

УДК 531.3

В. К. ТАРАСОВ

Тульский государственный университет, Россия

КИНЕМАТИКА МЕХАНИЗМА С КРЕСТООБРАЗНОЙ МУФТОЙ

Рассматривается кинематика кривошипно-шатунного механизма с присоединенной кулисой и крестообразной муфтой. Анализируются различные методы определения скоростей и ускорений звеньев механизма.

Наиболее сложными для студентов, изучающих кинематику, являются комплексные задачи, требующие знания элементов теории плоского и сложного движений. Цель представленной работы состоит в сравнении различных методик решения таких задач на конкретном примере.

Кривошип OC кривошипно-шатунного механизма (рисунок 1) вращается вокруг центра O с постоянной угловой скоростью ω . С ползуном шарнирно связана кулиса BD , при этом муфта A может скользить одновременно вдоль стержня OC и вдоль стержня BD так, что угол OAB все время равен 90° . Угол COB равен 30° , угол OBC равен 120° . Определить скорость и ускорение точки A муфты.

Начинаем с построения мгновенного центра скоростей (МЦС) второго, третьего и четвертого звеньев. Построение центра P_4 пояснений не требует. Звено 2 движется относительно звена 1 поступательно, а звено 1 вращается вокруг центра O . Следовательно, МЦС второго звена находится на перпендикуляре к OC , проведенном из точки O . Более подробно это рассмотрено в работе [1]. Далее используем метод остановки [1]. Найдем МЦС второго звена относительно четвертого. Он находится на пересечении линий $CP_{24} \perp OC$ и $BP_{24} \perp AB$. МЦС второго звена найдем на пересечении линий OP_2 и $P_{24}P_4$, т. е. в точке P_2 .

Далее необходимо найти МЦС третьего звена. Скорость точки B этого звена направлена горизонтально, так как она связана с ползуном. Следовательно, МЦС третьего звена лежит на вертикали, проведенной из точки B . Движение третьего звена разлагаем не переносное движение, которое является мгновенным вращением вокруг центра P_2 и относительно поступательное относительно второго звена. В этом случае скорость точки P_2 параллельна BD . Следовательно, МЦС третьего звена лежит на перпендикуляре к прямой OP_2 из точки P_2 . МЦС третьего звена можно найти и по-другому. Точки B и C находятся на одинаковом расстоянии от точки P_4 , следовательно, скорости этих точек равны. Но в этом случае расстояния OC и P_3B равны, так как одинаковы угловые скорости первого и третьего звеньев. Поэтому

для определения МЦС третьего звена достаточно на прямой BP_3 отложить отрезок, равный OC .

В качестве единицы измерения принимаем величину AB , которую обозначаем l . На рисунке 1 угловая скорость первого звена, а следовательно, и второго и третьего обозначена ω . То, что угловая скорость четвертого звена равна 3ω будет установлено ниже.

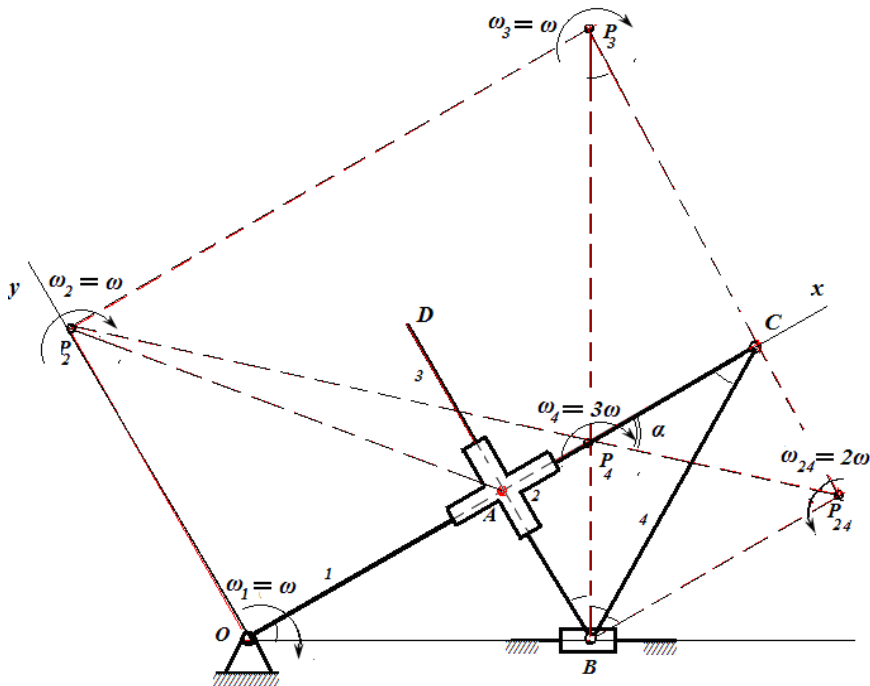


Рисунок 1 – Кинематическая схема механизма и построение МЦС

На рисунке 1 все углы, обозначенные дугой, равны по 30° . Угол α требует определения. Из простых геометрических соображений находим размеры различных элементов кинематической схемы (рисунок 1).

$$AB = l; \quad OA = AC = P_2A B = l\sqrt{3}; \quad BP_3 = OC = P_2P_3 = 2l\sqrt{3}; \quad OB = 2l;$$

$$BC = 2l; \quad CP_4 = BP_4 = \frac{2l}{\sqrt{3}}; \quad AP_4 = \frac{l}{\sqrt{3}}; \quad CP_{24} = l; \quad AP_2 = \sqrt{7}.$$

Далее из треугольника P_4CP_{24} находим угол α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Расстояние от точки O до МЦС второго звена

$$OP_2 = OP_4 \operatorname{tg} \alpha = 2l.$$

Величину AP_2 находим по теореме Пифагора

$$AP_2 = \sqrt{4l^2 + 3l^2} = l\sqrt{7}.$$

Далее находим скорости. Скорость поступательного движения второго звена относительно первого

$$V_{21} = \omega OP_2 = 2\omega l.$$

Скорость поступательного движения второго звена относительно третьего

$$V_{23} = 2\omega l\sqrt{3}.$$

Эта формула следует из метода определения МЦС третьего звена: абсолютная скорость точки P_3 второго звена равна относительной скорости второго звена относительно третьего.

Абсолютная скорость точки A второго звена

$$V_{A2} = \omega \cdot AP_2 = \omega l\sqrt{7}.$$

Абсолютная скорость точки B

$$V_B = \omega \cdot P_3B = 2\omega l\sqrt{3}.$$

Угловая скорость четвертого звена

$$\omega_4 = \frac{V_B}{P_4B} = 3\omega.$$

Скорости показаны на фрагменте кинематической схемы (рисунок 2).

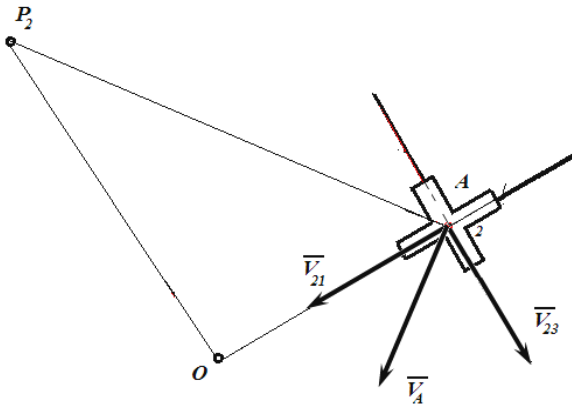


Рисунок 2 – Скорости точки A муфты

Заметим, что скорость точки A не равна геометрической сумме скоростей V_{21} и V_{23} .

Переходим к определению ускорений. Сначала найдем ускорение точки B (рисунок 3).

Принимая за полюс точку C , запишем теорему о сложении ускорений для точки B .

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^{\parallel} + \vec{a}_{BC}^{\text{вп}}.$$

Проектируем это уравнение на прямую BC

$$a_B \cos 60^\circ = -a_C \cos 30^\circ + a_{BC}^{\parallel}$$

и на прямую, перпендикулярную BC ,

$$a_B \cos 30^\circ = -a_C \cos 30^\circ + 2\epsilon l,$$

где ϵ – угловое ускорение шатуна.

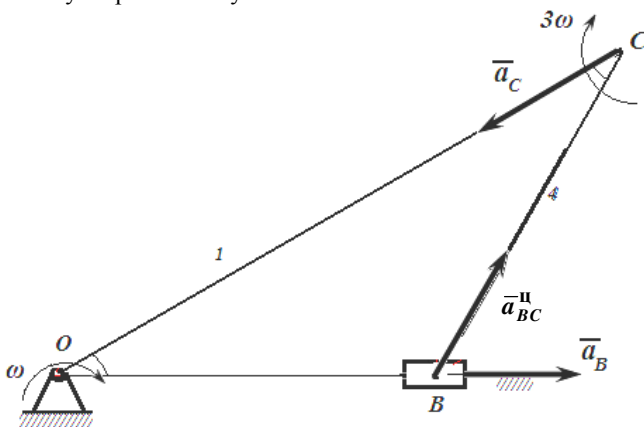


Рисунок 3 – Расчетная схема для определения ускорения точки B

После вычислений получим

$$a_B = -\omega^2 \cdot 2l\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 9\omega^2 \cdot 2l = 30\omega^2 l;$$

$$\epsilon = 9\sqrt{3}\omega^2 l.$$

Рассмотрим движение крестовины относительно первого звена (рисунок 4).

Разложим движение крестовины на переносное вращательное и относительное поступательное. В этом случае

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{Ay} + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}.$$

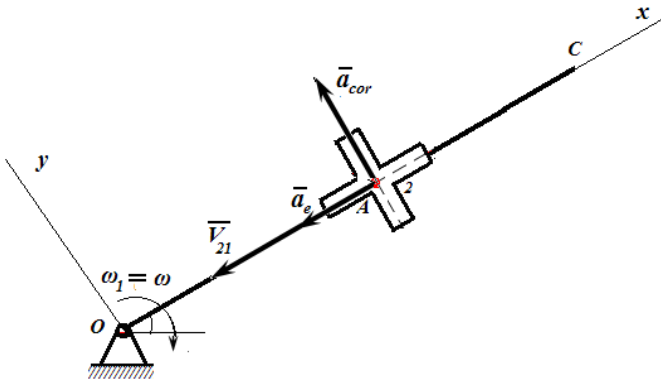


Рисунок 4 – Ускорения точки A крестовины

Спроектируем это уравнение на ось Oy . В результате получим

$$a_{Ay} = a_{cor}.$$

Кориолисово ускорение

$$a_{cor} = 2V_{21}\omega = 4\omega^2 l.$$

Таким образом, проекция ускорения точки A крестовины на ось Oy равна $4\omega^2 l$. Найти проекцию ускорения точки A крестовины на ось Ox сложнее. Для этого необходимо предварительно найти абсолютное ускорение точки A третьего звена (рисунок 5). Оно будет равно переносному ускорению точки A крестовины. Обозначим его через a_{A_3} .

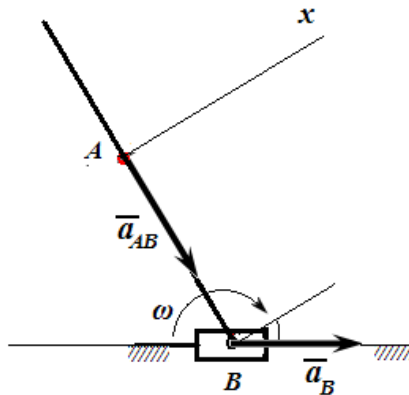


Рисунок 5 – Определение ускорения точки A третьего звена

Принимая за полюс точку B , запишем теорему сложения ускорений для точки A_3

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_B + \bar{a}_{AB}.$$

В проекции на ось Ax

$$a_{A_{3x}} = a_B \cos 30^\circ.$$

После вычислений

$$a_{A_{3x}} = 15\omega^2 l \sqrt{3}.$$

Далее рассмотрим движение крестовины относительно третьего звена (рисунок 6).

По теореме Кориолиса

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A_3} + \bar{a}_{23} + \bar{a}_{cor3}.$$

Проектируем это уравнение на ось Ax

$$a_{Ax} = a_{A_{3x}} - a_{cor3}.$$

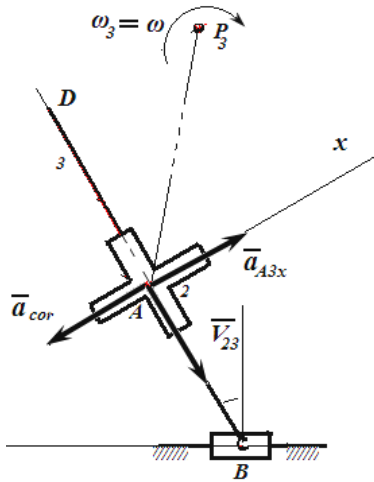


Рисунок 6 – Определение проекции ускорения точки A крестовины на ось Ax
Кориолисово ускорение

$$a_{cor3} = 2V_{23}\omega = 2 \cdot 2\omega l \sqrt{3} \cdot \omega = 4\omega^2 l \sqrt{3}.$$

Проекция ускорения точки A на ось Ax

$$a_{Ax} = 11\omega^2 l \sqrt{3}.$$

Учитывая найденную ранее проекцию ускорения на ось Ay , найдем абсолютную величину ускорения точки A

$$a_A = \omega^2 l \sqrt{16 + 121 \cdot 3} = 19,5 \omega^2 l.$$

Для проверки применим другой метод определения проекции ускорения точки A второго звена на ось Ax . Найдем сначала ускорение точки A , принадлежащей четвертому звену (рисунок 7).

За полюс принимаем точку C и находим ускорение точки A .

$$\vec{a}_{A4} = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^u + \vec{a}_{AC}^{BP}.$$

Проекция на ось Ax

$$a_{A4x} = a_{AC}^u - a_C$$

Ускорение точки C

$$a_C = \omega^2 OC = 2\omega^2 l \sqrt{3}.$$

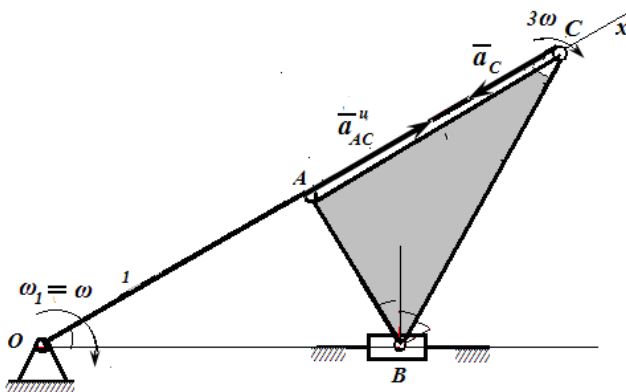


Рисунок 7 – Определение ускорения точки A четвертого звена

Относительное ускорение

$$a_{AC}^u = 9\omega^2 \cdot l \sqrt{3}.$$

Ускорение точки A_4 в проекции на ось Ax

$$a_{A4x} = 7\omega^2 l \sqrt{3}.$$

Разложим движение крестовины на переносное движение вместе с шатуном 4 и относительное относительно шатуна. Каждое из этих составляющих движений является сложным (не поступательным и не вращательным). Этому разложению соответствует расчетная схема (рисунок 8).

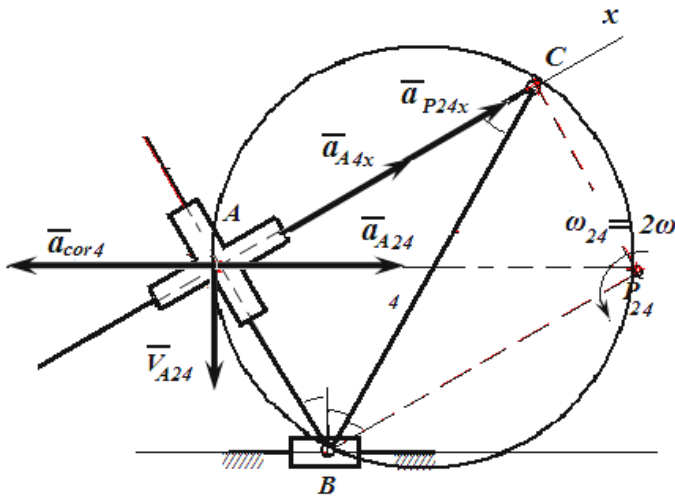


Рисунок 8 – Движение крестовины относительно шатуна

Проанализируем движение крестовины относительно шатуна. Точка A крестовины движется относительно шатуна по окружности радиуса l . При этом расстояние от точки A до МЦС крестовины в относительном движении не изменяется и равно $2l$. Таким образом, точка A движется по окружности с постоянной по величине скоростью. Скорость точки равна $4\omega l$, а ускорение равно $16\omega^2 l$. Скорость V_{A24} равна скорости точки A крестовины относительно шатуна. Но ускорение \bar{a}_{A24} не равно ускорению точки A крестовины относительно шатуна. Для того, чтобы найти ускорение точки A крестовины относительно шатуна необходимо к ускорению \bar{a}_{A24} прибавить ускорение точки P_{24} шатуна.

Найдем это ускорение. Принимая точку C шатуна за полюс, запишем уравнение

$$\bar{a}_{P_{24}} = \bar{a}_C + \bar{a}_{P_{24}C}^{\text{ц}} + \bar{a}_{P_{24}C}^{\text{вр}}$$

После проектирования этого уравнения на ось Ax и подстановки значений ускорений получим

$$a_{P_{24}x} = -2\omega^2 l\sqrt{3} + 9\omega^2 l\sqrt{3} = 7\omega^2 l\sqrt{3}.$$

Теорему Кориолиса для данного случая записываем в таких обозначениях

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A24} + \bar{a}_{P_{24}} + \bar{a}_{A4} + \bar{a}_{cor4}.$$

Проектируем это уравнение на ось Ax

$$a_{Ax} = a_{A24} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a_{P24x} + a_{A4x} - a_{cor4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляем сюда значения ускорений

$$a_{A24} = 16\omega^2 l; \quad a_{A4x} = 7\omega^2 l \sqrt{3}; \quad a_{cor4} = 2 \cdot 4\omega l \cdot 3\omega = 24\omega^2 l.$$

$$a_{Ax} = 16\omega^2 l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 7\omega^2 l \sqrt{3} + 7\omega^2 l \sqrt{3} - 24\omega^2 l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$a_{Ax} = 11\omega^2 l \sqrt{3}.$$

Полученный результат совпадает с найденным ранее.

Эта задача может быть решена и аналитически. Изобразим кинематическую схему и отметим углы, определяющие повороты звеньев механизма (рисунок 9).

Размеры звеньев обозначим так

$$OC = 2l\sqrt{3}; \quad BC = 2l.$$

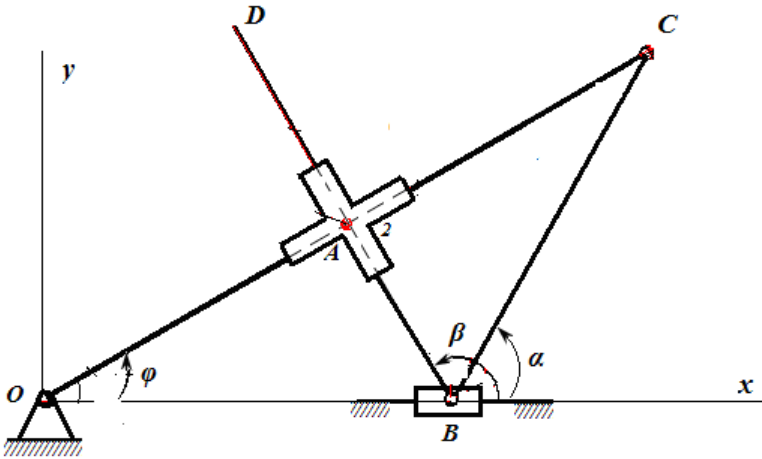


Рисунок 9 – Углы, определяющие повороты звеньев механизма

Координаты точки A

$$x = OA \cos \varphi;$$

$$y = OA \sin \varphi.$$

Находим зависимости между углами. Из треугольника OBC

$$OC \sin \varphi = BC \sin \alpha.$$

Из треугольников OAB и ABC

$$\beta = 90^\circ + \varphi; \quad AB = OA \operatorname{tg} \varphi = BC \cos(\beta - \alpha).$$

Отсюда

$$OA = \frac{BC \sin(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2l \sin(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Преобразуем это соотношение к более простому виду

$$OA = \frac{2l(\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) \cos \varphi}{\sin \varphi} = 2l \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \cos \varphi - \cos \alpha \right) \cos \varphi.$$

Подставляя сюда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{OC}{BC} = \sqrt{3}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - 3 \sin^2 \varphi},$$

получим

$$OA = 2l(\sqrt{3} \cos \varphi - \sqrt{1 - 3 \sin^2 \varphi}) \cos \varphi.$$

Далее, полагая $\varphi = -\omega t$, получаем кинематические уравнения движения точки A

$$x = 2l \left(\sqrt{3} \cos \omega t - \sqrt{1 - 3 \sin^2 \omega t} \right) \cos^2 \omega t,$$

$$y = -l \left(\sqrt{3} \cos \omega t - \sqrt{1 - 3 \sin^2 \omega t} \right) \sin 2\omega t.$$

Все остальное сводится к дифференцированию. Формулы для первых и вторых производных не приводятся ввиду их громоздкости. Построим графики для скорости и проекций ускорения точки A на координатные оси.

График скорости изображен на рисунке 10.

Из него находим скорость точки A . При $\varphi = 30^\circ$ она равна $2,64\omega l$. Значение скорости, найденное ранее графическим методом,

$$V_A = \sqrt{7}\omega l = 2,64\omega l.$$

Графики проекций ускорения точки A изображены на рисунке 11.

По ним находим

$$a_{Ax} = 14,45\omega^2 l; \quad a_{Ay} = 13\omega^2 l.$$

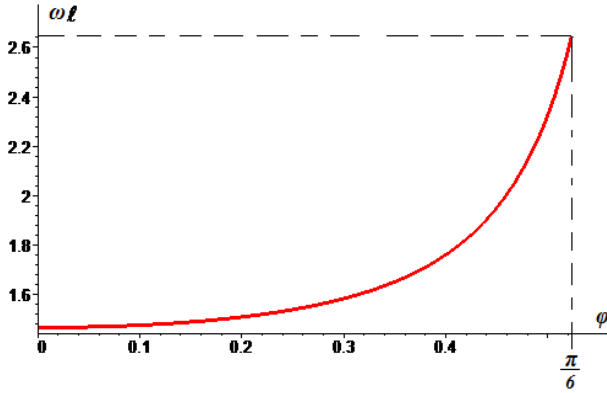


Рисунок 10 – График скорости

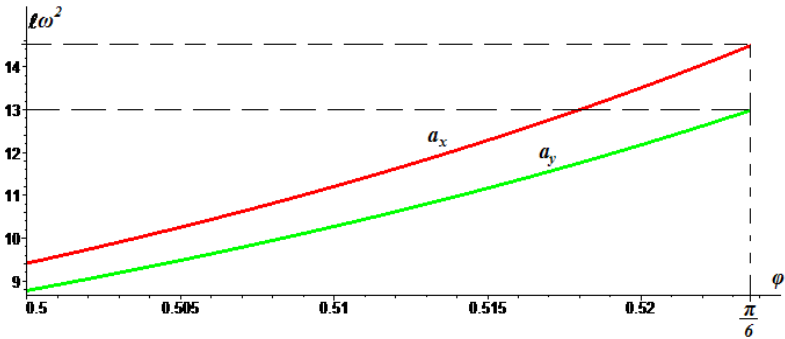


Рисунок 11 – Графики проекций ускорения

Значение ускорения точки A

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = 19,5\omega^2 l,$$

что совпадает с результатом, полученным графическими методами.

V. K. TARASOV

KINEMATICS OF A CROSS-COUPLING MECHANISM

Kinematics of a crank mechanism with attached link and cross coupling is considered. Different determination methods of mechanism parts' velocities and accelerations are analyzed.

Получено 19.09.2013