первый цилиндр полый (оболочка). Его момент инерции

$$J_1 = m_1 R^2.$$

Второй цилиндр сплошной однородный. Его момент инерции

$$J_2 = \frac{m_2 r^2}{2}.$$

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выбираем угол поворота первого цилиндра θ и угол поворота радиуса-вектора центра второго цилиндра φ относительно вертикали (см. рисунок 1).

Для составления уравнений связей применим формулу Виллиса. Пусть в текущий момент времени (см. рисунок 1)

$$\omega_1 = \dot{\theta} < 0; \quad \dot{\varphi} < 0; \quad \omega_2 > 0.$$

Сообщим и первому и второму цилиндру угловую скорость $\dot{\varphi}$ в противоположном направлении, т. е. прибавим к ω_1 и к ω_2 по $\dot{\varphi}$. В этом случае механизм превращается в рядовую цилиндрическую передачу (рисунок 2).

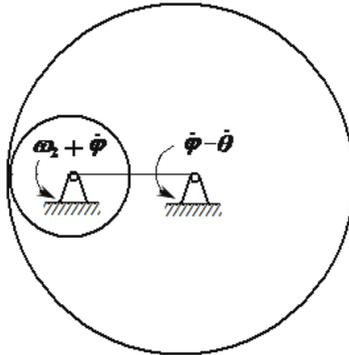


Рисунок 2 – Движение системы в подвижной системе отсчета

В соответствии с формулой Виллиса

$$(\omega_2 + \dot{\varphi})r = (\dot{\varphi} - \dot{\theta})R.$$

Отсюда абсолютная угловая скорость второго цилиндра

$$\omega_2 = \frac{(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}}{r}.$$

Скорость центра второго цилиндра

$$V_C = (R-r)\dot{\varphi}.$$

Переходим к составлению дифференциальных уравнений движения. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 R^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{m_2 [(R-r)\dot{\phi} - R\dot{\theta}]^2}{4} + \frac{m_2 (R-r)^2 \dot{\phi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия и функция Лагранжа

$$\Pi = -m_2 g (R-r) \cos \varphi.$$

$$L = \frac{m_1 R^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{m_2 [(R-r)\dot{\phi} - R\dot{\theta}]^2}{4} + \frac{m_2 (R-r)^2 \dot{\phi}^2}{2} + m_2 g (R-r) \cos \varphi.$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

После проведения всех необходимых преобразований получаем уравнения движения

$$m_1 R^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_2 R [(R-r)\dot{\phi} - R\dot{\theta}] = C, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} [3(R-r)\ddot{\phi} - R\ddot{\theta}] + g \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

где C – постоянная интегрирования.

Исключив из уравнений (1), (2) переменную θ , получим дифференциальное уравнение относительно угла φ

$$(R-r)\dot{\phi} + g \left(\frac{2m_1 + m_2}{3m_1 + m_2} \right) \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Это уравнение представим в виде

$$(R-r)\dot{\phi} d\phi = -g \left(\frac{2m_1 + m_2}{3m_1 + m_2} \right) \sin \varphi d\varphi.$$

Интегрируем

$$(R-r)^2 \dot{\phi}^2 = -4g \left(\frac{2m_1 + m_2}{3m_1 + m_2} \right) (R-r) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \text{const}. \quad (4)$$

Пусть в начальный момент времени $\varphi = 0$; $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$.

Тогда

$$\text{const} = (R-r)\dot{\phi}_0^2.$$

Введем новую постоянную

$$h = (R-r)^2 \dot{\varphi}_0^2 \frac{3m_1 + m_2}{2g(2m_1 + m_2)}$$

и постоянную

$$G = g \frac{(2m_1 + m_2)}{(3m_1 + m_2)}.$$

При этом уравнение (4) приводится к виду

$$(R-r)^2 \dot{\varphi}^2 = 2G \left(h - 2(R-r) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (5)$$

Используя уравнение (5), найдем, при каком значении h второй цилиндр остановится в крайнем верхнем положении. Для этого полагаем в этом уравнении $\dot{\varphi} = 0$, а угол $\varphi = \pi$. Для величины h получим формулу

$$h = 2(R-r).$$

Если

$$h < 2(R-r),$$

то цилиндр остановится, не достигнув верхней точки, и затем изменит направление движения на противоположное. Если

$$h > 2(R-r),$$

то цилиндр не остановится и продолжит движение в том же направлении.

В данной статье рассматривается случай, когда

$$\frac{h}{2(R-r)} < 1.$$

Подстановка

$$\sin \frac{\varphi}{2} = y$$

приводит уравнение (5) к виду

$$\dot{y}^2 = \frac{G}{(R-r)} \left(1 - y^2 \right) \left(\frac{h}{2(R-r)} - y^2 \right). \quad (6)$$

Преобразуем уравнение (6) еще раз, введя параметр k ,

$$k = \sqrt{\frac{h}{2(R-r)}}.$$

В результате получим

$$\dot{y}^2 = \frac{Gk^2}{(R-r)} (1-y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k^2} \right). \quad (7)$$

Решение этого уравнения имеет вид [1]

$$y = k \cdot \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{G}{(R-r)}} t, k \right). \quad (8)$$

Здесь функция

$$\operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{G}{(R-r)}} t, k \right)$$

называется эллиптическим синусом. Она зависит от времени и от параметра k , который, в свою очередь, называется модулем эллиптических функций Якоби [2].

Период колебаний определяется по формуле [1]

$$T = 4 \sqrt{\frac{(R-r)}{G}} K(k),$$

где $K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ – полный эллиптический интеграл.

Полные эллиптические интегралы вычисляются на компьютере или находятся по таблицам полных эллиптических интегралов [3].

Введем новую переменную

$$z = \left(\sqrt{\frac{G}{R-r}} \right) t.$$

В этом случае

$$y = k \cdot \operatorname{sn}(z, k).$$

Зададимся следующими исходными данными

$$m = 7; m_2 = 5; R = 0,5; r = 0,2; \omega_0 = 9,75; g = 9,8.$$

В этом случае

$$h = 0,5973; G = 7,1615; k = 0,9978; K = 4,0762; z = 6\pi t.$$

По этим данным и приведенным выше формулам построен график зависимости $y(t)$ (рисунок 3). При построении графика используем пакет программ «MAPLE». В этом случае необходимо записать функцию $y(t)$ в виде

$$y = k \cdot \text{JacobiSN}(z, k).$$

Используя соотношение (6), находим зависимость $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = 2 \arcsin(k \cdot \text{JacobiSN}(z, k)). \quad (9)$$

График этой функции представлен на рисунке 4. Также на нем для сравнения пунктиром изображен график синусоиды. Таким образом, изменение угла φ происходит по закону, отличному от гармонического.

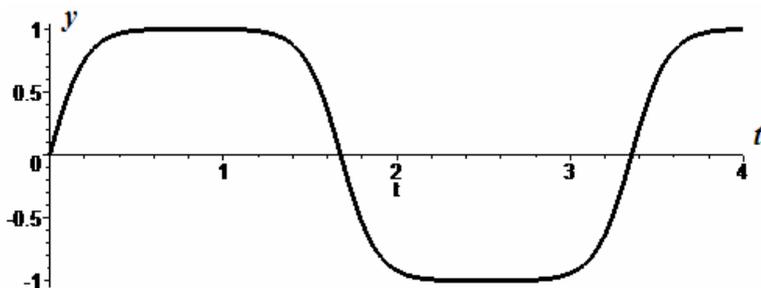


Рисунок 3 – Зависимость $y(t)$

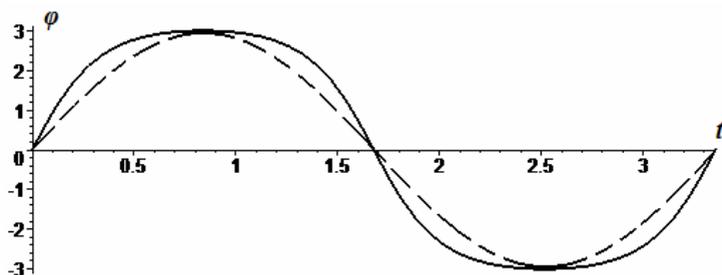


Рисунок 4 – График функции $\varphi(t)$

Далее найдем угловую скорость $\dot{\varphi}(t)$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}(t)$. Полученные в результате расчетов графики представлены на рисунке 5.

Из уравнений (1) и (8) посредством интегрирования получаем выражение для угла θ

$$\theta = \frac{2m_2(R-r)}{R(2m_1+m_2)} \arcsin \left(k \cdot \text{sn} \left(\sqrt{\frac{G}{(R-r)}} t, k \right) \right).$$

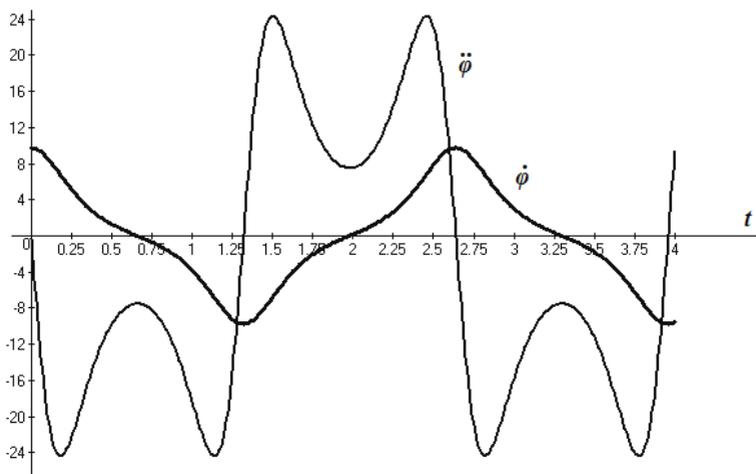


Рисунок 5 – Графики изменения угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}(t)$

Соответствующий график представлен на рисунке 6. Здесь тонкой линией для сравнения изображена синусоида. Из сравнения видно, что и колебания цилиндра по углу θ также не являются гармоническими.

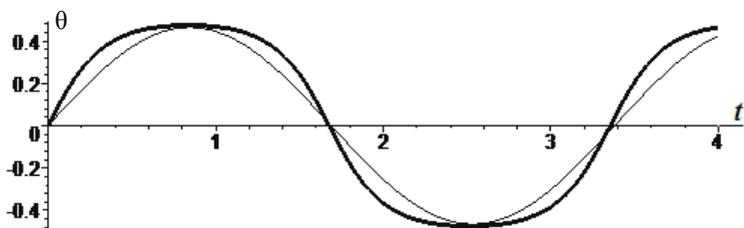


Рисунок 6 – График изменения угла θ в сравнении с синусоидой

Переходим к определению нормальной реакции и силы трения. Для этого изобразим ещё одну расчетную схему (рисунок 7).

Уравнения движения центра масс второго цилиндра

$$m_2(R-r)\ddot{\varphi} = F - m_2g \sin \varphi;$$

$$m_2(R-r)\dot{\varphi}^2 = N - m_2g \cos \varphi.$$

Отсюда находим

$$F = m_2[g \sin \varphi + (R-r)\ddot{\varphi}];$$

$$N = m_2[g \cos \varphi + (R-r)\dot{\varphi}^2].$$

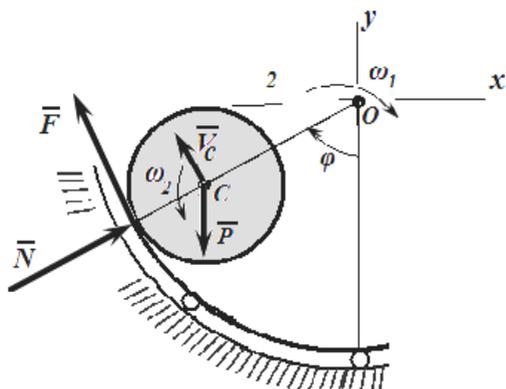


Рисунок 7 – Расчетная схема для определения реакции поверхности

Здесь величины $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ определяются по формулам

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{(R-r)} \left(\frac{2m_1 + m_2}{3m_1 + m_2} \right) \sin \varphi.$$

$$\dot{\varphi}^2 = 2G \frac{\left(h - 2(R-r) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{(R-r)^2}.$$

Графики нормальной реакции и силы трения представлены на рисунке 8.

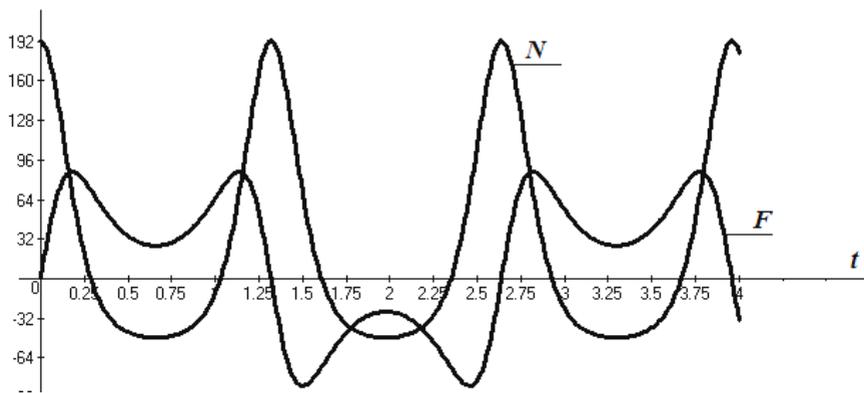


Рисунок 8 – Графики нормальной реакции и силы трения

Таким образом, в результате решения уравнений Лагранжа для системы двух взаимодействующих цилиндров при учете больших смещений установлено, что временные зависимости обобщенных координат и

действующих в системе сил не являются гармоническими. Решение данной задачи в линейной постановке не позволяет получить приемлемые оценки кинематических и динамических параметров системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Уиттекер, Э. Т.** Курс современного анализа / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1963. – 516 с.

2 **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1967. – 300 с.

3 **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

4 **Тарасов, В. К.** Качение цилиндра по внутренней поверхности другого вращающегося цилиндра / В. К. Тарасов, Ю. П. Смирнов // Вестник Тульского государственного университета. Сер. «Актуальные вопросы механики». – Вып. 9. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – 92 с.

V. K. TARASOV, Yu. P. SMIRNOV

NONLINEAR OSCILLATIONS OF A SYSTEM CONSISTING OF TWO CIRCULAR CYLINDERS

There are considered oscillatory motions of two interacting cylinders with axisymmetric location of their masses and the absence of slipping and separation from each other.

Получено 19.09.2013

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

УДК 69.04

М. ХАЛЕЦКИ

Варшавский университет естественных наук – SGGW, Польша

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ РАМНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

В работе представлен алгоритм расчёта перемещений узлов (вертикальных и горизонтальных в глобальной, а также в локальных системах координат) и угловых перемещений стержней в плоских рамных конструкциях (рамах и фермах). Расчёт таких перемещений необходим для исследования устойчивости и колебаний конструкций, а также нахождения линий влияния. Алгоритм представлен на примере использования среды MATHEMATICA.

1 Введение. При изучении дисциплины «Механика строительных конструкций» студенты определяют линии влияния непрерывных балок и плоских