

Естественно, подбор и структурирование учебного материала такого рода требуют широкого кругозора и готовности к новизне от преподавателей. Необходимость быстрого ориентирования во все возрастающих потоках информации требуется не только обучающимся, но и обучающим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Толстой, Л. Н. Воспитание и образование / Л.Н. Толстой // Собрание сочинений в 22 томах. – М.: Худ. лит-ра, 1978–1985. – Т. 16. – С. 29–66.

2 **Spiral Wishing Well in Japan** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=rfNpirPTYzU#. – Дата доступа: 10.06.2013.

3 **Euler's Disk** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?%20feature=player_embedded&v=ug2bKCG4gZY#. – Дата доступа: 10.06.2013.

4 **Spiral Wishing Well Coin Funnels** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.spiralwishingwells.com>. – Дата доступа: 10.06.2013.

5 **Coin Collector**: Pat. № 289218 USA; US Cl. D99/34; D21/8; D99/35 / S. M. Divnick. – Filed 22.01.1986; Date of Patent 7.04.1987. – 7 p.

6 **Апель, П.** Теоретическая механика / П. Апель. – М.: ФМ, 1960. – Т. I. – 515 с.

E. A. MITYUSHOV, T. A. ROSHCHEVA, N. E. MISYURA

MODERN LECTURE EXAMPLES IN THE THEORETICAL MECHANICS COURSE

There are considered the examples of mechanisms which can be presented at the lectures on theoretical mechanics and they allow to increase the quality of educational material understanding. Several examples of problems on statics and kinematics of these mechanisms are presented.

Получено 16.06.2013

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

УДК 534.014

С. І. РУСАН¹, С. С. РУСАН²

¹ *Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Беларусь*

² *Івана-Франкоўскі нацыянальны тэхнічны ўніверсітэт нафты і газа,
Україна*

МЕТОДЫКА ПРЫМЯНЕННЯ МЕТАДА ЖУКОЎСКАГА Ў СІЛАВЫМ АНАЛІЗЕ КІНЕМАТЫЧНЫХ ПАР

Разглядаецца пытанне пра ўдасканаленне сілавога аналізу плоскіх рычажных механізмаў з найніжкімі кінематычнымі парамі. Паказана, што графічны метада Жукоўскага, які звычайна выкарыстоўваецца для вызначэння вонкавых сіл, можна ўжываць і для знаходжання ўнутраных сіл узаемадзеяння, якія ўзнікаюць у кінематычных парах. Апісана метадыка сілавога аналізу і прыведзены лікавы прыклад.

Агульныя заўвагі. Як вядома, у працэсе праектавання механізмаў вялікая ўвага надаецца трываласці звенняў механізма і іх злучэнняў – кінематычных параў. Разлікам на трываласць папярэднічае сілавы аналіз механізма, у прыватнасці – вызначэнне сіл узаемадзеяння (рэакцый), што ўзнікаюць у кінематычных парах. Распрацавана некалькі метадаў сілавога аналізу. Сярод іх адрозніваюць дакладныя аналітычныя і набліжаныя графічныя метады. Кожны з іх мае свае недахопы і перавагі і прымяняецца ў залежнасці ад прызначэння механізма і стадыі распрацоўкі яго схемы.

Метад Жукоўскага. Шырокае распаўсюджанне атрымаў арыгінальны метады сілавога аналізу, прапанаваны ў 1912 годзе рускім вучоным М. Я. Жукоўскім і апісаны ў падручніках па тэорыі механізмаў і машын пад назвай “метады Жукоўскага”. У аснову метады пакладзены графічны аб’ект, называемы “рычагом Жукоўскага” (ці “жорсткім рычагам”). Метады Жукоўскага можа прымяняцца як для рашэння задач статыкі, так і задач дынамікі. У першым выпадку ён грунтуецца на агульным ураўненні статыкі, у другім – на агульным ураўненні дынамікі. Кожнае з іх можна запісаць у выглядзе:

$$\sum \delta A_i = 0, \quad (1)$$

дзе δA_i – магчымая работа сілы F_i , што прыкладзена да звяна механізма. Звычайны рычаг, як вядома, уяўляе сабою цела ў выглядзе стрыжня, якое мае пункт апоры. Да пляча прыкладваюцца сілы, што выконваюць работу. У метады Жукоўскага ў якасці ўмоўнага рычага выкарыстоўваецца павярнуты на 90° план скорасцей, пабудаваны для даследуемага механізма. На плане знойдзены скорасці ўсіх пунктаў, у якіх прыкладзены сілы. Апорай такога разгалінаванага “рычага” служыць полюс плана скорасцей. Для вылічэння моманту сілы F_i , прыкладзенай у якім-небудзь пункце M_i звяна механізма, яе пераносяць паралельна на рычаг і прыкладваюць да канца вектара скорасці v_i гэтага ж пункта. Пасля пабудовы “рычага” і пераноса на яго ўсіх сіл, што дзейнічаюць на механізм, сутнасць метады Жукоўскага можна сфармуляваць наступным чынам: *раўнавазе плоскага рычажнага механізма адпавядае раўнавага пабудаванага для яго “жорсткага рычага”, г. зн. сума момантаў усіх сіл, перанесеных на “рычаг”, адносна яго пункта апоры роўна нулю*

$$\sum M_p(\vec{F}_i) = 0, \quad (2)$$

дзе p – пункт апоры “рычага” (поліус плана скорасцей).

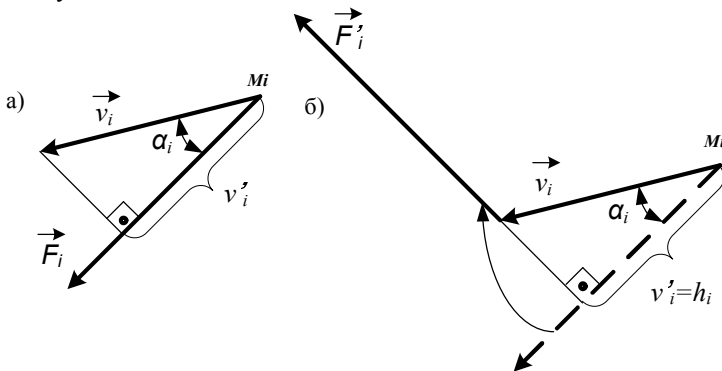
Як бачым, вучоны здзяйсніў геніяльны пераход ад складанага механізма да простага рычага ў якасці мадэлі.

Каб зразумець, навошта паварочваецца на 90° план скорасцей (ці вектары сіл), і творча прымяняць на практыцы метады Жукоўскага, студэнтам

необходно цвёрда засвоіць трансфармацыю ўраўнення (1) ва ўраўненне (2). Кожнае складаемае першага з іх, як вядома з курса тэарэтычнай механікі, уяўляе сабою магчымую работу сілы F_i і вылічваецца па формуле: $\delta A_i = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_i$, дзе $\delta \vec{r}_i$ – магчымае перамяшчэнне пункта M_i , у якім прыкладзена сіла F_i . Спецыфіка сувязей у вивучаемых механізмах дазваляе ў апошняй формуле замяніць магчымае перамяшчэнне $\delta \vec{r}_i$ на сапраўднае $d\vec{r}_i$ і запісаць яе ў выглядзе: $\delta A_i = \vec{F} \cdot d\vec{r}_i$. Замест роўнасці (1) атрымліваем: $\sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$. Прадыференцыруем гэту роўнасць па часе (пры $\vec{F}_i = \text{const}$): $\sum \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum F \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i = 0$ альбо

$$\sum F_i \cdot v'_i = 0. \quad (3)$$

Тут $v'_i = v_i \cos \alpha_i$ – праекцыя скорасці v_i на напрамак сілы F_i . Цяпер у роўнасці (3) кожнае складаемае, у адрозненне ад (1), уяўляе не работу сілы F_i , а яе магутнасць.



Рысунак 1 – Ідэя ўтварэння “рычага Жукоўскага”: а – скорасць v_i і сіла F_i , прыкладзеная да пункта M_i ; б – перамяшчэнне сілы F_i і вызначэнне яе пляча h_i

На рысунку 1, а паказаны множнікі, што ўтвараюць складаемае роўнасці (3). Формула складаемага асацыіруецца з момантам сілы F_i : $F_i h_i$. Каб адрэзак v'_i на рысунку 1, а мог выконваць ролю пляча h_i , сілу F_i неабходна перанесці ў палажэнне \vec{F}'_i (рысунак 1, б), г.зн. павярнуць яе на 90° і прыкласці да канца вектара \vec{v}_i . Адрэзак $h_i = v'_i = v_i \cos \alpha_i$ можна разглядаць як рычаг, замацаваны шарнірна ў пункце M_i . Калі цяпер рысункі віды 1, б для ўсіх сіл, прыкладзеных да звенняў механізма, аб'яднаць, сумясціўшы іх цэнтры M_i , то атрымаем схему разгалінаванага “рычага Жукоўскага”.

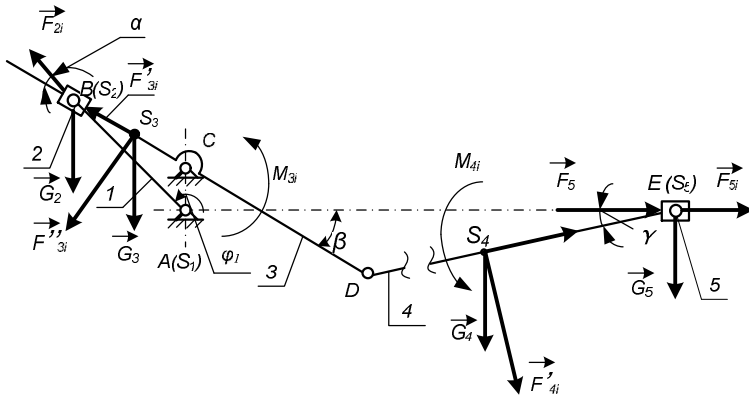
Агульны цэнтр стане полюсам плана скорасцей p , а складаемае сумы (3) набывае выгляд: $F_i v_i' = M_p(\bar{F}_i)$. Сама ж роўнасць (3) пераходзіць у $\sum M_p(\bar{F}_i') = 0$, дзе $F_i = F_i'$. Такім чынам, мы здзяйснілі пераход ад роўнасці (1) да (2) – ураўнення раўнавагі “рычага Жукоўскага”. Нагадаем, што для задач статыкі гэта раўнавага з’яўляецца сапраўднай, а для задач дынамікі – умоўнай.

Методыка і сфера прымянення метаду Жукоўскага. Адно алгебраічнае ўраўненне (2), якое матэматычна апісвае метада Жукоўскага, дазваляе вызначыць велічыню адной невядомай сілы. У інжынернай практыцы і ў курсавым праектаванні па тэорыі механізмаў і машын (ТММ) у якасці такой невядомай сілы прымаецца ураўнаважвальная сіла F_y (альбо момант M_y), прыкладзеная да вядучага звяна. Ураўненне (2) выкарыстоўваецца як дапаможнае для праверкі канчатковага рэзультату, атрыманага аналітычным метадам. Пры такім спосабе праверкі памылка, зробленая ў вылічэнні сілы F_y , напачатку сілавога аналізу механізма, знаходзіцца толькі ў канцы разлікаў.

У падручніках і вучэбных дапаможніках не разглядаецца магчымасць прымянення эфектыўнага метаду Жукоўскага для вызначэння сіл узаемадзеяння ў кінематычных парах. Ці існуе такая магчымасць? Наша даследаванне дае станоўчы адказ на пастаўленае пытанне. Прапануемая ніжэй методыка нагадвае вядомы ў курсах будаўнічай механікі і механікі матэрыялаў метада сячэнняў. Уявім сабе механізм у выглядзе простага кінематычнага ланцуга. Любая яго прамежная кінематычная пара, выбраная для сілавога аналізу, дзеліць ланцуг на две часткі: адна з іх ўтрымлівае уваходнае звяно, другая – выходнае. Калі ўраўнаважвальная сіла, што прыкладзена да ўваходнага звяна, ужо знойдзена, то для вызначэння рэакцыі ў кінематычнай пары можна разглядаць раўнавагу любой часткі. Звычайна выбіраецца тая, для якой будзе прасцейшым ураўненне (2). Калі ж сіла F_y невядома, то разглядаецца частка механізма з выходным звяном. Дзеянне адкінутай часткі механізма замяняецца рэакцыямі (альбо рэакцыяй), якія неабходна вызначыць. Для вызначэння рэакцыі, напрамак якой вядомы, дастаткова скласці адно ўраўненне (2). У плоскіх рычажных механізмах кінематычныя пары належаць пераважна да другога класу. Таму для вызначэння дзвюх складальных рэакцыі запісваецца столькі ж ураўненняў (2). Пры гэтым кінематычная пара мадэліруецца дзвюма парамі першага класу. “Рычаг Жукоўскага” будзецца двойчы для разглядаемай часткі механізма з улікам пераўтварэння даследуемай кінематычнай пары.

Прыклад сілавога аналізу кінематычнай пары. На рысунку 2 прадстаўлены плоскі рычажны механізм, для якога заданы наступныя геаметрычныя і дынамічныя параметры: $\varphi_1 = 135^\circ$; $l_{AB} = 0,10$ м; $l_{AC} = 0,025$ м;

$l_{CD} = 0,15$ м; $l_{DE} = 0,40$ м; $l_{CS_3} = 0,05$ м; $DS_4 = ES_4$; $G_2 = 40$ Н; $G_3 = 120$ Н; $G_4 = 190$ Н; $G_5 = 220$ Н; $F_5 = 1000$ Н; $J_3 = 0,20$ кг·м²; $J_4 = 0,40$ кг·м². Частата вярчэння крывашыпа 1 роўна $n_1 = 230$ аб/мін. Літарамі S_i абазначаны цэнтры цяжару звянняў.



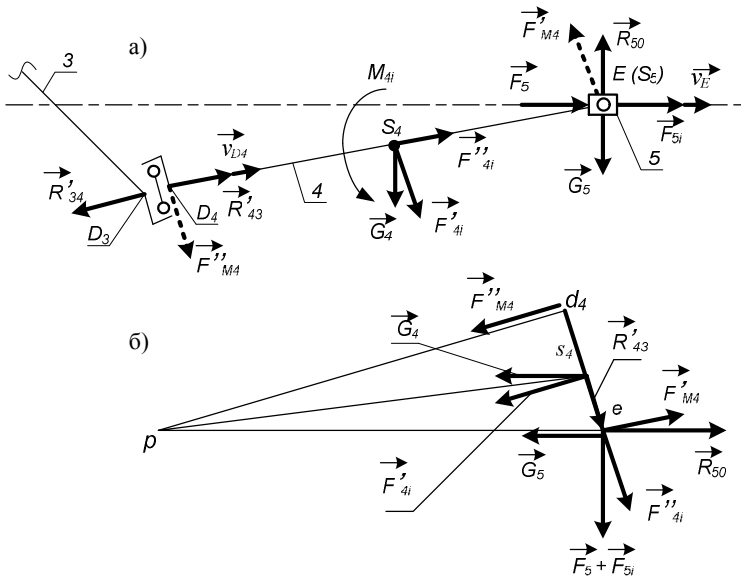
Рысунк 2 – Кінематычная схема механізма і сілавыя фактары

Выкананы кінематычны аналіз апісанага механізма аналітычным метадам; рэзультаты правяраны графічна пры дапамозе планаў скорасцей і паскарэнняў. Па выніках кінематычнага аналізу вылічаны сілы і моманты сіл інерцыі звянняў F_{ii} , M_{ii} (тут першы індэкс – нумар звяна, другі – першая літара ў слове “інерцыя”); на рысунку 2 яны паказаны ў адвольным маштабе. Метадам кінетастатыкі выкананы сілавы аналіз і знойдзена ўраўнаважвальная сіла F_y , прыкладзеная да звяна 1.

Знойдзем цяпер рэакцыю кінематычнай пары D па метадзе Жукоўскага. Для гэтага, як відаць з рысунка 2, мэтазгодна разгледзець раўнавагу правай (адносна пары D) часткі механізма – структурную групу II (4, 5). Прадстаўляем рэакцыю R_D у выглядзе сумы: $\bar{R}_D = \bar{R}'_{43} + \bar{R}''_{43}$. Каб вызначыць складаемыя R'_{43} , R''_{43} , замяняем вярчальную пару D дзвюма імгненна-паступальнымі парамі D' , D'' першага класа. Атрыманыя разліковыя мадэлі паказаны на рысунках 3, а і 4, а. У кожным з іх імгненна-паступальная пара мадэліруецца стрыжнем бесканечна малой даўжыні.

Вызначаем рэакцыю R'_{43} . Выкарыстоўваем мадэль, паказаную на рысунку 3, а, дзе $R'_{4i} = 726,8041$ Н; $R''_{4i} = 2386,0645$ Н; $M_{4i} = 35,4264$ Н·м. Пункт D належыць звянням 3 і 4. На рысунку ён абазначаны літарамі D_3 , D_4 . Будзем план скорасцей для мадэлі на рысунку 3, а. Улічваем, што звяно 4 здзяйсняе плоскі рух. Напрамкі магчымых скорасцей паказаны на рысунку 3, а.

Велічынню v_{D4} прымаем адвольна, а скорасці пунктаў E і S_4 выражаем праз яе графічна (рысунк 3, б). Атрымліваем непавернуты “рычаг” з апорай у полюсе p . Пераносім на яго і паварочваем на 90° усе сілы, што прыкладзены ў пунктах D_4 , S_4 , E . Момент сіл інерцыі M_{4i} , як заўжды, прадстаўляем у выглядзе дзвюх паралельных сіл $F'_{M4} = F''_{M4} = M_{4i}/l_{DE} = 88,566$ Н, прыкладзеных у пунктах D , E і накіраваных перпендыкулярна да звяна DE (на рысунку 3, а яны паказаны пункцірам). На плане скорасцей рэакцыі R'_{43} прыкладзена ў пункце d_4 , а сіла F'_{4i} – у пункце S_4 .



Рысунк 3 – Разліковая схема для вызначэння рэакцыі R'_{43} :
 а – частка механізма і нагрузка на яе; б – рычаг Жукоўскага

Запісваем ураўненне (2) без нулявых складаемых:

$$-R_{43}pd_4 + G_4(d_4e/2)\cos\gamma - F'_{4i}d_4s_4 - F''_{4i}pd_4 + F'_{M4}d_4e - (F_5 + F_{5i})pe = 0.$$

Адгэтуль знаходзім:

$$\begin{aligned} R'_{43} &= (1/pa) \cdot [G_4 \cdot (d_4e/2) \cdot \cos\gamma - F'_{4i} \cdot d_4s_4 - F''_{4i} \cdot pd_4 + \dots + F'_{M4} \cdot d_4e - \\ &\quad - (F_5 + F_{5i}) \cdot pe] = (1/10) \cdot [190 \cdot (1,35/2) \cdot 0,99 - 726,8041 \cdot (1,35/2) - \\ &\quad - 2386,0645 \cdot 10 + 88,566 \cdot 1,35 - (1000 + 3149,1966) \cdot 10,1] = -6601,1591 \text{ Н}. \end{aligned}$$

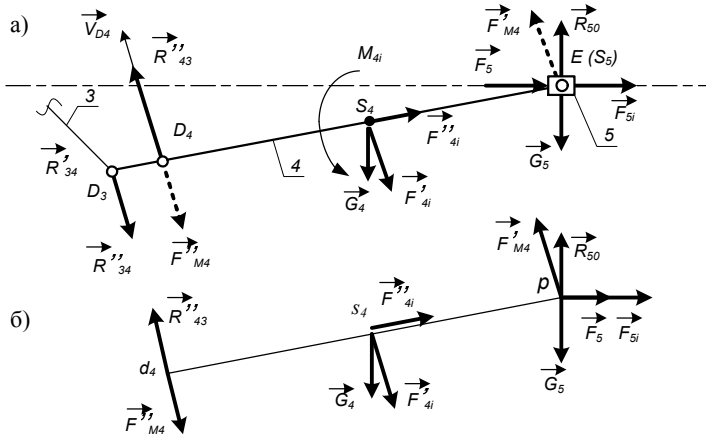
Аналагічна знаходзім рэакцыю R''_{43} . Адпаведная разліковая мадэль паказана на рысунку 4, а.

Будзем для яе план скорасцей, паварочваем яго на 90° супраць стрэлкі гадзінніка і пераносім паралельна на атрыманы “рычаг” усе сілы (рысунак 4, б). У гэтым прыватным выпадку “рычаг” мае форму сумешчаных адрэзкаў pd_4, ps_4 . Складаем ураўненне раўнавагі:

$$-R''_{43} \cdot pd + (G_4 \cos \gamma + F'_{4i}) \cdot ps_4 + F''_{M4} \cdot pd = 0; \text{ адсюль}$$

$$R''_{43} = (1/pd) \cdot [(G_4 \cos \gamma + F'_{4i}) \cdot ps_4 + F''_{M4} \cdot pd] =$$

$$= (1/10) \cdot [(190 \cdot 0,99 + 726,8041) \cdot 5 + 88,566 \cdot 10] = 554,8746 \text{ Н.}$$



Рысунак 4 – Разліковая схема для вызначэння рэакцыі R''_{43} :
 а – частка механізма і нагрузка на яе; б – рычаг Жукоўскага

Для параўнання прыводзім значэнні рэакцый, атрыманых метадам кінэстатыкі: $R'_{43} = -6602,8408 \text{ Н}$, $R''_{43} = 546,0180 \text{ Н}$. Хібнасць графічнага метаду складае адпаведна: $\eta' = 0,025 \%$ і $\eta'' = 1,622 \%$. Як бачым, метада Жукоўскага можа быць эфектыўна выкарыстаны для праверкі рэакцый у кінематычных парах.

“Шкала адчувальнасці”. Звернем увагу яшчэ на адну ўласцівасць “жорсткага рычага”, якая не адзначаецца ў падручніках. Велічыні складаемых ва ўраўненні (2) уяўляюць сабою здабыткі F_i на h_i . Відавочна, на раўнавагу “рычага” большы ўплыў робяць тыя сілы, якім пры роўных модулях адпавядаюць большыя плечы. Калі ж з ураўнення раўнавагі (2) знаходзіцца сіла F_y , то, аналізуючы плечы на схеме “рычага”, можна заўважыць, да змянення якіх знешніх сіл больш адчувальна значэнне F_y . Канструктары механізмаў могуць паспрабаваць змяніць велічыні

“уплывовых” сіл, калі іх прырода дапускае такое змяненне. Каб лягчэй параўноўваць плечы сіл, іх можна перанесці з “рычага” на асобную (напрыклад, гарызантальную) прамую і адкласці ад агульнага цэнтра: ўправа – плечы для сіл з дадатнымі момантамі, улева – з адмоўнымі. Атрымаем адмысловую “шкалу адчувальнасці” для сілы F_y .

Заклучэнне. Як адзначалася вышэй, у падручніках па ТММ апісаны змест і методыка прымянення графічнага метаду Жукоўскага для вызначэння *внешніх*, у прыватнасці, ураўнаважвальных сіл, якія дзейнічаюць на ўваходных звенні механізмаў. Гэта дазваляе прымяняць яго для кантролю *канчатковага* рэзультату, атрыманага метадам кінемататыкі. Але памылка можа быць зроблена і ў пачатку сілавога разліку – ужо ў аналізе раўнавагі першай ад канца структурнай групы кінематычнага ланцуга. І калі яна не знойдзена, то працяг разліку – дарэмная трата часу і энергіі даследчыка. Апісаная вышэй методыка пашырэння метаду Жукоўскага адкрывае магчымасць выкарыстання яго для кантролю на ўсіх этапах сілавога аналізу. Акрамя таго, і гэта вельмі істотна, яна дазваляе аператыўна выкарыстоўваць эфектыўны метадаў у якасці асноўнага ў працэсе праектавання механізмаў падчас пошуку аптымальнага варыянта яго кінематычнай схемы.

С. И. РУСАН, С. С. РУСАН

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ЖУКОВСКОГО В СИЛОВОМ АНАЛИЗЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Рассматривается вопрос об усовершенствовании силового анализа плоских рычажных механизмов с низшими кинематическими парами. Показано, что графический метод Жуковского, обычно используемый для определения внешних сил, можно применять и для нахождения внутренних сил взаимодействия, возникающих в кинематических парах. Описана методика силового анализа и приведен численный пример.

S. I. RUSAN, S. S. RUSAN

THE TECHNIQUE OF ZHUKOVSKY METHOD APPLICATION IN THE FORCES ANALYSIS OF KINEMATIC PAIRS

The improvement of plane lever mechanisms with low kinematic pairs power analysis is considered in the article. It is shown, that Zhukovsky graphic method, commonly used to define external forces, can be applied for the determination of interaction internal forces appearing in the kinematic pairs. Power analysis method is described and numeral example is given.

Получено 08.07.2013