

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра строительной механики

Д. В. ЛЕОНЕНКО, С. А. ВОРОБЬЁВ

# РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области  
транспорта и транспортной деятельности для обучающихся по специальности  
1-37 02 05 «Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство»  
в качестве учебно-методического пособия*

Гомель 2018

<http://mechanika.org.ru>

УДК 624.04 (075.8)  
ББК 38.112я73  
Л47

Рецензенты: профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» д-р техн. наук, профессор *В. В. Можаровский* (ГГУ им. Ф. Скорины);  
заведующий кафедрой «Локомотивы» д-р техн. наук, доцент *А. В. Путьято* (БелГУТ)

**Леоненко, Д. В.**

Л47      Расчет балок и рам на динамические воздействия : учеб.-метод. пособие по выполнению расчетно-графической работы / Д. В. Леоненко, **С. А. Воробьёв** ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2018. – 56 с.  
ISBN 978-985-554-747-2

Изложены краткие теоретические сведения об основах динамического расчета балок и рам. Рассмотрены примеры решения задач по расчету балок и рам как систем с конечным числом степеней свободы на динамические воздействия.

Предназначено для студентов строительного профиля.

УДК 624.04 (075.8)  
ББК 38.112я73

ISBN 978-985-554-747-2

© Леоненко Д. В., **Воробьёв С. А.**, 2018  
© Оформление. БелГУТ, 2018

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

<b>1 КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ</b> . . . . .	4
1.1 Общие понятия. . . . .	4
1.1.1 Динамическое нагружение. . . . .	4
1.1.2 Виды динамических нагрузок. . . . .	5
1.1.3 Виды колебательных процессов и их характеристики. . . . .	6
1.1.4 Число степеней свободы. . . . .	8
Контрольные вопросы. . . . .	10
1.2 Колебание системы с одной степенью свободы. . . . .	11
1.2.1 Свободные колебания. . . . .	11
1.2.2 Вынужденные колебания. Явление резонанса. . . . .	12
Контрольные вопросы. . . . .	15
1.3 Колебание системы с несколькими степенями свободы. . . . .	16
1.3.1 Общий случай вынужденных колебаний. . . . .	16
1.3.2 Вынужденные колебания в случае гармонической нагрузки. . . . .	18
1.3.3 Свободные колебания. . . . .	20
Контрольные вопросы. . . . .	24
1.4 Вычисление перемещений методом Максвелла – Мора. . . . .	25
Контрольные вопросы. . . . .	27
<b>2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ</b> . . . . .	28
2.1 Расчет балки. . . . .	28
2.2 Расчет рамы. . . . .	42
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	53
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А</b> Сортамент двутавров стальных горячекатаных. . . . .	54
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б</b> Эпюры моментов в статически неопределимых стержнях. . . . .	55

## 1.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### 1.1.1 Динамическое нагружение

Динамика сооружений – это область строительной механики, в которой разрабатываются принципы и методы расчета строительных конструкций на динамические нагрузки.

Нагрузку, действующую на конструкцию, относят к динамической, если она меняет свою величину, или направление действия, или область воздействия за короткий промежуток времени. Аналитически ее можно представить в виде функции, у которой независимыми переменными являются пространственные координаты и время.

Возникновение перемещений, деформаций и напряжений в механической системе при действии на нее динамической нагрузки представляет собой некоторый *процесс, изменяющийся во времени*. Массы элементов самой конструкции, а также связанного с ней оборудования в процессе деформации получают ускорения. Это приводит к тому, что со стороны движущихся масс системы действуют дополнительные силы – силы инерции, а в конструкции возникают колебания. Расчет конструкции с учетом сил инерции и возникающих при этом колебаний называют динамическим расчетом. Его *задачей* в общем случае является определение во времени законов движения масс деформируемой системы, что позволяет оценить прочность и жесткость конструкции.

Если в системе пренебрегать силами инерции и колебаниями, то такой расчет называют статическим. Статический расчет отвечает либо очень медленному изменению нагрузки, либо тому состоянию, когда нагрузка достигла определенного положения и величины и далее во времени остается неизменной, а колебания в конструкции исчезли.

## 1.1.2 Виды динамических нагрузок

Рассмотрим основные виды динамических нагрузок.

**Вибрационная, или неподвижная периодическая нагрузка,** (рисунок 1.1, а) создается силами инерции движущихся частей машин со стационарными станинами (оборудование с кривошипно-шатунными механизмами, шлифовальные станки, вентиляторы, центрифуги и т. д.). Она не зависит от жесткостных и инерционных свойств конструкции, характеризуется многообразием законов изменений во времени и широким диапазоном частот.

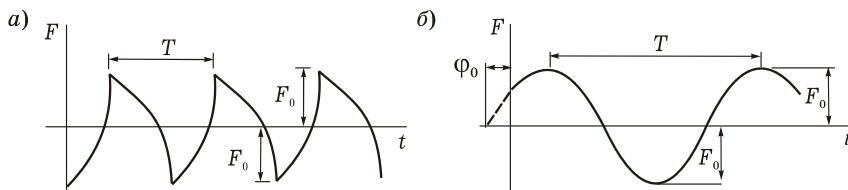


Рисунок 1.1

Частным видом вибрационной нагрузки является *гармоническая нагрузка*, изменяющаяся во времени по закону синуса или косинуса (рисунок 1.1, б)

$$F(t) = F_0 \sin(\theta t + \varphi_0).$$

Она характеризуется амплитудой  $F_0$  нагрузки, частотой возмущающей силы  $\theta$  и сдвигом фаз  $\varphi_0$ .

Гармоническая нагрузка обладает рядом *свойств*:

1 Колебания конструкции совпадают с законом изменения нагрузки.

2 В реальных машинах с движущимися частями переменные силы, возникающие в конструкции, являются гармоническими нагрузками.

3 Любая нагрузка на заданном интервале времени может быть представлена в виде суммы гармонических нагрузок

$$F(t) = \sum_i F_{0i} \sin(\theta_i t + \varphi_{0i}).$$

**Импульсная нагрузка** создается воздушными ударными волнами при различных взрывах, действующих вблизи сооружения (рисунок 1.2), и имеет вид

$$S = F_0 \int_0^{\tau} f(t) dt.$$



По характеру причин, вызывающих и поддерживающих колебания конструкции, различают колебания:

1) *свободные* – это колебания, которые совершаются за счет энергии деформации, накопленной вследствие какого-либо начального возмущения из состояния равновесия при отсутствии постоянного внешнего воздействия. Например, свободные колебания маятника;

2) *вынужденные* – вызываются и поддерживаются некоторыми возмущающими внешними силами, заданными в виде явных функций;

3) *параметрические* – создаются и поддерживаются некоторыми параметрическими возбуждениями, вызванными изменением параметров самой системы (жесткости, положения центра масс). Например, раскачивание на качелях, когда положение частей тела изменяется и происходят колебания системы;

4) *автоколебания* – это колебания, имеющие периодический характер, но возникающие за счет источников энергии, имеющих неколебательный характер. Примером автоколебаний являются маятниковые часы.

По виду возникающих деформаций колебания подразделяются на *продольные*, *поперечные* и *крутильные*. Нередко встречаются смешанные колебания, например, изгибно-крутильные.

В зависимости от учета сил сопротивления колебания бывают *затухающими*, амплитуда которых с течением времени уменьшается, и *незатухающими*.

По закону изменения во времени колебания конструкции подразделяются:

– на *непериодические*, которые не повторяются с течением времени (рисунок 1.4, а);

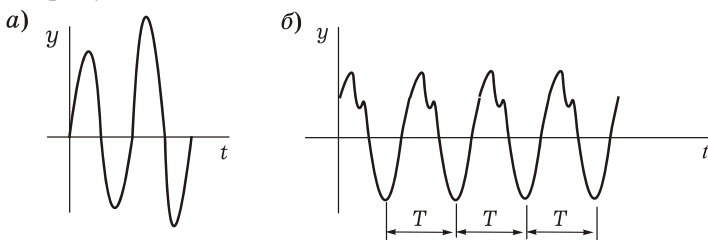


Рисунок 1.4

– *периодические*, при которых значения колебательных величин повторяются через определенный период времени  $T$  (рисунок 1.4, б)

$$y(t) = y(t + T),$$

где  $T$  – период колебаний (время, за которое совершается одно полное колебание).

Наиболее распространенным примером периодических колебаний являются *гармонические колебания*:

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \gamma) \quad \text{или} \quad y(t) = Y \cos(\omega t + \gamma),$$

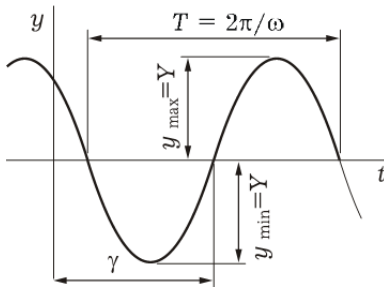


Рисунок 1.5

где  $Y$  – наибольшее отклонение от положения статического равновесия (амплитуда колебаний),  $\omega$  – круговая частота (число колебаний за  $2\pi$  секунд),  $\gamma$  – сдвиг фаз.

На рисунке 1.5 показана зависимость перемещения  $y$  точки конструкции во времени  $t$  при гармонических колебаниях по закону синуса

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \gamma).$$

### 1.1.4 Число степеней свободы

Начальным и одним из важнейших этапов при выполнении динамического расчета любой конструкции является определение числа степеней свободы ее расчетной схемы. Этот параметр необходим в первую очередь для правильного составления уравнений движения.

В зависимости от числа и характера связей, которые наложены на твердое деформируемое тело или систему тел, механическая система получает возможность совершать определенные допускаемые заданными связями движения. В процессе движения отдельные точки тела перемещаются. Совокупность возможных при данных связях перемещений точек тела зависит и определяется числом степеней свободы, которым называется минимально необходимое количество независимых координат, определяющих положение каждой точки механической системы в произвольный момент времени.

Любой элемент реальной конструкции является деформируемым и независимо от числа и характера связей, наложенных на него в целом, обладает *бесконечным числом степеней свободы*. В машиностроении деформации обычно не превосходят значений, при которых их можно считать упругими. Из-за малости упругих деформаций в большинстве инженерных задач имеется возмож-



ность выделить из всей совокупности перемещений доминирующие, в зависимости от точности и предназначения расчета. Пренебрегая второстепенными видами деформаций и принимая во внимание определяющие, в зависимости от сущности решаемой задачи, переходят от реального объекта к расчетным динамическим моделям с конечным числом степеней свободы.

В дальнейшем воспользуемся понятием *невесомого стержня*, на котором расположены точечные сосредоточенные массы. Это позволяет считать, что при нагружении таких стержней все его части сразу приходят в равновесие. Предполагается, что в массах и в невесомых участках балки деформации отсутствуют.

Рассмотрим консольную балку (рисунок 1.6) с закрепленным на конце грузом. Как было отмечено выше, это динамическая система с бесконечным числом степеней свободы. Однако в зависимости от конкретных значений массы груза, его формы и размеров, жесткости балки и ее длины, динамическая расчетная

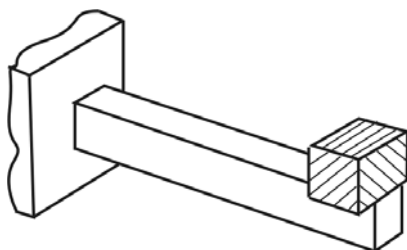


Рисунок 1.6

схема может обладать различным числом степеней свободы. Если предполагать, например, что масса груза значительно больше массы балки, то массу последней можно не учитывать.

Пусть груз имеет размеры, при которых моментами инерции относительно его центральных осей можно пренебречь. Тогда груз можно представить в виде *материальной точки* с массой груза. Допустим, что жесткости балки таковы, что прогибы и продольные перемещения, удовлетворяющие условиям прочности, малы. При сделанных предположениях, рассматривая деформирование балки только в плоскости рисунка, ее можно представить в виде системы с двумя ( $n = 2$ ) степенями свободы (рисунок 1.7, а;  $E$  – модуль Юнга,  $A$  – площадь поперечного сечения).

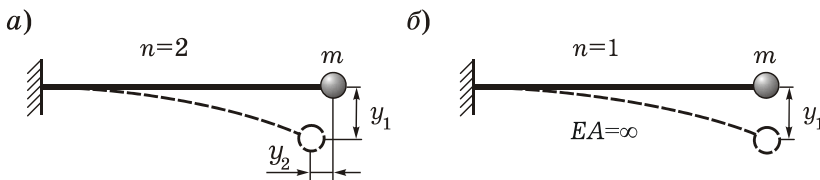


Рисунок 1.7

Если продольные перемещения балки в процессе колебаний незначительны, т. е. жесткость на растяжение-сжатие можно счи-

тать бесконечно большой, тогда система будет иметь всего одну степень свободы (рисунок 1.7, б).

В последнем варианте, когда размеры груза таковы, что его моментом инерции относительно центральной оси перпендикулярной плоскости рисунка пренебречь нельзя, то масса имеет конечные размеры, а ее положение определяется двумя координатами – прогибом  $y_1$  и углом поворота  $y_2$  (рисунок 1.8).

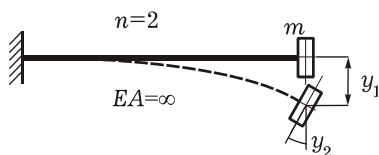


Рисунок 1.8

### Контрольные вопросы

- 1 Что такое динамика сооружений?
- 2 Какую нагрузку называют динамической?
- 3 Что такое статический расчет?
- 4 Что такое динамический расчет?
- 5 Перечислите виды динамических нагрузок.
- 6 Какая нагрузка называется ударной?
- 7 Какая нагрузка называется импульсной?
- 8 Какая нагрузка называется вибрационной?
- 9 Какая нагрузка называется подвижной?
- 10 Какие нагрузки относят к сейсмическим?
- 11 Что такое свободные колебания?
- 12 Что такое вынужденные колебания?
- 13 Что такое параметрические колебания?
- 14 Что такое автоколебания?
- 15 Как классифицируются колебания по виду деформаций?
- 16 Как колебания подразделяются по закону изменения во времени?
- 17 Что такое число степеней свободы?

## 1.2 КОЛЕБАНИЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### 1.2.1 Свободные колебания

Рассмотрим невесомую упругую балку (рисунок 1.9), к которой прикреплен груз массой  $m$ . Ось координат  $y$  направляем вниз. Под действием груза балка прогибается от горизонтального положения в положение *статического равновесия* на величину  $y_{st}$ . Предположим, что она по какой-то причине выведена из состояния статического равновесия и совершает колебания.

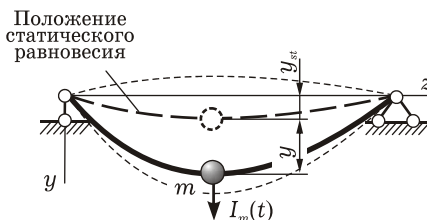


Рисунок 1.9

Прогиб  $y(t)$  от *положения статического равновесия* обусловлен действием лишь силы инерции  $I_m$ , поэтому

$$y(t) = I_m(t)\delta_{11}, \quad (1.1)$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение от единичной силы.

Сила инерции тела равна его массе, умноженной на ускорение, и направлена противоположно ускорению:

$$I_m = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\ddot{y}. \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем каждая точка вверх обозначает операцию дифференцирования по времени.

Подставив силу инерции (1.2) в (1.1), получим уравнение движения

$$m\delta_{11}\ddot{y} + y = 0. \quad (1.3)$$

Поделим каждое слагаемое на  $m\delta_{11}$  и введем обозначение

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}. \quad (1.4)$$

Используя его в (1.3), получим *дифференциальное уравнение свободных колебаний упругой системы с одной степенью свободы* в каноническом виде:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (1.5)$$

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \gamma).$$

Это выражение называется *уравнением свободных колебаний* системы с одной степенью свободы. Здесь постоянные интегрирования  $Y$  и  $\omega$  определяются из начальных условий движения – прогиба и скорости балки в начальный момент времени ( $t = 0$ ). Величина  $\omega t + \gamma$  называется *фазой колебаний*, а  $\gamma$  – *сдвигом фазы*.

Величина  $\omega$  называется *частотой свободных колебаний* (*круговой частотой*) и представляет собой число свободных колебаний, совершаемых системой за время  $2\pi$  секунд

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (1.6)$$

Промежуток времени  $T$ , за который система совершает одно свободное колебание, называется *периодом свободных колебаний*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m\delta_{11}}.$$

Период колебаний измеряется в секундах (с), а круговая частота – в секундах в минус первой степени ( $\text{с}^{-1}$ ).

График свободных колебаний будет иметь вид, аналогичный изображенному на рисунке 1.5.

### 1.2.2 Вынужденные колебания. Явление резонанса

Пусть на тело массы  $m$ , установленное на невесомую балку, действует внешняя переменная сила  $F(t)$  (рисунок 1.10).

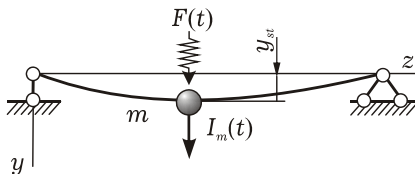


Рисунок 1.10

Прогиб  $y(t)$  от положения статического равновесия обусловлен действием внешней силы  $F(t)$  и силы инерции  $I_m$ , поэтому

$$y(t) = (I_m(t) + F(t)) \delta_{11}. \quad (1.7)$$

Подставив в выражение (1.7) значение сил инерции (1.2) и упростив, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{F}{m}. \quad (1.8)$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.8) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (1.5) и частного решения  $y_{\text{ч}}(t)$ :

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + y_{\text{ч}}(t). \quad (1.9)$$

Частное решение уравнения (1.8) выписывается в виде так называемого интеграла Дюамеля:

$$y_{\text{ч}}(t) = \frac{1}{\omega m_0} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Искомое общее решение неоднородного уравнения будет

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega m_0} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau, \quad (1.11)$$

где перемещение массы  $y_0 = y(0)$  и ее скорость  $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

**Гармоническая нагрузка.** Рассмотрим поведение механической системы с одной степенью свободы при воздействии гармонической силы.

Пусть на линейную систему без трения действует внешняя вибрационная нагрузка с амплитудой  $F_0 = \text{const}$  и частотой изменения  $\theta$ :

$$F(t) = F_0 \sin \theta t.$$

Предположим, что частота  $\theta$  существенно отличается от частоты собственных колебаний, т. е.  $\theta \neq \omega$ . Уравнение движения этой системы будет таким:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \theta t. \quad (1.12)$$

Решение уравнения (1.12) можно записать на основе формулы (1.11), внося под знак интеграла силу  $F(\tau) = F_0 \sin \theta \tau$ . В результате интегрирования получим выражение, представляющее собой сумму колебаний с частотами  $\theta$  и  $\omega$ . Слагаемые, изменяющиеся с частотой  $\omega$ , зависят от начальных условий.

Решение уравнения (1.12), отвечающее установившимся колебаниям, будем искать в виде

$$y(t) = Y \sin \theta t. \quad (1.13)$$

Подстановка выражения (1.13) в уравнение (1.12) дает:

$$Y(-\theta^2 + \omega^2) \sin \theta t = (F_0 / m) \sin \theta t .$$

Отсюда получим амплитуду вынужденных колебаний

$$Y = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2 \left[ 1 - \left( \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{Y_{st}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \quad (1.14)$$

где  $Y_{st} = F_0 / (m\omega^2) = F_0 \delta_{11}$  – статическое перемещение массы при действии на нее амплитудного значения нагрузки  $F_0$ .

Коэффициент усиления колебаний в связи с инерционностью системы (динамический коэффициент)

$$k_d = \frac{Y}{Y_{st}} = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (1.15)$$

Видно, что динамический коэффициент зависит от отношения частоты возмущающей силы к частоте собственных колебаний системы. Зависимость (1.15) представлена на рисунке 1.11.

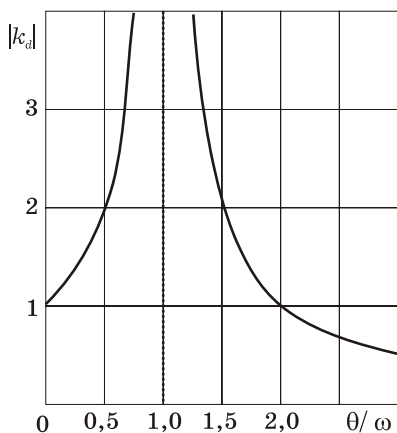


Рисунок 1.11

Практическое значение имеет абсолютная величина  $k_d$ , так как  $k_d < 0$  означает, что колебания массы происходят в противофазе с возмущающей силой.

**Резонанс.** Когда частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой (т. е. отношение  $\theta/\omega = 1$ ), амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности. Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды перемещений и напряжений при совпадении частот вынужденных и собственных колебаний.

Явлению резонанса можно дать следующее механическое толкование. При совершении системой свободных колебаний сила упругости и сила инерции, действующие на массу, взаимно уравновешиваются в любой момент времени. Если к массе приложить внешнюю нагрузку  $F(t) = F_0 \sin \theta t$ , то при  $\theta = \omega$  она становится

неуравновешенной. Это приводит к постоянному росту амплитуды колебаний. Допущение о том, что колебания в момент резонанса будут стационарными, является необоснованным.

Исследуем процесс развития резонансных колебаний. Предполагая начальные условия нулевыми, внесем под знак интеграла силу  $F(t) = F_0 \sin \omega t$ :

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega m} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau = 0,5 Y_{st} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t). \quad (1.16)$$

Из полученного выражения видно, что колебания во время резонанса не являются гармоническими, а размахи нарастают почти пропорционально времени. График резонансного движения (1.16) изображен на рисунке 1.12.

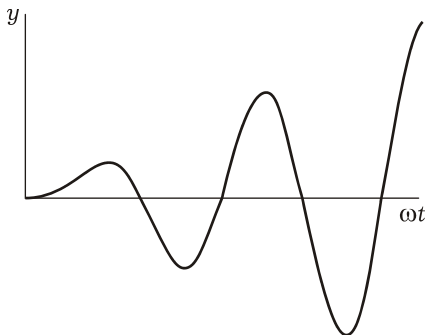


Рисунок 1.12

Следует учитывать, что рассматривалось поведение идеализированной механической системы.

В реальных системах из-за наличия в них сил трения энергия колебаний необратимо рассеивается. Это приводит, в частности, к ограничению амплитуд перемещений. Но даже в этом случае при режимах работы машин вблизи резонанса коэффициенты динамичности могут достигать столь больших величин, что эксплуатация оборудования в этом случае становится недопустимой.

### Контрольные вопросы

- 1 Запишите уравнение свободных колебаний с одной степенью свободы.
- 2 Что такое частота свободных колебаний, в чем она измеряется?
- 3 Что такое период колебаний, в чем он измеряется?
- 4 Запишите уравнение вынужденных колебаний.
- 5 Запишите выражение для динамического коэффициента.
- 6 Что такое резонанс?
- 7 Изобразите графически изменение прогибов во времени при резонансе.

# 1.3 КОЛЕБАНИЕ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

## 1.3.1 Общий случай вынужденных колебаний

Рассмотрим механическую систему, положение всех масс которой можно определить с помощью  $n$  независимых координат  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Ее расчетная схема может быть представлена, например, невесомой балкой, на которой размещено  $n$  точечных масс (рисунок 1.13, а).

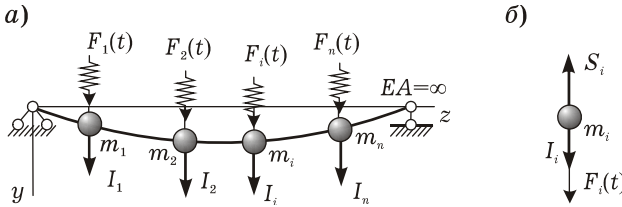


Рисунок 1.13

Пусть под действием внешних нагрузок произвольного вида массы системы совершают колебания. Искомые функции перемещений будем представлять вектор-столбцом перемещений с  $n$  компонентами (т. е. по числу степеней свободы):

$$\{y(t)\} = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T,$$

где знак «Т» обозначает операцию транспонирования, используемую для удобства записи вектор-столбца в виде вектор-строки.

Силы инерции  $I_i = -m_i \ddot{y}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) также представим в векторной форме

$$\{I\} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}^T = -\{m_1 \ddot{y}_1, m_2 \ddot{y}_2, \dots, m_n \ddot{y}_n\}^T = -[M] \{\ddot{y}(t)\},$$

где

$$[M] = \text{diag}[m_1, m_2, \dots, m_n] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad - \text{ диагональная}$$

матрица масс; две точки сверху над переменной, как и ранее, означают двойную операцию дифференцирования функции по времени. Номера масс соответствуют номерам независимых перемещений. Если  $i$ -я масса обладает несколькими степенями свобо-



ды, то эта масса войдет в матрицу  $[M]$  такое количество раз, которое равно числу степеней свободы этой массы.

Из всех внешних возмущающих сил, действующих по направлениям, предоставленным степенями свободы, также сформируем вектор-столбец с  $n$  компонентами

$$\{F(t)\} = \{F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)\}^T. \quad (1.16)$$

Заметим, что если в направлении  $i$ -й степени свободы не действует внешний силовой фактор, то соответствующий компонент вектора (1.16) будет равен нулю.

При составлении уравнений движения линейных систем целесообразно воспользоваться принципом Даламбера [3]. Формируя уравнения равновесия, наряду с внешними силами необходимо учитывать силы инерции, действующие со стороны масс. Проецируем на вертикальную ось внешнюю возмущающую нагрузку  $F_i$  в направлении  $y_i$ , силу упругого отпора  $S_i$ , действующую со стороны механической системы, и силу инерции  $I_i$  (рисунк 1.13, б):

$$S_i = I_i + F_i(t) = -m_i \ddot{y}_i + F_i(t).$$

Подобную операцию выполняем для всех масс. В итоге приходим к системе  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно представить в «полуразвернутой» прямой форме записи, когда силы выражаются через перемещения:

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = F_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.17)$$

Если использовать обратную форму записи, когда перемещения выражаются через силы, то уравнения будут выглядеть так:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} m_j \ddot{y}_j + y_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} F_j(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.18)$$

В уравнениях (1.17)  $r_{ij}$  – коэффициенты матрицы жесткости  $[r]$ , а в (1.18)  $\delta_{ij}$  – коэффициенты матрицы податливости  $[\delta]$ , представляющие собой единичные перемещения.

Более удобной и компактной формой записи уравнений движения (1.17) и (1.18), которой будем часто пользоваться в дальнейшем, является векторно-матричная форма.

Тогда уравнения в прямой форме принимают вид

$$[M]\{\ddot{y}\} + [r]\{y\} = \{F(t)\}, \quad (1.19)$$



Предположим, что все перемещения системы изменяются во времени по гармоническому закону синхронно (т. е. с одинаковыми частотами), но с разными амплитудами

$$y_i(t) = Y_i \sin(\theta t),$$

где амплитуды  $Y_i$  – вектор амплитудных перемещений масс системы.

Силы инерции

$$I_i(t) = -m_i \ddot{y}_i(t) = m_i Y_i \theta^2 \sin(\theta t) = m_i \theta^2 y_i(t),$$

откуда функции перемещений будут

$$y_i(t) = \frac{I_i(t)}{m_i \theta^2}.$$

В результате получим систему уравнений для определения сил инерции в системе.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} \right) I_1(t) + \delta_{12} I_2(t) + \dots + \delta_{1n} I_n(t) + \Delta_{1p}(t) = 0, \\ \delta_{21} I_1(t) + \left( \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right) I_2(t) + \dots + \delta_{2n} I_n(t) + \Delta_{2p}(t) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{n1} I_1(t) + \delta_{n2} I_2(t) + \dots + \left( \delta_{nn} - \frac{1}{m_n \theta^2} \right) I_n(t) + \Delta_{np}(t) = 0. \end{array} \right.$$

Выражая силы инерции через амплитудные значения

$$I_i(t) = I_i^0 \sin(\theta t),$$

получим систему алгебраических уравнений для определения амплитудных значений сил инерций

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}^* I_1^0 + \delta_{12} I_2^0 + \dots + \delta_{1n} I_n^0 + \Delta_{1p}^0 = 0, \\ \delta_{21} I_1^0 + \delta_{22}^* I_2^0 + \dots + \delta_{2n} I_n^0 + \Delta_{2p}^0 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{n1} I_1^0 + \delta_{n2} I_2^0 + \dots + \delta_{nn}^* I_n^0 + \Delta_{np}^0 = 0, \end{array} \right.$$

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}.$$

Зная амплитудные значения сил инерции, можно построить динамическую эпюру максимальных изгибающих моментов







стот, т. е.  $k = 1$  соответствует низшей частоте, а  $k = n$  – высшей собственной частоте. Очевидно, если число степеней свободы системы  $n = 2$  или  $n = 3$ , то собственные частоты  $\omega_k$  можно найти, решив квадратное или кубическое уравнение соответственно. Известно, что уравнения этих порядков имеют точные аналитические решения. Решения алгебраических уравнений, у которых порядок выше четвертого, можно найти только приближенно. В этом случае целесообразно воспользоваться какими-либо компьютерными программами.

Поясним теперь процедуру вычисления коэффициентов форм собственных колебаний  $Y_{ik}$ . Для этого  $\lambda_k$ , найденное на первом этапе, подставляем в систему (1.24). Но так как все собственные значения  $\lambda_k$  определялись из условия равенства нулю определителя матрицы коэффициентов этой системы, то это означает, что одно из уравнений системы является следствием остальных, т. е. в нашем распоряжении остаются  $(n - 1)$  независимых уравнений с  $n$  неизвестными. Задавая произвольно, например,  $Y_{1k} = 1$ , найдем последовательно из системы (1.24) остальные коэффициенты  $Y_{ik}$  ( $i = 2, 3, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$ ). Обычно на практике из системы (1.24) удаляют первое уравнение. В оставшиеся  $(n - 1)$  уравнения подставляют численное значение  $\lambda_k$  и  $Y_{1k} = 1$ . При этом коэффициенты первого столбца становятся совершенно определенными числами.

Переносим этот столбец в правую часть, получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, решив которую, например, методом Гаусса, находим  $(n - 1)$  из оставшихся неизвестных компонентов вектора  $\{Y_k\}$ .

Главные формы колебаний обладают *свойством ортогональности*, которое выражается следующими равенствами ( $k \neq j$ ):

$$\sum_{i=1}^n m_i Y_{ik} Y_{ij} = 0. \quad (1.28)$$

Оно используется для представления конфигурации произвольной системы через главные формы колебаний.

Собственными колебаниями системы называется частный случай свободных колебаний, когда последние совершаются с одной определенной частотой и формой деформации системы.

Любые свободные колебания конструкции состоят из суммы собственных колебаний. На рисунке 1.14 изображены формы собственных колебаний линейной упругой системы с  $n$  степенями свободы без указания ее конкретных параметров, кроме  $m_i = m$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Поэтому задача рисунка – только показать качественную сторону процесса деформирования. Видно, что у этой

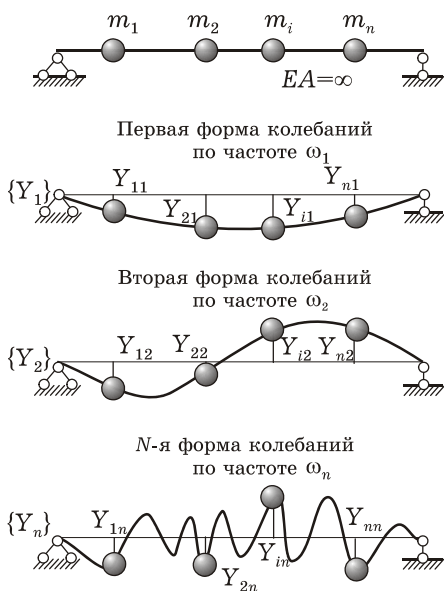


Рисунок 1.14

системы существует спектр из  $n$  собственных колебаний. У второй и других высших форм собственных колебаний существуют места, где прогибы упругой линии балки равны нулю. Это так называемые *узловые точки*. Число узловых точек у  $n$ -й формы собственных колебаний всегда на единицу меньше этого номера.

Спектры частот и форм собственных колебаний являются важнейшими динамическими характеристиками любой конструкции, постоянно или эпизодически работающей в условиях тех или иных динамических воздействий.

### Контрольные вопросы

- 1 Запишите матрицу масс для системы с тремя степенями свободы.
- 2 Что представляют собой коэффициенты матрицы податливости?
- 3 Запишите систему уравнений для определения сил инерции в системе с тремя степенями свободы.
- 4 Что такое главная форма колебаний?
- 5 Запишите свойство ортогональности собственных форм.
- 6 Что такое собственные колебания системы?
- 7 Сколько узловых точек содержит третья форма собственных колебаний?



## 1.4 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

Коэффициенты матрицы податливости  $\delta_{ij}$  представляют собой перемещения. Рассмотрим один из методов вычисления перемещений – метод Максвелла – Мора. Он позволяет вычислять любые типы перемещений (удлинения, прогибы, углы поворота, углы закручивания и т. п.) для всех типов стержневых систем (балки, рамы, фермы). Перемещения (прогибы и углы поворота) для плоской задачи могут быть получены с помощью интеграла Мора:

$$\Delta_{KF} = \sum \int_l \frac{\bar{N}N_F}{EA} dz + \sum \int_l \frac{\eta \bar{Q}Q_F}{GA} dz + \sum \int_l \frac{\bar{M}M_F}{EJ} dz,$$

где  $\bar{N}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{M}$  – внутренние усилия в единичном состоянии,  $N_F$ ,  $Q_F$ ,  $M_F$  – внутренние усилия в грузовом состоянии;  $EA$ ,  $GA$ ,  $EJ$  – жесткости при растяжении–сжатии, сдвиге и изгибе;  $\eta$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению.

«Единичным» называется состояние системы под действием единичной нагрузки ( $\bar{F} = 1$  или  $\bar{m} = 1$ ), «грузовым» – состояние при действии внешней нагрузки.

Как правило, при изгибе балок основное влияние на перемещения имеют изгибающие моменты, поэтому в интеграле Мора учитывают только последнее слагаемое (рисунок 1.15):

$$\Delta_{KF} = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_F}{EJ} dz. \quad (1.29)$$

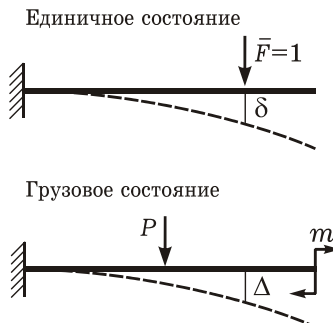


Рисунок 1.15

Для вычисления интеграла нужно знать аналитическое выражение момента на каждом из участков, что не всегда удобно. Поэтому для вычисления интеграла Мора для участков постоянной жесткости используют различные способы, позволяющие избежать непосредственного интегрирования.

Рассмотрим участок балки постоянной жесткости  $EJ$  длиной  $l$ , для которой построены эпюры изгибающих моментов в грузовом  $M_F$  и единичном  $\bar{M}$  состояниях (рисунок 1.16).

Перемещения по формуле Симпсона (см. рисунок 1.16, а)

$$\Delta_{KF} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_F dz = \frac{l}{6EJ} (ac + 4fg + bd), \quad (1.30)$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость,  $l$  – длина участка,  $a, b, f$  – крайние и средняя ординаты эпюры  $M_F$ ,  $c, d, g$  – крайние и средняя ординаты  $\bar{M}$ .

Формула Симпсона является точной, если две эпюры прямолинейны или одна из них прямолинейная, а вторая представляет собой квадратную параболу.

Перемещения по формуле трапеций (см. рисунок 1.16, б)

$$\Delta_{KF} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_F dz = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc), \quad (1.31)$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость,  $l$  – длина участка,  $a, b$  – крайние ординаты эпюры  $M_F$ ,  $c, d$  – крайние ординаты  $\bar{M}$ .

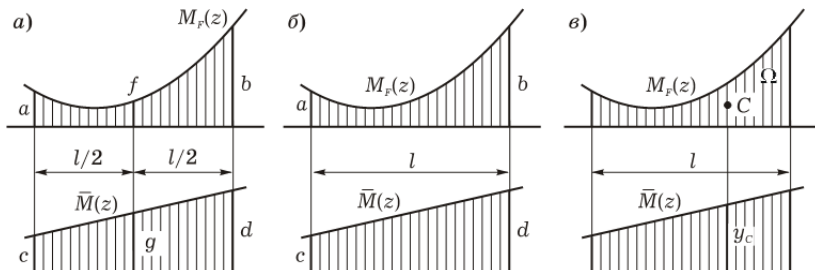


Рисунок 1.16

Формула трапеций применима, если две эпюры прямолинейны. При вычислении произведений в правой части формул Симпсона и трапеций необходимо учитывать знаки ординат  $a, b, f, c, d, g$ . Произведения ординат, расположенных по одну сторону от оси, будут *положительными*, по разным – *отрицательными*.

Формула Верещагина позволяет заменить интегрирование перемножением площади одной эпюры на ординату второй (обязательно прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести первой (см. рисунок 1.16, в):

$$\Delta_{KF} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_F dz = \frac{1}{EJ} \Omega y_c, \quad (1.32)$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость,  $\Omega$  – площадь «грузовой» эпюры  $M_F$ ,  $y_c$  – ордината «единичной» эпюры  $\bar{M}$ , взятая под центром тяжести эпюры  $M_F$ .

Результат перемножения будет *положительным*, если центр тяжести одной эпюры  $S$  и ордината  $y_C$  на другой эпюре расположены по одну сторону от оси стержня, *отрицательным* – по разные.

Для использования формулы Верещагина необходимо знать площади и центры тяжести эпюр. На рисунке 1.17 приведены наиболее часто встречающиеся на практике формы эпюр.

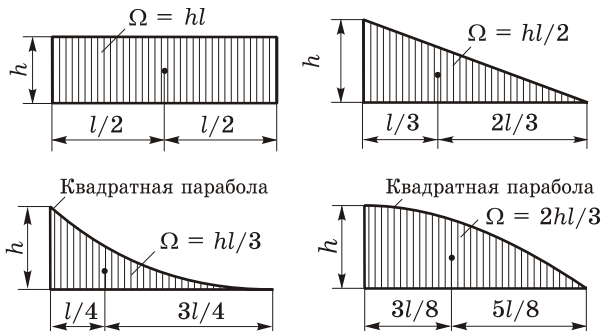


Рисунок 1.17

Порядок определения перемещения  $\Delta_{KF}$  методом Мора:  
 – строят эпюру изгибающих моментов  $M_F$  от заданной нагрузки (в грузовом состоянии);

– по направлению искомого перемещения в точке  $K$  прикладывают *единичное усилие* (для линейных перемещений – сосредоточенную силу  $\bar{F} = 1$ , для угловых – момент  $\bar{m} = 1$ );

– строят эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}$  в единичном состоянии;  
 – разбивают систему на участки, в пределах каждого из которых жесткость постоянна и хотя бы одна из эпюр прямолинейна;

– для каждого участка вычисляют перемещения, используя формулы Верещагина, Симпсона или трапеций;

– перемещения для каждого участка суммируют.

Если найденное перемещение положительно, то оно совпадает с направлением приложенного единичного усилия, если отрицательно – противоположно ему.

### Контрольные вопросы

- 1 Запишите интеграл Мора.
- 2 Что такое «единичное» и «грузовое» состояния системы?
- 3 Запишите формулу трапеций.
- 4 Запишите формулу Симпсона.
- 5 Запишите формулу Верещагина.

## 2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### 2.1 РАСЧЕТ БАЛКИ

**ПРИМЕР 1.** На стальной балке (двутавр № 24) установлен двигатель массой  $m = 500$  кг, частота вращения вала которого  $n = 600$  об/мин (рисунок 2.1, а). Из-за неуравновешенности вращающихся частей на балку, кроме его веса, действует центробежная гармоническая сила  $P_0 = 1,5$  кН. Длина балки  $l = 8$  м;  $a = 0,25 l = 2$  м,  $b = l - a = 6$  м. Модуль Юнга стали  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа; расчетное сопротивление  $R = 150$  МПа; ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

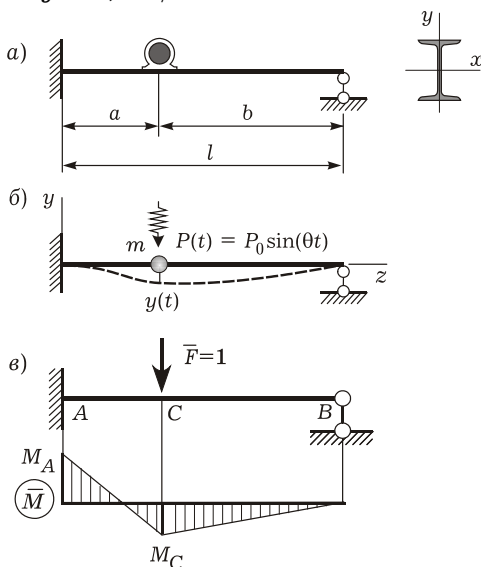


Рисунок 2.1

Требуется: определить амплитуду вынужденных колебаний системы в месте, где установлен двигатель; найти полные значения нормальных напряжений в опасном сечении и построить график их изменения во времени; проверить прочность балки; выполнить проверку на резонанс. Собственный вес балки и силы сопротивления не учитывать.

**Число степеней свободы.** Систему можно представить в виде невесомой балки с точечной массой, которая может двигаться только по вертикали.

Поэтому система обладает одной степенью свободы. Перемещение массы (прогибы балки) обозначим  $y(t)$  (рисунок 2.1, б).

**Геометрические характеристики балки.** Из сортамента прокатной стали выписываем значения момента инерции  $J_x = 3460 \text{ см}^4 = 3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$  и момента сопротивления  $W_x = 269 \text{ см}^3 = 269 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  заданного двутавра.

**Единичное перемещение.** В направлении  $y(t)$  прикладываем вертикальную единичную силу и строим эпюру  $\bar{M}$  (рисунок 2.1, в). Так как система статически неопределима, при построении пользуемся таблицей 1 (приложение А).

Моменты в характерных сечениях А, С

$$\bar{M}_A = \frac{\bar{F}b}{2l^2}(l^2 - b^2) = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 8^2}(8^2 - 6^2) = 1,313 \text{ м};$$

$$\bar{M}_C = \frac{\bar{F}a^2b}{2l^3}(3l - a) = \frac{1 \cdot 2^2 \cdot 6}{2 \cdot 8^3}(3 \cdot 8 - 6) = 0,422 \text{ м}.$$

Для вычисления перемещения используем метод Мора (1.29), умножая эпюру  $\bar{M}$  саму на себя с помощью формулы трапеций (1.31) ( $\bar{M}_B = 0$ ):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{a}{6EJ} (2\bar{M}_A^2 + 2\bar{M}_C^2 - \bar{M}_A\bar{M}_C - \bar{M}_A\bar{M}_C) + \\ &+ \frac{b}{6EJ} (2\bar{M}_C^2 + 2\bar{M}_B^2 + \bar{M}_C\bar{M}_B + \bar{M}_C\bar{M}_B) = \\ &= \frac{2}{6EJ} (2 \cdot 1,313^2 + 2 \cdot 0,422^2 - 1,313 \cdot 0,422 - 0,422 \cdot 1,313) + \\ &+ \frac{6}{6EJ} (2 \cdot 0,422^2 + 2 \cdot 0^2 - 0,422 \cdot 0 - 0 \cdot 0,422) = \\ &= \frac{1,2548}{EJ} = \frac{0,7537}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 1,813 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}}{\text{Н}}. \end{aligned}$$

Знак «-» в формуле трапеций указывает на то, что перемножаемые ординаты лежат по разные стороны от оси.

**Частоты колебаний и динамический коэффициент.** Частота свободных колебаний балки (1.6)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{500 \cdot 1,813 \cdot 10^{-7}}} = 105,03 \text{ с}^{-1}.$$

Частота вынужденных колебаний определяется по круговой скорости вращения вала:

$$\theta = \frac{2\pi}{60} n = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,80 \text{ с}^{-1}.$$

Динамический коэффициент

$$k_d = \frac{1}{1 - \theta^2/\omega^2} = \frac{1}{1 - 62,80^2/105,03^2} = 1,56.$$

**Амплитуда вынужденных колебаний.** При установившихся вынужденных колебаниях прогибы изменяются по закону

$$y(t) = Y_0 \sin(\theta t),$$

где амплитуда вынужденных колебаний

$$Y_0 = y_{\max} = k_d \delta_{11} P_0 = 1,56 \cdot 1,813 \cdot 10^{-7} \cdot 1,5 \cdot 10^3 = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

**Напряжения в опасном сечении.** Опасным является то сечение балки, в котором изгибающий момент максимален. По эпюре моментов  $\bar{M}$  устанавливаем, что  $A$  – опасное сечение, в нем  $\bar{M}_{\max} = \bar{M}_A = 1,313 \text{ м}$ .

Постоянная составляющая часть напряжений от веса двигателя

$$\sigma_{st}^{mg} = \frac{\bar{M}_{\max} mg}{W_x} = \frac{1,313 \cdot 500 \cdot 9,8}{269 \cdot 10^{-6}} = 23,92 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,92 \text{ МПа}.$$

Максимальная динамическая составляющая часть напряжений от действия возмущающей силы определяется как произведение статической составляющей напряжений от этой силы на динамический коэффициент:

$$\begin{aligned} \sigma_d^{P_0} &= k_d \sigma_{st}^{P_0} = k_d \frac{\bar{M}_{\max} P_0}{W_x} = 1,56 \cdot \frac{1,313 \cdot 1500}{269 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 11,42 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,42 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Так как центробежная сила в начальный момент равна нулю и действует периодически, то полное напряжение будет изменяться циклически по следующему закону:

$$\sigma = \sigma_{st}^{mg} + \sigma_d^{P_0} \sin(\theta t) = 23,92 + 11,42 \sin(62,80 t).$$

Цикл изменения напряжений несимметричный. Максимальное и минимальное значения

$$\sigma_{\max} = \sigma_{st}^{mg} + \sigma_d^{P_0} = 23,92 + 11,42 = 35,34 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{st}^{mg} - \sigma_d^{P_0} = 23,92 - 11,42 = 12,50 \text{ МПа}.$$

Период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{2 \cdot 3,14}{62,80} = 0,100 \text{ с}$ .

Изображаем цикл графически (рисунок 2.2).

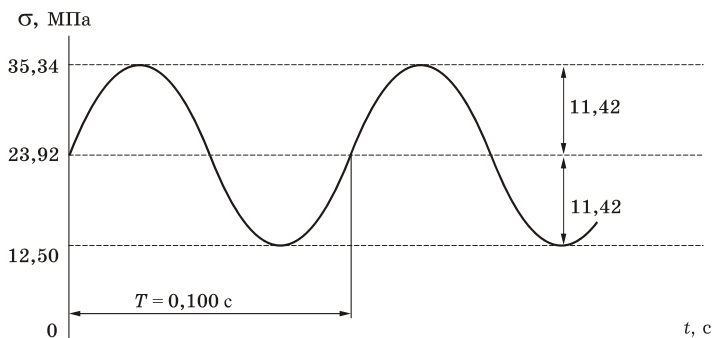


Рисунок 2.2

Проверим выполнение условия прочности

$$\max(|\sigma_{\max}|, |\sigma_{\min}|) \leq R; \quad 35,34 < 150 \text{ МПа.}$$

Условие выполняется, прочность балки обеспечена.

**Проверка на резонанс.** Как известно, резонанс – это явление, при котором амплитуда колебаний и напряжения неограниченно возрастают. Наблюдается при  $\omega = \theta$ . В этом случае  $k_d = \infty$ . Для нормальной работы системы необходимо, чтобы частоты собственных и вынужденных колебаний системы отличались не менее, чем на 20 %. Для рассматриваемой балки

$$\frac{|\omega - \theta|}{\max(\omega, \theta)} \cdot 100 \% = \frac{|105,03 - 62,80|}{105,03} \cdot 100 \% = 40 \% \geq 20 \%.$$

Система достаточно далека от резонанса.

**ПРИМЕР 2.** Для заданной системы (рисунок 2.3) требуется: определить частоты и амплитуды собственных колебаний, показать формы колебаний.

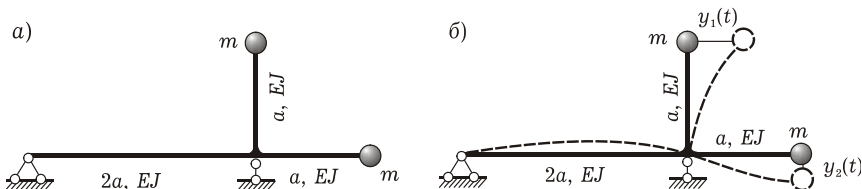


Рисунок 2.3

Исходные данные: масса каждого из точечных грузов  $m = 2000$  кг; величина  $a = 2$  м, жесткость стержней системы  $EJ = 5 \cdot 10^7$  Н · м<sup>2</sup>.

**Число степеней свободы.** Движение из плоскости чертежа считаем невозможным. Вращением грузов пренебрегаем. В соответствии с гипотезой о малости перемещений каждый груз может совершать перемещения только в одном направлении – по перпендикуляру к недеформированной оси рамы. Поэтому система обладает двумя степенями свободы. Перемещения грузов обозначим  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  (см. рисунок 2.3, б).

**Определение единичных перемещений.** В направлении  $y_1(t)$  прикладываем горизонтальную единичную силу  $\bar{F}_1 = 1$  и строим эпюру  $\bar{M}_1$  (рисунок 2.4, а). В направлении  $y_2(t)$  прикладываем вертикальную единичную силу  $\bar{F}_2 = 1$  и строим эпюру  $\bar{M}_2$  (рисунок 2.4, б).

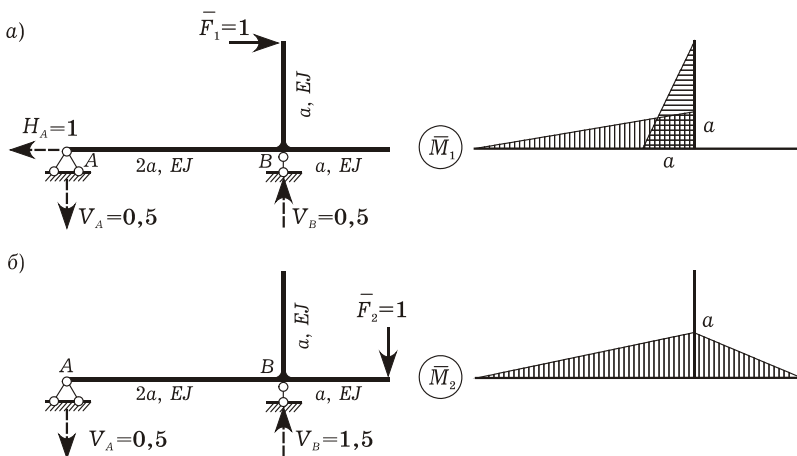


Рисунок 2.4

Для вычисления перемещений используем формулу Мора (1.29):

$$\delta_{ki} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_i}{EJ} dz \quad (k, i = 1, 2),$$

где  $\delta_{ki}$  – перемещение по направлению  $y_k$  от действия единичного усилия, приложенного по направлению  $y_i$ .

Единичные перемещения  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  называются *главными*, они всегда положительны;  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{21}$  – *побочные* единичные перемещения, в соответствии с теоремой Максвелла  $\delta_{12} = \delta_{21}$ . Все стержни прямо-



линейны, их жесткость постоянна. Для перемножения эпюр воспользуемся формулой трапеций (1.31).

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot a \cdot a + a \cdot 0 + 0 \cdot a) + \\ &+ \frac{a}{6EJ} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot a \cdot a + a \cdot 0 + 0 \cdot a) = \frac{a^3}{EJ}; \\ \delta_{22} &= \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot a \cdot a + a \cdot 0 + 0 \cdot a) + \\ &+ \frac{a}{6EJ} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot a \cdot a + a \cdot 0 + 0 \cdot a) = \frac{a^3}{EJ}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot a \cdot a + a \cdot 0 + 0 \cdot a) = \frac{2a^3}{3EJ}.\end{aligned}$$

**Система уравнений движения (1.9)** для системы с двумя степенями свободы будет

$$\begin{cases} (m\delta_{11} - \lambda) Y_1 + m\delta_{12} Y_2 = 0, \\ m\delta_{21} Y_1 + (m\delta_{22} - \lambda) Y_2 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left( \frac{ma^3}{EJ} - \lambda \right) Y_1 + \frac{2ma^3}{3EJ} Y_2 = 0, \\ \frac{2ma^3}{3EJ} Y_1 + \left( \frac{ma^3}{EJ} - \lambda \right) Y_2 = 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  – собственное число.

Упрощаем систему, умножая на  $\frac{3EJ}{ma^3}$  и вводя обозначение

$$L = \lambda \frac{3EJ}{ma^3} :$$

$$\begin{cases} (3 - L) Y_1 + 2Y_2 = 0, \\ 2Y_1 + (3 - L) Y_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $Y_1, Y_2$ . Она имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 3-L & 2 \\ 2 & 3-L \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

**Характеристическое уравнение и его решение.** Раскрывая определитель (2.2), получаем характеристическое уравнение

$$(3-L)(3-L) - 2 \cdot 2 = 0;$$

или

$$L^2 - 6L + 5 = 0.$$

Дискриминант  $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$ , корни  $L_{1,2} = \frac{1}{2}(6 \pm \sqrt{D})$ :

$$L_1 = \frac{1}{2}(6 + \sqrt{16}) = 5; \quad L_2 = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{16}) = 1.$$

Корни нумеруем так, чтобы выполнялось условие  $L_1 > L_2$ .

**Частоты колебаний.** Собственные числа и частоты собственных колебаний связаны соотношением  $\lambda = 1/\omega^2$ . С учетом обозначения  $L$ , введенного в (2.1), получаем

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,2}}} = \frac{1}{\sqrt{L_{1,2} \frac{ma^3}{3EJ}}};$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \frac{ma^3}{3EJ}}} = \frac{1}{\sqrt{5 \frac{2000 \cdot 2^3}{3 \cdot 5 \cdot 10^7}}} = 43,30 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 \frac{ma^3}{3EJ}}} = \frac{1}{\sqrt{1 \frac{2000 \cdot 2^3}{3 \cdot 5 \cdot 10^7}}} = 96,82 \text{ с}^{-1}.$$

Частоты нумеруем по возрастанию ( $\omega_1 < \omega_2$ ).

**Формы колебаний.** Первая форма колебаний соответствует частоте  $\omega_1 = 43,30 \text{ с}^{-1}$ ,  $L_1 = 5$ . В системе (2.1) к  $L$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  добавляем индекс «1»:

$$\begin{cases} (3-L_1)Y_{11} + 2Y_{21} = 0, \\ 2Y_{11} + (3-L_1)Y_{21} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Подставляем  $L_1$  в (2.3). Так как определитель системы равен нулю, то из двух уравнений только одно линейно независимое. Из системы удаляем первое уравнение. Задаемся значением  $Y_{11} = 1$ . Для определения  $Y_{21}$  используем оставшееся второе уравнение:

$$2 \cdot 1 + (3 - 5) Y_{21} = 0; \quad Y_{21} = 1.$$

$Y_{11}$  – амплитудное значение перемещения  $y_1$  при колебаниях с частотой  $\omega_1$ ;  $Y_{21}$  – амплитудное значение перемещения  $y_2$  при колебаниях с частотой  $\omega_1$ .

*Вторая форма колебаний* соответствует  $\omega_2 = 96,82 \text{ с}^{-1}$ ,  $L_2 = 1$ . В системе (2.1) к  $L$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  добавляем индекс «2»:

$$\begin{cases} (3 - L_2) Y_{12} + 2Y_{22} = 0, \\ 2Y_{12} + (3 - L_2) Y_{22} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Подставляем  $L_2$  в (2.4). Задаемся значением  $Y_{22} = 1$ . Для определения  $Y_{12}$  используем второе уравнение:

$$2Y_{12} + (3 - 1) \cdot 1 = 0; \quad Y_{12} = -1.$$

$Y_{12}$  – амплитудное значение перемещения  $y_1$  при колебаниях с частотой  $\omega_2$ ;  $Y_{22}$  – амплитудное значение перемещения  $y_2$  при колебаниях с частотой  $\omega_2$ .

Показываем формы колебаний (рисунок 2.5). Положительные амплитуды откладываем в направлениях, совпадающих с направлениями единичных сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  на рисунке 2.3, отрицательные – противоположно.

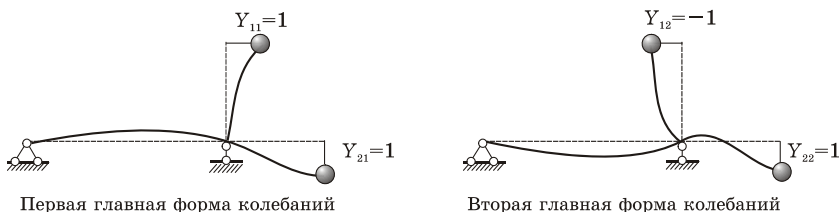


Рисунок 2.5

**Проверка ортогональности форм колебаний.** Для рассматриваемой системы с двумя степенями свободы, у которой массы точечных грузов одинаковы, должно выполняться условие (1.28)

$$mY_{11}Y_{12} + mY_{21}Y_{22} = 0.$$

Подставляя значения амплитуд, получим

$$-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

Проверка выполняется.

**ПРИМЕР 3.** Для заданной системы (рисунок 2.6, а) требуется: определить частоты и амплитуды собственных колебаний, показать формы колебаний.

Исходные данные: масса каждого из точечных грузов  $m = 2500$  кг; длины участков  $a = 3$  м, жесткость стержней системы  $EJ = 9 \cdot 10^6$  Н · м<sup>2</sup>.

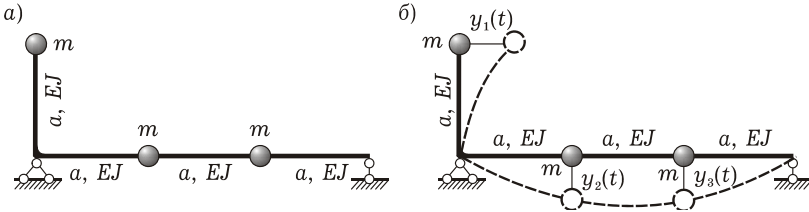


Рисунок 2.6

**Число степеней свободы.** Движение из плоскости чертежа считаем невозможным. Вращением грузов пренебрегаем. В соответствии с гипотезой о малости перемещений грузы могут смещаться по перпендикуляру к недеформированной оси рамы. Система обладает тремя степенями свободы, так как перемещения грузов можно полностью описать тремя независимыми величинами  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  (рисунок 2.6, б).

**Определение единичных перемещений.** В направлении  $y_1(t)$  прикладываем единичную силу  $\bar{F}_1 = 1$  и строим эпюру  $\bar{M}_1$ . Аналогично строим эпюры  $\bar{M}_2$  и  $\bar{M}_3$  (рисунок 2.7).

Для вычисления перемещений используем формулу Мора (1.29):

$$\delta_{ki} = \sum_i \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_i}{EJ} dz \quad (k, i = 1, 2, 3),$$

где  $\delta_{ki}$  – перемещение по направлению  $y_k$  от действия единичного усилия, приложенного по направлению  $y_i$ ; в соответствии с теоремой Максвелла  $\delta_{ki} = \delta_{ik}$ .

Главные единичные перемещения получим, перемножив соответствующие единичные эпюры с помощью способа Верещагина (1.32):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4a^3}{3EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 2a \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4a^3}{9EJ};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 2a \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{4a^3}{9EJ}.$$

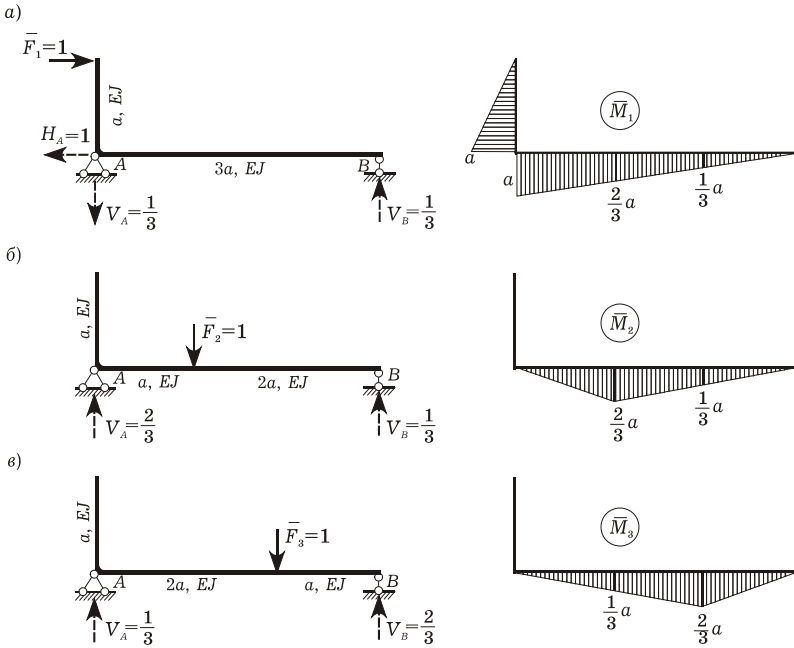


Рисунок 2.7

Побочные единичные перемещения получим, перемножив соответствующие единичные эпюры с помощью формулы трапеций (1.31):

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{a}{6EJ} \left( 2 \cdot 0 \cdot a + 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot \frac{2}{3} a + 0 \cdot \frac{2}{3} a \right) + \\ &+ \frac{2a}{6EJ} \left( 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} a + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \frac{2}{3} a \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{5}{9} \frac{a^3}{EJ}; \\ \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{2a}{6EJ} \left( 2 \cdot 0 \cdot a + 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} a + a \cdot \frac{2}{3} a + 0 \cdot \frac{1}{3} a \right) + \\ &+ \frac{a}{6EJ} \left( 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} a + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \frac{2}{3} a \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{3} a \right) = \frac{4}{9} \frac{a^3}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{23} = \delta_{32} = & \frac{a}{6EJ} \left( 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} a + 0 \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} a \cdot 0 \right) + \\ & + \frac{a}{6EJ} \left( 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} a + 2 \cdot \frac{1}{3} a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{3} a + \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} a \right) + \\ & + \frac{a}{6EJ} \left( 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{3} a + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{3} a \cdot 0 \right) = \frac{7}{18} \frac{a^3}{EJ}. \end{aligned}$$

**Система уравнений движения** системы с тремя степенями свободы

$$\begin{cases} (m\delta_{11} - \lambda) Y_1 + m\delta_{12} Y_2 + m\delta_{13} Y_3 = 0, \\ m\delta_{21} Y_1 + (m\delta_{22} - \lambda) Y_2 + m\delta_{23} Y_3 = 0, \\ m\delta_{31} Y_1 + m\delta_{32} Y_2 + (m\delta_{33} - \lambda) Y_3 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left( \frac{4}{3} \frac{ma^3}{EJ} - \lambda \right) Y_1 + \frac{5}{9} \frac{ma^3}{EJ} Y_2 + \frac{4}{9} \frac{ma^3}{EJ} Y_3 = 0, \\ \frac{5}{9} \frac{ma^3}{EJ} Y_1 + \left( \frac{4}{9} \frac{ma^3}{EJ} - \lambda \right) Y_2 + \frac{7}{18} \frac{ma^3}{EJ} Y_3 = 0, \\ \frac{4}{9} \frac{ma^3}{EJ} Y_1 + \frac{7}{18} \frac{ma^3}{EJ} Y_2 + \left( \frac{4}{9} \frac{ma^3}{EJ} - \lambda \right) Y_3 = 0, \end{cases}$$

где  $\lambda$  – собственные числа, связанные с собственными  $\omega$  частотами зависимостью  $\lambda = 1 / \omega^2$ .

Упрощаем систему, умножая на  $\frac{18EJ}{ma^3}$  и вводя обозначение

$$L = \lambda \frac{18EJ}{ma^3}:$$

$$\begin{cases} (24 - L) Y_1 + 10Y_2 + 8Y_3 = 0, \\ 10Y_1 + (8 - L) Y_2 + 7Y_3 = 0, \\ 8Y_1 + 7Y_2 + (8 - L) Y_3 = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Это однородная система линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $A_1, A_2, A_3$ . Она имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 24 - L & 10 & 8 \\ 10 & 8 - L & 7 \\ 8 & 7 & 8 - L \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

**Характеристическое уравнение и его решение.** Раскрыв определитель (2.5), получаем характеристическое уравнение

$$L^3 - 40L^2 + 235L - 168 = 0.$$

Решая это уравнение (например, с помощью компьютера), находим корни:

$$L_1 = 33,042; \quad L_2 = 6,129; \quad L_3 = 0,830.$$

**Частоты колебаний.** Частоты собственных колебаний вычисляем по формуле  $\omega = 1 / \sqrt{\lambda}$ . С учетом обозначения  $L$  получаем

$$\omega_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{L_{1,2,3} \frac{ma^3}{18EJ}}};$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 \frac{ma^3}{18EJ}}} = \frac{1}{\sqrt{33,042 \frac{2500 \cdot 3^3}{18 \cdot 9 \cdot 10^6}}} = 8,52 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 \frac{ma^3}{18EJ}}} = \frac{1}{\sqrt{6,129 \frac{2500 \cdot 3^3}{18 \cdot 9 \cdot 10^6}}} = 19,79 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{L_3 \frac{ma^3}{18EJ}}} = \frac{1}{\sqrt{0,830 \frac{2500 \cdot 3^3}{18 \cdot 9 \cdot 10^6}}} = 53,79 \text{ с}^{-1}.$$

Частоты нумеруем по возрастанию ( $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ ).

**Формы колебаний.** *Первая форма колебаний* соответствует частоте  $\omega_1 = 8,52 \text{ с}^{-1}$ ,  $L_1 = 33,042$ . В системе (2.4) к величинам  $L, Y_1, Y_2, Y_3$  добавляем индекс «1»:

$$\begin{cases} (24 - L_1) Y_{11} + 10Y_{21} + 8Y_{31} = 0, \\ 10Y_{11} + (8 - L_1) Y_{21} + 7Y_{31} = 0, \\ 8Y_{11} + 7Y_{21} + (8 - L_1) Y_{31} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Подставляем  $L_1$  в (2.6). Так как определитель системы равен нулю, то из трех уравнений только два линейно независимы. Из системы удаляем первое уравнение. Задаемся значением  $Y_{11} = 1$ .

Для определения  $Y_{21}$  и  $Y_{31}$  используем два оставшихся уравнения системы (2.6):

$$\begin{cases} 10 \cdot 1 + (8 - 33,042) Y_{21} + 7Y_{31} = 0, \\ 8 \cdot 1 + 7Y_{21} + (8 - 33,042) Y_{31} = 0; \\ Y_{21} = 0,530; \quad Y_{31} = 0,468. \end{cases}$$

*Вторая форма колебаний* соответствует параметрам  $\omega_2 = 19,79 \text{ с}^{-1}$ ,  $L_2 = 6,129$ . В системе (2.4) к  $L$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  добавляем индекс «2»:

$$\begin{cases} (24 - L_2) Y_{12} + 10Y_{22} + 8Y_{32} = 0, \\ 10Y_{12} + (8 - L_2) Y_{22} + 7Y_{32} = 0, \\ 8Y_{12} + 7Y_{22} + (8 - L_2) Y_{32} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Подставляем  $L_2$  в (2.7). Из системы удаляем первое уравнение. Задаемся значением  $Y_{22} = 1$ . Для определения  $Y_{12}$  и  $Y_{32}$  используем два оставшихся уравнения системы (2.7):

$$\begin{cases} 10Y_{12} + (8 - 6,129) \cdot 1 + 7Y_{32} = 0, \\ 8Y_{12} + 7 \cdot 1 + (8 - 6,129) Y_{32} = 0; \\ Y_{12} = -1,220; \quad Y_{32} = 1,476. \end{cases}$$

*Третья форма колебаний* соответствует параметрам  $\omega_3 = 53,79 \text{ с}^{-1}$ ,  $L_3 = 0,830$ . В системе (2.4) к  $L$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  добавляем индекс «3»:

$$\begin{cases} (24 - L_3) Y_{13} + 10Y_{23} + 8Y_{33} = 0, \\ 10Y_{13} + (8 - L_3) Y_{23} + 7Y_{33} = 0, \\ 8Y_{13} + 7Y_{23} + (8 - L_3) Y_{33} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Подставляем  $L_3$  в (2.8). Из системы удаляем первое уравнение. Задаемся значением  $Y_{33} = 1$ . Для определения  $Y_{13}$  и  $Y_{23}$  используем два оставшихся уравнения системы (2.8):

$$\begin{cases} 10Y_{13} + (8 - 0,830) Y_{23} + 7 \cdot 1 = 0, \\ 8Y_{13} + 7Y_{23} + (8 - 0,830) \cdot 1 = 0; \\ Y_{13} = 0,191; \quad Y_{23} = -1,242. \end{cases}$$

Найденные величины  $Y_{ki}$  ( $k, i = 1, 2, 3$ ) – это амплитудные значения перемещения  $y_k$  при колебаниях с частотой  $\omega_i$ .



Показываем формы колебаний (рисунок 2.8). Положительные амплитуды откладываем в направлениях, совпадающих с направлениями единичных сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , отрицательные – противоположно (см. рисунок 2.7).

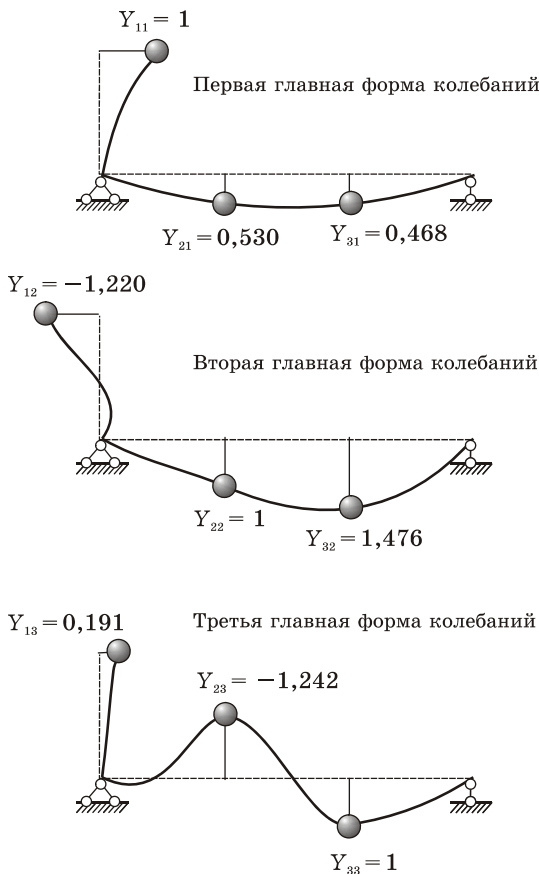


Рисунок 2.8

**Проверка ортогональности форм колебаний.** Для рассматриваемой системы с тремя степенями свободы, у которой массы точечных грузов одинаковы, должны выполняться условия (1.28)

$$\sum_{i=1}^3 m_i Y_{ik} Y_{ip} = 0 \quad (k \neq p; k, p = 1, 2, 3);$$

$$(k = 1; p = 2) \quad Y_{11} Y_{12} + Y_{21} Y_{22} + Y_{31} Y_{32} = 0;$$

$$(k = 1; p = 3) \quad Y_{11}Y_{13} + Y_{21}Y_{23} + Y_{31}Y_{33} = 0;$$

$$(k = 2; p = 3) \quad Y_{12}Y_{13} + Y_{22}Y_{23} + Y_{32}Y_{33} = 0.$$

Подставив значения амплитуд, получим

$$1 \cdot (-1,220) + 0,530 \cdot 1 + 0,468 \cdot 1,476 = 0,0008;$$

$$1 \cdot 0,191 + 0,530 \cdot (-1,242) + 0,468 \cdot 1 = 0,0007;$$

$$-1,220 \cdot 0,191 + 1 \cdot (-1,242) + 1,476 \cdot 1 = 0,0010.$$

Погрешность  $\frac{0,0010}{0,1910} \cdot 100 \% = 0,52 \%$  не превышает 5 %, про-

верка выполняется.

## 2.2 РАСЧЕТ РАМЫ

**ПРИМЕР 4.** Посередине ригеля стальной рамы находится виброустройство, которое создает сосредоточенную вибрационную нагрузку (рисунок 2.9). Сечение стойки представляет собой двутавр № 18, ригеля – двутавр № 27. Длина стойки –  $l_1 = 5$  м; ригеля –  $l_2 = 6$  м.

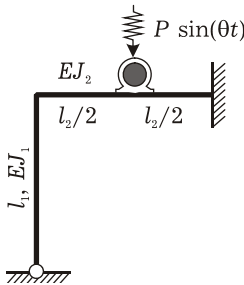


Рисунок 2.9

Принять, что внешние нагрузки действуют в главной плоскости наименьшей изгибной жесткости двутавра. Потеря устойчивости стержней происходит в плоскости рамы. Частоту возмущающей силы виброустройства запроектировать равной 60 % минимальной частоты собственных колебаний. Расчетное сопротивление стали принять  $R = 210$  МПа, модуль Юнга –  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, собственным весом виброустройства пренебречь.

*Требуется:* 1) из условия прочности по нормальным напряжениям определить амплитуду вибрационной нагрузки;

2) проверить выполнение условия устойчивости.

**Геометрические характеристики стержней рамы.** Так как внешние нагрузки действуют в главной плоскости наименьшей изгибной жесткости двутавров, то из сортамента прокатной стали (приложение А) выписываем значения моментов инерции и моментов сопротивления относительно оси  $y$ :  $J_1 = 82,6 \text{ см}^4$ ,  $W_1 = 18,4 \text{ см}^3$ ,  $J_2 = 260 \text{ см}^4$ ,  $W_2 = 41,5 \text{ см}^3$ , площадей попереч-

ных сечений  $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 40,2 \text{ см}^2$  и погонные массы  $\mu_1 = 18,4 \text{ кг/м}$ ,  $\mu_2 = 31,5 \text{ кг/м}$  стержней рамы.

**Число степеней свободы.** Для динамического расчета считаем, что массы сосредоточены посередине стержней. Система обладает двумя степенями свободы, так как для описания положения масс необходимо два независимых геометрических параметра  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  (рисунок 2.10).

Система уравнений для определения амплитуд свободных колебаний (1.24)

$$(\delta_{11}m_1 - \lambda)Y_1 + \delta_{12}m_2Y_2 = 0;$$

$$\delta_{21}m_1Y_1 + (\delta_{22}m_2 - \lambda)Y_2 = 0,$$

где  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{21}$ ,  $\delta_{22}$  – единичные перемещения по направлению движения масс,  $\lambda$  – собственные числа,  $Y_1$ ,  $Y_2$  – амплитуды собственных колебаний масс  $m_1$  и  $m_2$ .

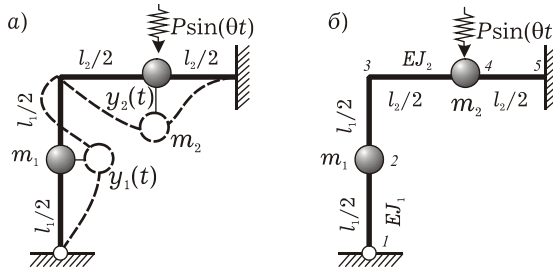


Рисунок 2.10

Вычислим массы первого и второго стержня рамы:

$$m_1 = \mu_1 l_1 = 18,4 \cdot 5 = 92 \text{ кг}; \quad m_2 = \mu_2 l_2 = 31,5 \cdot 6 = 189 \text{ кг}.$$

**Построение единичной эпюры  $M_1$ .** Для вычисления единичных перемещений необходимо построить эпюры изгибающих моментов от двух единичных нагрузок  $\bar{P}_1 = 1$  и  $\bar{P}_2 = 1$ , приложенных по направлениям перемещений масс.

Рама статически неопределима. Для построения эпюр воспользуемся методом перемещений. Степень кинематической неопределимости  $n_k = 1$ .

Построим эпюру  $M_1$  от воздействия силы  $\bar{P}_1 = 1$  (рисунок 2.11, а).

Сформируем основную систему, введя в жесткий узел плавающую заделку и придавая ей угловое перемещение  $Z_1^{(1)}$  (рисунок 2.11, б).

Каноническое уравнение для один раз кинематически неопределимой системы имеет вид

$$r_{11}Z_1^{(1)} + R_p^{(1)} = 0.$$

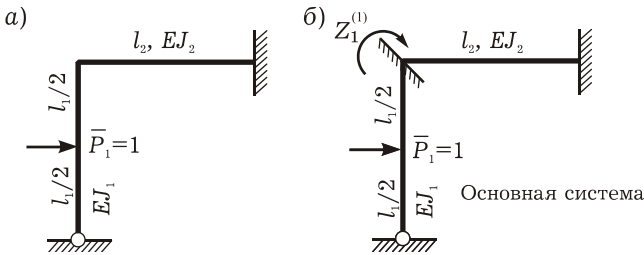


Рисунок 2.11

Формируем состояние «1» основной системы, задавая поворот плавающей заделки на единичный угол в направлении  $Z_1^{(1)}$ . По таблицам приложения Б строим единичную эпюру  $\bar{M}_1$  (рисунок 2.12). Длины подставляем в сантиметрах.

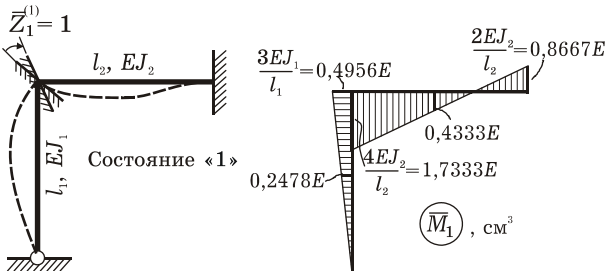


Рисунок 2.12

Далее формируем грузовое состояние «1p» основной системы, прикладывая к ней внешнюю нагрузку  $\bar{P}_1 = 1$ . По таблицам приложения Б строим грузовую эпюру  $M_p^{(1)}$  (рисунок 2.13).

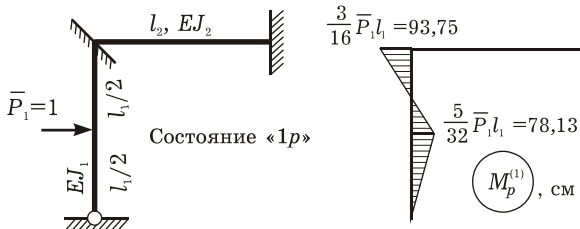


Рисунок 2.13

Находим моментные реакции в плавающей заделке. Для этого вырезаем жесткий узел с данной связью в состояниях «1», «1p»

(рисунок 2.14) и составляем уравнение равновесия  $\sum M^{\text{узла}} = 0$  в каждом из состояний. В результате получаем, что

$$r_{11} = 0,4956E + 1,7333E = 2,2289E \text{ см}^3; \quad R_p^{(1)} = 93,75 \text{ см}.$$

Подставим значения реакций в каноническое уравнение и получим

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)} &= -\frac{R_p^{(1)}}{r_{11}} = -\frac{93,75}{2,2289E} = \\ &= -\frac{42,0605}{E} \text{ см}^{-2}. \end{aligned}$$

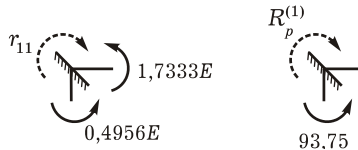


Рисунок 2.14

Ординаты эпюры  $M_1$  в заданной системе находим по формуле

$$M_1 = \bar{M}_1 Z_1^{(1)} + M_p^{(1)}.$$

Для этого умножаем ординаты единичной эпюры  $\bar{M}_1$  на найденное значение перемещения  $Z_1^{(1)}$  и добавляем ординаты грузовой эпюры  $M_p^{(1)}$ . Получаем окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_1$  для единичной нагрузки  $\bar{P}_1 = 1$  (рисунок 2.15).

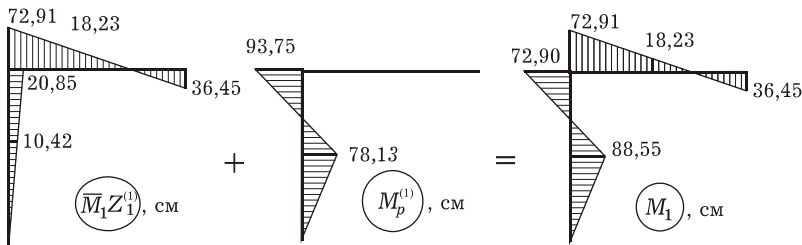


Рисунок 2.15

**Построение единичной эпюры  $M_2$ .** Построим эпюру  $M_2$  от воздействия силы  $\bar{P}_2 = 1$  (рисунок 2.16, а).

Сформируем основную систему, введя в жесткий узел плавающую заделку и придавая ей угловое перемещение  $Z_1^{(2)}$  (рисунок 2.16, б).

Каноническое уравнение имеет вид

$$r_{11} Z_1^{(2)} + R_p^{(2)} = 0.$$

Реакция  $r_{11}$  не зависит от внешней нагрузки, поэтому она остается такой же, как и при построении эпюры  $M_1$ , т. е.  $r_{11} = 2,2289E \text{ см}^3$ .

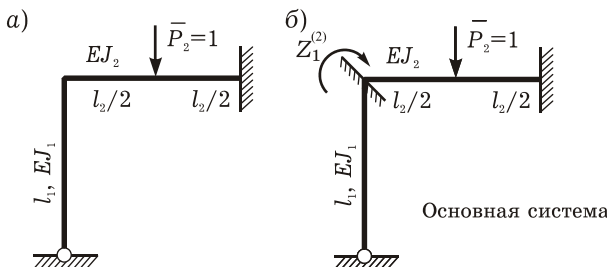


Рисунок 2.16

Формируем грузовое состояние «2р» основной системы, прикладывая к ней внешнюю нагрузку  $\bar{P}_2 = 1$ . По таблицам строим грузовую эпюру  $M_p^{(2)}$  (рисунок 2.17, а).

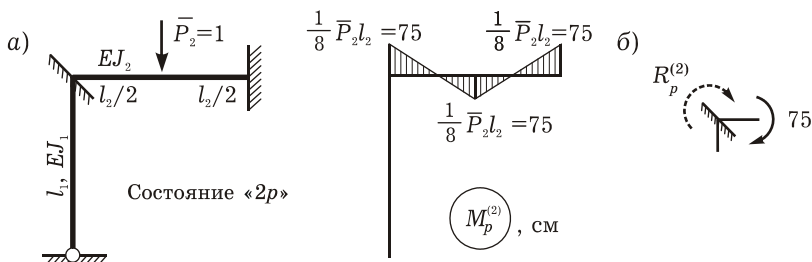


Рисунок 2.17

Находим моментную реакцию в плавающей заделке. Для этого вырезаем жесткий узел с данной связью в состоянии «2р» (рисунок 2.17, б) и составляем уравнение равновесия  $\sum M^{\text{узла}} = 0$ . В результате получаем, что

$$R_p^{(2)} = -75 \text{ см.}$$

Подставим значения реакций в каноническое уравнение и получим

$$Z_1^{(2)} = -\frac{R_p^{(2)}}{r_{11}} = \frac{75}{2,2289E} = \frac{33,6484}{E} \text{ см}^{-2}.$$

Ординаты эпюры  $M_2$  в заданной системе находим по формуле

$$M_2 = \bar{M}_1 Z_1^{(2)} + M_p^{(2)}.$$

Для этого умножаем ординаты единичной эпюры  $\bar{M}_2$  на найденное значение перемещения  $Z_1^{(2)}$  и добавляем ординаты грузовой эпюры  $M_p^{(2)}$ . Получаем окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_2$  для единичной нагрузки  $\bar{P}_2 = 1$  (рисунок 2.18).

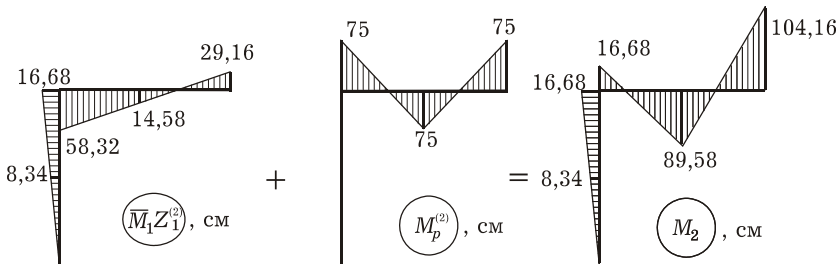


Рисунок 2.18

**Единичные перемещения.** Искомые перемещения вычислим по формуле Мора (1.29) с использованием способов «перемножения» эпюр (формулы Верещагина, трапеций), подставив значения из эпюр в метрах:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11} &= \sum \int \frac{M_1 M_1}{EJ_i} dz = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 82,6 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{1}{2} 88,55 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 88,55 \cdot 10^{-2} + \\
 &\quad + \frac{2,5}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 82,6 \cdot 10^{-8}} \left( 2 \cdot 88,55 \cdot 10^{-2} \cdot 88,55 \cdot 10^{-2} + \right. \\
 &\quad + 2 \cdot 72,90 \cdot 10^{-2} \cdot 72,90 \cdot 10^{-2} - 72,90 \cdot 10^{-2} \cdot 88,55 \cdot 10^{-2} - \\
 &\quad \left. - 88,55 \cdot 10^{-2} \cdot 72,90 \cdot 10^{-2} \right) + \frac{6}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 260 \cdot 10^{-8}} \times \\
 &\quad \times \left( 2 \cdot 72,91 \cdot 10^{-2} \cdot 72,91 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 36,45 \cdot 10^{-2} \cdot 36,45 \cdot 10^{-2} - \right. \\
 &\quad \left. - 72,91 \cdot 10^{-2} \cdot 36,45 \cdot 10^{-2} - 36,45 \cdot 10^{-2} \cdot 72,91 \cdot 10^{-2} \right) = \\
 &= 8,868 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{22} &= \sum \int \frac{M_2 M_2}{EJ_i} dz = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 82,6 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{1}{2} 16,68 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,68 \cdot 10^{-2} + \\
 &\quad + \frac{3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 260 \cdot 10^{-8}} \left( 2 \cdot 16,68 \cdot 10^{-2} \cdot 16,68 \cdot 10^{-2} + \right. \\
 &\quad + 2 \cdot 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 89,58 \cdot 10^{-2} - 16,68 \cdot 10^{-2} \cdot 89,58 \cdot 10^{-2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 16,68 \cdot 10^{-2}) + \frac{3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 260 \cdot 10^{-8}} \times \\
& \times (2 \cdot 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 89,58 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 104,16 \cdot 10^{-2} \cdot 104,16 \cdot 10^{-2} - \\
& - 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 104,16 \cdot 10^{-2} - 104,16 \cdot 10^{-2} \cdot 89,58 \cdot 10^{-2}) = \\
& = 3,425 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н} ; \\
& \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{E J_i} dz = \\
& = - \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 82,6 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{1}{2} 8,34 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 88,55 \cdot 10^{-2} + \\
& + \frac{2,5}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 82,6 \cdot 10^{-8}} (-2 \cdot 88,55 \cdot 10^{-2} \cdot 8,34 \cdot 10^{-2} + \\
& + 2 \cdot 72,90 \cdot 10^{-2} \cdot 16,68 \cdot 10^{-2} + 72,90 \cdot 10^{-2} \cdot 8,34 \cdot 10^{-2} - \\
& - 88,55 \cdot 10^{-2} \cdot 16,68 \cdot 10^{-2}) + \frac{3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 260 \cdot 10^{-8}} \times \\
& \times (-2 \cdot 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 18,23 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 72,91 \cdot 10^{-2} \cdot 16,68 \cdot 10^{-2} - \\
& - 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 72,91 \cdot 10^{-2} + 16,68 \cdot 10^{-2} \cdot 18,23 \cdot 10^{-2}) + \\
& + \frac{3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 260 \cdot 10^{-8}} (-2 \cdot 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 18,23 \cdot 10^{-2} - \\
& - 2 \cdot 104,16 \cdot 10^{-2} \cdot 36,45 \cdot 10^{-2} + 89,58 \cdot 10^{-2} \cdot 36,45 \cdot 10^{-2} + \\
& + 104,16 \cdot 10^{-2} \cdot 18,23 \cdot 10^{-2}) = -1,577 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н} .
\end{aligned}$$

**Частоты колебаний.** Для построения динамической эпюры моментов необходимо знать частоты собственных колебаний. Для системы с двумя степенями свободы они вычисляются из характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - \lambda & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

Подставим значения найденных масс и единичных перемещений

$$\begin{vmatrix} 8,868 \cdot 10^{-6} \cdot 92 - \lambda & -1,577 \cdot 10^{-6} \cdot 189 \\ -1,577 \cdot 10^{-6} \cdot 92 & 3,425 \cdot 10^{-6} \cdot 189 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$



$$\begin{vmatrix} 8,159 \cdot 10^{-4} - \lambda & -2,981 \cdot 10^{-4} \\ -1,451 \cdot 10^{-4} & 6,474 \cdot 10^{-4} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель

$$(8,159 \cdot 10^{-4} - \lambda)(6,474 \cdot 10^{-4} - \lambda) - (-2,981 \cdot 10^{-4})(-1,451 \cdot 10^{-4}) = 0$$

и приведя подобные, получим квадратное уравнение относительно собственных чисел  $\lambda$

$$\lambda^2 - 14,633 \cdot 10^{-4} \lambda + 48,495935 \cdot 10^{-8} = 0.$$

Решив квадратное уравнение, получим два собственных числа, для которых должно выполняться условие  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ :

$$\lambda_1 = 9,560 \cdot 10^{-4}, \quad \lambda_2 = 5,072 \cdot 10^{-4}.$$

Частоты собственных колебаний:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{1}{9,560 \cdot 10^{-4}}} = 32,3 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{1}{5,072 \cdot 10^{-4}}} = 44,4 \text{ с}^{-1},$$

при этом  $\omega_1 \leq \omega_2$ .

Частота вынужденных колебаний принимается как 60 % от минимальной частоты собственных колебаний:

$$\theta = 60 \% \cdot \omega_{\min} = 0,6\omega_1 = 0,6 \cdot 32,3 = 19,4 \text{ с}^{-1}.$$

**Вынужденные колебания.** Для вычисления амплитудных значений сил инерции  $I_1^0$  и  $I_2^0$ , возникающих при вынужденных колебаниях в направлении возможного движения сосредоточенных масс, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* I_1^0 + \delta_{12} I_2^0 + \Delta_{1p}^0 = 0, \\ \delta_{21} I_1^0 + \delta_{22}^* I_2^0 + \Delta_{2p}^0 = 0, \end{cases}$$

где

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2}; \quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2};$$

$\Delta_{1p}^0, \Delta_{2p}^0$  – перемещения масс, вызванные амплитудой вибрационной нагрузки.

Вычислим коэффициенты системы:

$$\delta_{11}^* = 8,868 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{92 \cdot 19,4^2} = -2,000 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н};$$

$$\delta_{22}^* = 3,425 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{189 \cdot 19,4^2} = -1,063 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -0,158 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н}.$$

Эпюра изгибающих моментов  $M_p$  может быть получена из эпюры  $M_2$  домножением всех ординат на  $P$ :  $M_p = PM_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{1p}^0 &= \sum \int \frac{M_1 M_p}{EJ_i} dz = \sum \int \frac{M_1 P M_2}{EJ_i} dz = P \sum \int \frac{M_1 M_2}{EJ_i} dz = \\ &= P \delta_{12} = -0,158P \cdot 10^{-5} \text{ м/Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p}^0 &= \sum \int \frac{M_2 M_p}{EJ_i} dz = \sum \int \frac{M_2 P M_2}{EJ_i} dz = P \sum \int \frac{M_2 M_2}{EJ_i} dz = \\ &= P \delta_{22} = 0,343P \cdot 10^{-5} \text{ м/Н}. \end{aligned}$$

Подставим значения перемещений в систему:

$$\begin{cases} -2,000 \cdot 10^{-5} I_1^0 - 0,158 \cdot 10^{-5} I_2^0 - 0,158P \cdot 10^{-5} = 0, \\ -0,158 \cdot 10^{-5} I_1^0 - 1,063 \cdot 10^{-5} I_2^0 + 0,343P \cdot 10^{-5} = 0, \end{cases}$$

упростим

$$\begin{cases} 2,000 I_1^0 + 0,158 I_2^0 = -0,158P, \\ 0,158 I_1^0 + 1,063 I_2^0 = 0,343P. \end{cases}$$

Решение системы

$$I_1^0 = -0,106P; \quad I_2^0 = 0,338P.$$

**Построение эпюр.** Динамическую эпюру моментов строим (рисунок 2.19), складывая соответствующие ординаты эпюры моментов по формуле:

$$M_d = M_1 I_1^0 + M_2 I_2^0 + M_p.$$

Эпюру поперечных сил  $Q_d$  построим по готовой эпюре изгибающих моментов  $M_d$ .

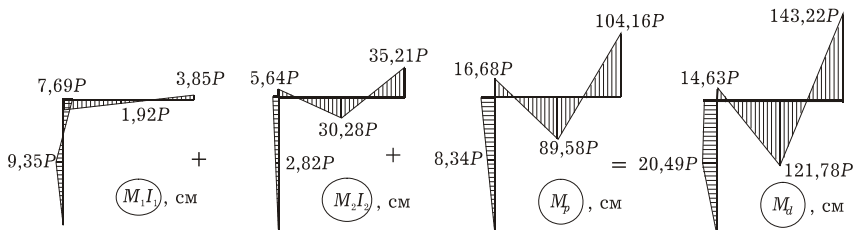


Рисунок 2.19

Эпюра  $M_d$  прямолинейна, поперечная сила равна тангенсу угла наклона эпюры моментов.  $Q$  положительна, если для совмещения оси стержня с эпюрой  $M_d$  ось вращают по часовой стрелке, и наоборот. Значения из эпюры моментов подставляем в метрах. В соответствии с этим

$$Q_{1-2} = -\frac{20,49P \cdot 10^{-2}}{0,5l_1} = -\frac{20,49P \cdot 10^{-2}}{2,5} = -0,082P;$$

$$Q_{2-3} = \frac{(20,49P - 14,63P) 10^{-2}}{0,5l_1} = \frac{5,86P \cdot 10^{-2}}{2,5} = 0,023P;$$

$$Q_{3-4} = \frac{(121,78P + 14,63P) 10^{-2}}{0,5l_2} = \frac{136,41P \cdot 10^{-2}}{3} = 0,455P;$$

$$Q_{4-5} = -\frac{(121,78P + 143,22P) 10^{-2}}{0,5l_2} = -\frac{265,33P \cdot 10^{-2}}{3} = -0,884P.$$

По рассчитанным ординатам строим эпюру  $Q_d$  (рисунок 2.20, а).

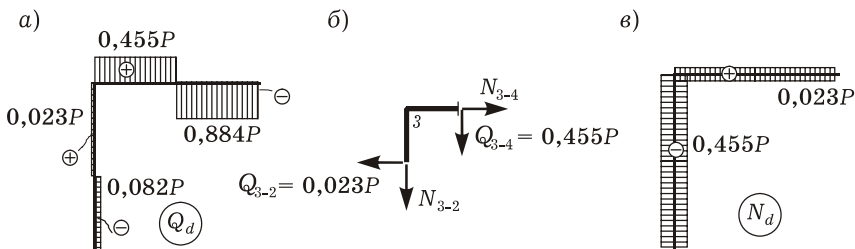


Рисунок 2.20

Эпюру продольных сил  $N_d$  строим по готовой эпюре  $Q_d$ . Вырежем жесткий узел рамы, в сечениях приложим поперечные и продольные силы (рисунок 2.20, б). Положительные поперечные силы направим так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке,

отрицательные – против часовой стрелки. Все продольные силы  $N$  считаем положительными – растягивающими.

Из уравнений проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси найдем неизвестные продольные силы.

$$N_{3-4} = Q_{3-2} = 0,023 P ; \quad N_{3-2} = -Q_{3-4} = -0,455 P .$$

Знак «минус» указывает на то, что стержень 3–2 сжат. По полученным данным строим эпюру  $N_d$  (рисунок 2.20, в).

**Определение грузоподъемности.** Опасным является то сечение балки, в котором нормальные напряжения максимальны. Вычислим максимальные по модулю напряжения в стойке и ригеле рамы. Для этого из эпюры  $M_d$  выбираем сечения с максимальным по модулю изгибающим моментом, и в этих сечениях из эпюры  $N_d$  выбираем соответствующую продольную силу:

– в стойке

$$\sigma_{d \max}^{(1)} = \left| \frac{M_{d \max}^{(1)}}{W_1} \right| + \left| \frac{N_d^{(1)}}{A_1} \right| = \frac{20,49P \cdot 10^{-2}}{18,4 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,455P}{23,4 \cdot 10^{-4}} = 11330P \text{ м}^{-2};$$

– в ригеле

$$\sigma_{d \max}^{(2)} = \left| \frac{M_{d \max}^{(2)}}{W_2} \right| + \left| \frac{N_d^{(2)}}{A_2} \right| = \frac{143,22P \cdot 10^{-2}}{41,5 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,023P}{40,2 \cdot 10^{-4}} = 34516P \text{ м}^{-2} .$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определим максимальную амплитудную составляющую вибрационной нагрузки  $P_{\max}$ , которая может быть приложена к раме

$$\max(\sigma_{d \max}^{(1)}, \sigma_{d \max}^{(2)}) \leq R ,$$

$$34516P \leq 210 \cdot 10^6 ,$$

$$P \leq 6084 \text{ Н} .$$

Принимаем  $P_{\max} = 6,0 \text{ кН} .$

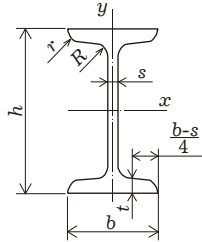
## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Бабаков, И. М.** Теория колебаний : учеб. для вузов / И. М. Бабаков. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
- 2 **Воробьев, С. А.** Сопротивление материалов. Прикладная теория колебаний : учеб. пособие / С. А. Воробьев. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 257 с.
- 3 **Даламбер, Ж.** Динамика / Ж. Даламбер. – Москва-Ленинград : Гос-техтеориздат, 1950. – 343 с.
- 4 **Довнар, Е. П.** Строительная механика : учеб. для вузов по спец. «Строительство» / Е. П. Довнар, Л. И. Коршун. – Минск : Выш. шк., 1986. – 310 с.
- 5 **Коллатц, Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями) / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 501 с.
- 6 **Леоненко, Д. В.** Эпюры внутренних силовых факторов / Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2012. – 51 с.
- 7 **Смирнов, А. Ф.** Строительная механика. Стержневые системы : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.
- 8 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов : учеб. для вузов / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 384 с.
- 9 **Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.**
- 10 **Яровая, А. В.** Строительная механика. Статика стержневых систем : учеб. пособие / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

### Сортамент двутавров стальных горячекатаных (по ГОСТ 8239–89)



$h$  – высота балки;  
 $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $R$  – радиус внутреннего закругления;

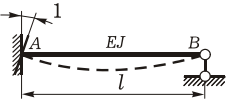
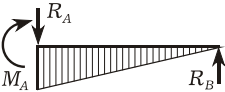
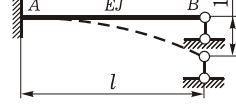
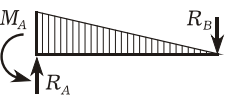
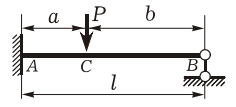
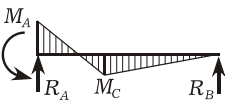
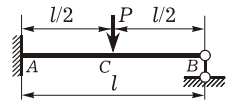
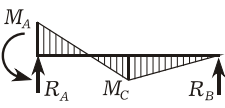
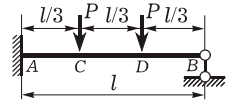
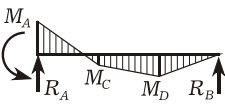
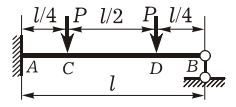
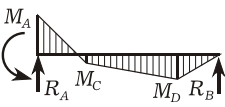
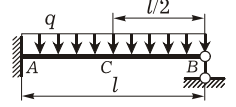
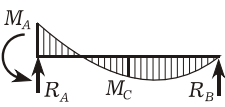
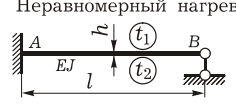
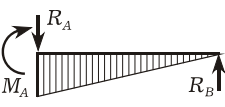
$r$  – радиус закругления полки;  
 $J$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $S$  – статический момент площади полусечения

**Таблица А.1 – Геометрические характеристики двутавров**

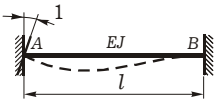
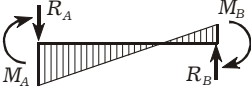
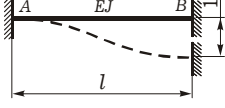
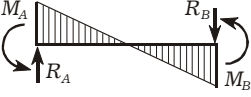
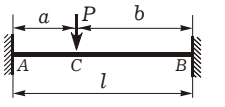
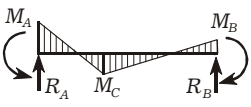
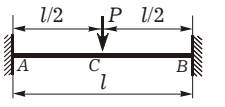
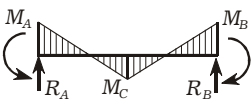
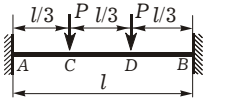
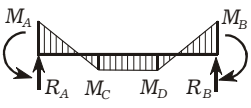
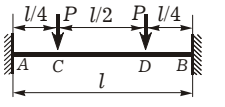
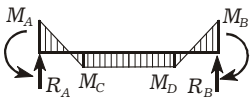
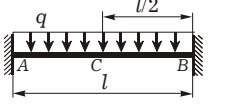
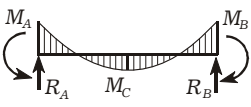
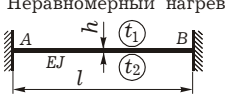

Номер двутавра	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$		$A_2$ см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
					не более				X–X				Y–Y		
					мм						$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491	1725,0	182,00	3,54

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**  
(справочное)

**Таблица Б.1 – Эпюры изгибающих моментов и реакции опор в отдельных изогнутых стержнях**

Расчетная схема стержня	Эпюра изгибающих моментов и реакции	Значения моментов и реакций
<p><b>1</b></p> 		$R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^2};$ $M_A = \frac{3EJ}{l}$
<p><b>2</b></p> 		$R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^3};$ $M_A = \frac{3EJ}{l^2}$
<p><b>3</b></p> 		$R_A = \frac{Pb}{2l^3}(3l^2 - b^2); R_B = \frac{Pa^2}{2l^3}(3l - a);$ $M_A = \frac{Pb}{2l^2}(l^2 - b^2); M_C = \frac{Pa^2b}{2l^3}(3l - a)$
<p><b>4</b></p> 		$R_A = \frac{11}{16}P; R_B = \frac{5}{16}P;$ $M_A = \frac{3}{16}Pl; M_C = \frac{5}{32}Pl$
<p><b>5</b></p> 		$R_A = \frac{4}{3}P; R_B = \frac{2}{3}P;$ $M_A = \frac{1}{3}Pl; M_C = \frac{1}{9}Pl; M_D = \frac{2}{9}Pl$
<p><b>6</b></p> 		$R_A = \frac{41}{32}P; R_B = \frac{23}{32}P;$ $M_A = \frac{9}{32}Pl; M_C = \frac{5}{128}Pl; M_D = \frac{23}{128}Pl$
<p><b>7</b></p> 		$R_A = \frac{5}{8}ql; R_B = \frac{3}{8}ql;$ $M_A = \frac{1}{8}ql^2; M_C = \frac{1}{16}ql^2$
<p><b>8</b> Неравномерный нагрев</p> 		$R_A = R_B = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{2hl};$ $M_A = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{2h}; \quad \Delta t = t_1 - t_2$ <p style="text-align: center;"><math>(t_1 &gt; t_2)</math></p>

Окончание таблицы Б.1

Расчетная схема стержня	Эпора изгибающих моментов и реакции	Значения моментов и реакций
<b>9</b> 		$R_A = R_B = \frac{6EJ}{l^2};$ $M_A = \frac{4EJ}{l}; M_B = \frac{2EJ}{l}$
<b>10</b> 		$R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3};$ $M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$
<b>11</b> 		$R_A = \frac{Pb^3}{l^3}(l + 2a); R_B = \frac{Pa^3}{l^3}(l + 2b);$ $M_A = \frac{Pab^2}{l^2}; M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}; M_C = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}$
<b>12</b> 		$R_A = R_B = \frac{P}{2};$ $M_A = M_B = M_C = \frac{Pl}{8}$
<b>13</b> 		$R_A = R_B = P;$ $M_A = M_B = \frac{2}{9}Pl; M_C = M_D = \frac{1}{9}Pl$
<b>14</b> 		$R_A = R_B = P;$ $M_A = M_B = \frac{3}{16}Pl; M_C = M_D = \frac{1}{16}Pl$
<b>15</b> 		$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql;$ $M_A = M_B = \frac{1}{12}ql^2; M_C = \frac{1}{24}ql^2$
<b>16</b> Неравномерный нагрев 		$R_A = R_B = 0;$ $M_A = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h}; \Delta t = t_1 - t_2$ $(t_1 > t_2)$



Учебное издание

*ЛЕОНЕНКО Денис Владимирович*  
*ВОРОБЬЁВ Сергей Александрович*

## РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Л. С. Репикова*  
Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 01.08.2018 г. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 3,26. Уч.-изд. л. 2,43. Тираж 100 экз.  
Зак. № . Изд. № 32.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский государственный университет транспорта.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий  
№ 1/361 от 13.06.2014.  
№ 2/104 от 01.04.2014.  
№ 3/1583 от 14.11.2017.  
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель