

Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет транспорта»

УДК 539.3

**ЗАХАРЧУК**  
**Юлия Викторовна**

**ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ  
ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ  
ПЛАСТИН СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности  
01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Гомель, 2018

Работа выполнена в Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель – **Старовойтов Эдуард Иванович**,  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика» Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Официальные оппоненты – **Тарлаковский Дмитрий Валентинович**,  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»;

**Плескачевский Юрий Михайлович**,  
член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Микро- и нанотехники» Белорусского национального технического университета

Оппонирующая организация – **Белорусский государственный университет**

Защита состоится 01 февраля 2019 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.27.01 при Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта» по адресу: 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 103, e-mail: smech@tut.by, телефон ученого секретаря совета (232) 95-39-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Автореферат разослан «28» декабря 2018 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций  
доктор физ.-мат. наук, доцент

Д.В. Леоненко

© Захарчук Ю.В., 2018

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительное распространение получили трехслойные конструкции. В условиях деформации изгиба эти конструкции оказываются наиболее рациональными. Они нашли широкое применение в авиа-, ракето-, машино-, приборо- и судостроении, добыче и транспортировке энергоносителей. Внедрение трёхслойных конструкций в технике потребовало создания соответствующих механико-математических моделей деформирования и методов расчёта на прочность, устойчивость и колебания. В ряде случаев все слои конструкций уже нельзя считать тонкими в смысле гипотез классической теории Кирхгофа. Применение различных материалов для заполнителей выявило существенную роль эффектов, связанных с их размерами, жесткостью, сжимаемостью. Это обусловило необходимость использования в расчетной модели «гипотезы ломаной линии» и учета сжимаемости заполнителя.

Деформирование трехслойных элементов конструкций с несжимаемым заполнителем при силовых нагрузках изучено в настоящее время достаточно хорошо. Здесь следует указать в первую очередь следующих исследователей: А.Я. Александров, С.А. Амбарцумян, М.Е. Бабешко, В.В. Болотин, К.З. Галимов, А.Г. Горшков, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, В.Н. Кобелев, В.И. Королев, Л.М. Куршин, Д.В. Леоненко, С.Г. Лехницкий, В.В. Можаровский, Х.М. Муштари, Ю.Н. Новичков, В.Н. Паймушин, Б.В. Пиккуль, Ю.М. Плескачевский, А.П. Прусаков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский, Н.Г. Тамуров, С.П. Тимошенко, А.П. Чулков, А.В. Яровая, J.K. Ebsioglu, A.C. Eringen, J.I. Foss, E.J. Plantemma, E. Reissner, J. Solvey, M. Stein.

Вместе с тем не исследованы процессы упругого и пластического деформирования трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем. Решению указанной актуальной проблемы и посвящена диссертация.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнялась в рамках следующих программ и проектов:

- Проект Т16Р–010 «Статика и динамика тонкостенных элементов конструкций при частичном контактном взаимодействии», БРФФИ, № ГР 20163256, 20.05.2016 – 31.03.2018.
- ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении». Задача 1.40 «Развитие численных и аналитических методов исследования прочности, жесткости и устойчивости несущих транспортных и машиностроительных конструкций при комплексных воздействиях с целью повышения надежности и снижения материалоемкости», № ГР 20172069, 01.07.2017 – 31.12.2019.
- Проект Т18Р–090 «Колебания неоднородных тонкостенных элементов конструкций, взаимодействующих с упругими и инерционными основаниями», БРФФИ, № ГР 20181500, 01.06.2018 – 31.05.2020.

## **Цель и задачи исследования**

*Целью работы* является создание механико-математических моделей деформирования физически линейных и нелинейных трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем под действием осесимметричных нагрузок произвольного вида при различных условиях закрепления контура.

*К задачам исследования* следует отнести:

- постановки краевых задач по расчету параметров напряженно-деформированного состояния упругих и упругопластических трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем под действием осесимметричных нагрузок произвольного вида при различных граничных условиях;
- получение аналитических решений краевых задач о деформировании упругих трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем, содержащих формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений при действии осесимметричных нагрузок произвольного вида;
- распространение метода упругих решений Ильюшина на физически нелинейные трехслойные круговые пластины со сжимаемым заполнителем, построение аналитических рекуррентных решений соответствующих краевых задач;
- численный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных круговых пластин со сжимаемым заполнителем в зависимости от физической нелинейности материалов, геометрических, упругих и неупругих параметров слоев, величины и вида нагрузки.

## **Научная новизна**

Впервые разработаны механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования круговых трехслойных пластин под действием осесимметричных нагрузок произвольного вида, отличающиеся учетом сжимаемости заполнителя.

## **Положения, выносимые на защиту**

- механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования трехслойных круговых пластин, содержащие уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, формулировки граничных условий, отличающиеся учетом сжимаемости заполнителя;
- аналитические решения краевых задач теории упругости о деформировании круговых трехслойных пластин, содержащие расчетные формулы для перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений в случае произвольных осесимметричных и равномерно распределенных нагрузок при различных условиях закрепления контура, учитывающие сжимаемость заполнителя;
- итерационный метод, типа метода упругих решений Ильюшина, аналитические рекуррентные решения краевых задач теории малых упругопластических деформаций, включающие расчетные формулы для параметров напряженно-деформированного состояния круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем при различных граничных условиях;

- параметрический численный анализ напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем, включающий графики изменения перемещений, деформаций и напряжений по радиусу и толщине пластин при различных геометрических, упругих и упругопластических параметрах слоев.

### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично с использованием методов, разработанных Э. И. Старовойтовым. Научный руководитель принимал участие в выборе направления исследований и анализе полученных результатов.

### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты работы докладывались и получили одобрение на:

- VI Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2018);
- VIII Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2017);
- VI и VII Международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2017, 2018);
- XXIV Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова (Вятчи, 2018);
- XXI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2018);
- IV Международной научно-практической конференции, посвящённой 65-летию БИИЖТа–БелГУТа «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» (Гомель, 2018);
- IV 11-й Международной научно-технической конференции «Приборостроение-2018» (Минск, 2018).

Результаты диссертации использованы в расчетной практике транспортного унитарного предприятия «Химтранс» и предприятия комплексного проектирования «Гомельдорпроект» КПРСУП «Гомельоблдорстрой».

### **Опубликование результатов диссертации**

По теме диссертации опубликовано 14 работ, в том числе 6 статей в рецензируемых научных журналах и сборниках трудов, 6 материалов конференций, 2 тезисов докладов, общим объемом 4,3 авторского листа.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка, приложения. Объем диссертации составляет 101 страницу машинописного текста, включая 35 иллюстраций,

список использованных источников из 86 наименований на 7 страницах, список публикаций автора из 14 наименований на 2 страницах, 1 приложение на 2 страницах.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

**В первой главе** приводится историческая справка о развитии теории слоистых элементов конструкций и выполнен краткий обзор соответствующих публикаций за последние годы. Было установлено, что в целом теоретические изыскания по данной проблеме обладают достаточной глубиной. Однако в значительной степени изучено поведение слоистых конструкций со сжимаемыми заполнителями, которые в процессе деформирования проявляют физически нелинейные свойства. К подобным неисследованным проблемам относится краевая задача о деформировании круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, которой и посвящена данная работа.

**Во второй главе** принята кинематика пакета упругой трехслойной круговой пластины со сжимаемым легким заполнителем (рисунок 1), получены уравнения равновесия и граничные условия в усилиях и перемещениях, сформулирована соответствующая краевая задача.

Цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси  $z$ , считается первым, нижний – вторым, заполнитель – третьим слоем (см. рисунок 1). Номер слоя обозначен индексом  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Осесимметричная поверхностная нагрузка  $q(r)$  приложена к верхнему слою.

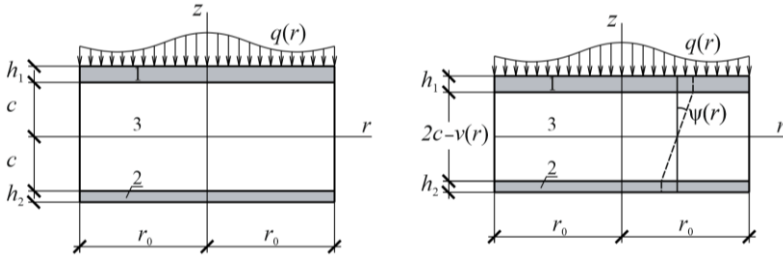


Рисунок 1. – Расчетная схема трехслойной пластины

Радиальные и поперечные (прогибы) перемещения в слоях  $u^{(k)}(r, z)$  и  $w^{(k)}(r, z)$  можно выразить через четыре искомые функции:  $w(r)$  – прогиб нижнего слоя;  $v(r)$  – функцию сжимаемости;  $u(r), \psi(r)$  – радиальное перемещение срединной плоскости и относительный сдвиг в заполнителе соотношениями:

- в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \quad w^{(1)}(r, z) = w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}, \quad w^{(2)}(r, z) = w(r) \quad (-c \leq z \leq -c - h_2);$$

- в заполнителе 3 ( $-c \leq z \leq c$ )

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z \left[ w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z+c) \right], \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z+c), \quad (1)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях пластины следуют из соотношений Коши и перемещений (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\Psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\Psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0 \\ & \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\Psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\Psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0 \\ & \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\Psi_{,r} - z\left[w_{,rr} + \frac{v_{,rr}}{2c}(z + c)\right], \quad \varepsilon_\phi^{(3)} = \frac{1}{r}\left\{u + z\Psi - z\left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z + c)\right]\right\}, \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\left(w_{,r} + \frac{z + c}{2c}v_{,r} + \Psi - w_{,r} - \frac{z}{c}v_{,r} - \frac{v_{,r}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\Psi - \frac{z}{2c}v_{,r}\right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c} \\ & \quad (-c \leq z \leq c). \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношения (1), (2) отличаются от известных аналогичных выражений для трехслойных круговых пластин наличием функции обжатия  $v(r)$ . Следует отметить, что перемещения  $u_r^{(3)}$  и деформации  $\varepsilon_r^{(3)}$ ,  $\varepsilon_\phi^{(3)}$  изменяются по толщине квадратично, благодаря учету обжатия заполнителя.

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \phi$ ), введем интенсивности обобщенных внутренних силовых факторов (усилий) в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}M_\alpha^{(3)} + \frac{1}{2c}S_\alpha^{(3)}, \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz. \quad (3)$$

Для получения уравнений равновесия в обобщенных усилиях (3) рассматриваемой трехслойной пластины используется принцип возможных перемещений Лагранжа. В легком заполнителе пренебрегается работа тангенциальных и поперечных напряжений, что приводит к следующему виду виртуальной работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\phi^{(k)} \delta \varepsilon_\phi^{(k)}) dz \right] r dr d\phi. \quad (4)$$

Приравняв выражение (4) к работе внешней осесимметричной поверхностной нагрузки  $q(r)$  и контурных усилий  $T_r^0$ ,  $H_r^0$ ,  $M_r^0$ ,  $D_r^0$  и потребовав выполнения полученного равенства при любых значениях варьируемых функций, получим систему линейных дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях

$$\begin{aligned}
T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0, \\
H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0, \\
M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q, \\
D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) &= -q.
\end{aligned} \tag{5}$$

На границе  $r = r_0$  должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned}
T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= 0, \\
D_r = D_r^0, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) &= 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $T_r^0, H_r^0, M_r^0, D_r^0$  – усилия и моменты на контуре пластины.

Выразив внутренние обобщенные усилия (3) через перемещения (1) с помощью закона Гука и деформаций (2), подставив их в уравнения равновесия (5), получим систему линейных дифференциальных уравнений в перемещениях для рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_r - a_4v_r) + K_3^- v_r &= 0, \\
L_2(a_2u + a_5\psi - a_6w_r - a_7v_r) &= 0, \\
L_3(a_3u + a_6\psi - a_8w_r - a_9v_r) &= -q, \\
L_3(a_4u + a_7\psi - a_9w_r - a_{10}v_r) + \frac{c}{6}K_3^- \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= -q,
\end{aligned} \tag{7}$$

где коэффициенты  $a_i, K_3^-$  выражаются через упругие и геометрические параметры слоев, дифференциальные операторы  $L_2, L_3$

$$\begin{aligned}
L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\
L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.
\end{aligned}$$

Следует отметить, что если в системе уравнений (7) положить  $v(r) = 0$  и отбросить четвертое уравнение, получим случай несжимаемого наполнителя.

Краевая задача замыкается добавлением к (7) силовых (6) или кинематических граничных условий на контуре и условия ограниченности решений в центре пластины. Например, при жесткой заделке контура должны выполняться кинематические условия:

$$u = \psi = w = v = w_r = v_r = 0. \tag{8}$$

При шарнирном опирании

$$u = \psi = w = v = w_{,rr} = v_{,rr} = 0. \tag{9}$$



**В третьей главе** было получено аналитическое решение краевой задачи для рассматриваемой упругой трехслойной круговой пластины со сжимаемым наполнителем и проведен его численный параметрический анализ.

После преобразований из системы уравнений (7) получено неоднородное уравнение Бесселя для определения производной функции сжимаемости  $v_{,r}$ :

$$\frac{d^2 v_{,r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_{,r}}{dr} - \frac{1}{r^2} v_{,r} + \beta^2 v_{,r} = q_1, \quad (10)$$

$$q_1 = \frac{p_1 + p_2}{r} \int q r dr - \frac{1}{r} (p_1 C_1 + p_2 C_2),$$

где  $p_1, p_2, \beta$  – параметры, вычисляемые через коэффициенты  $a_i$ ;  $C_1, C_2$  – константы интегрирования.

Общее решение этого уравнения выпишем в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения уравнения (10):

$$v_{,r} = C_7 J_1(\beta r) + C_8 Y_1(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left( Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr - J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr \right), \quad (11)$$

где  $J_1(\beta r), Y_1(\beta r)$  – функции Бесселя первого и второго рода (функция Неймана) первого порядка; здесь и далее интегралы берутся в пределах от 0 до  $r$ .

Проинтегрировав выражение (11), получим функцию сжимаемости  $v(r)$ . Все остальные искомые перемещения последовательно выражаются через эту функцию и ее производную. В результате имеем

$$v = -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left( \int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9,$$

$$u = b_1 v_{,r} + (b_2 + b_3) L_3^{-1}(q) - \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) (b_2 C_1 + b_3 C_2) + C_5 \frac{r}{2} + C_6 \frac{1}{r},$$

$$w = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u dr - \frac{a_6 a_7 - a_3 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_3^{-1}(q) dr +$$

$$+ \frac{C_1 a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12},$$

$$\psi = -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q) - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) + \frac{C_1 r}{4 a_6} (2 \ln r - 1) + C_3 \frac{r}{2} + C_4 \frac{1}{r}, \quad (12)$$

где  $I_0(\beta r), Y_0(\beta r)$  – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка;  $L_2^{-1}, L_3^{-1}$  – линейные интегральные операторы обратные дифференциальным операторам, введенным в (7);

$C_1, \dots, C_{12}$  – константы интегрирования, следующие из граничных условий (8), (9);

параметры  $b_1, b_2, b_3, \gamma_1$  выражаются через коэффициенты  $a_i$ .

Для сплошных круговых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, при жесткой заделке контура из решения (12) и граничных условий (8) при равномерно распределенной нагрузке  $q_0$  имеем:

$$C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{11} = 0,$$

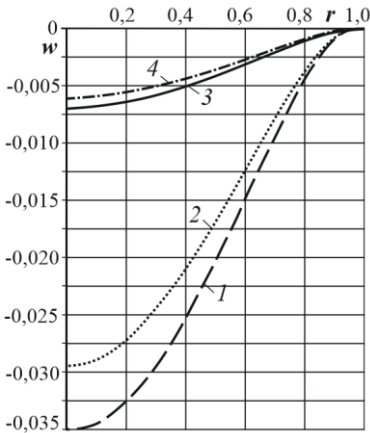
$$C_3 = \frac{q_0 r_0^2}{8a_6}, \quad C_5 = -(b_2 + b_3) \frac{q_0 r_0^2}{8}, \quad C_7 = -\frac{q_0}{2\beta^2 J_1(\beta r_0)} (p_1 + p_2),$$

$$C_9 = \frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{q_0 r_0}{2\beta^2} (p_1 + p_2), \quad C_{10} = \frac{a_5}{8(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^2,$$

$$C_{12} = -\frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \left( \frac{(b_2 + b_3) q_0 r_0^4}{64} + C_5 \frac{r_0^2}{4} \right) + \frac{a_5}{64(a_6^2 - a_5 a_8)} q_0 r_0^4 - C_{10} \frac{r_0^2}{4}.$$

Численные результаты получены для круговой трехслойной пластины единичного радиуса, жестко заделанной по контуру. Величина интенсивности равномерно распределенной нагрузки  $q_0 = -0,5$  МПа. Все геометрические размеры и линейные перемещения отнесены к радиусу пластины.

На рисунках 2–5 показано изменение вдоль радиуса прогиба нижнего слоя  $w$ , функции обжатия  $v$ , относительного сдвига  $\psi$  и радиальное перемещение  $u$  в симметричной по толщине пластине с несущими слоями, выполненными из различных материалов при  $c = 0,23$ ,  $h_1 = 0,02$ ,  $h_2 = 0,02$ .



1 – Д16Т– фторопласт-4–Д16Т; 2 – титан–фторопласт-4–Д16Т;  
3 – кордиерит– фторопласт-4–Д16Т; 4 – кордиерит– фторопласт-4–титан

Рисунок 2. – Изменение прогиба в зависимости от материалов слоев

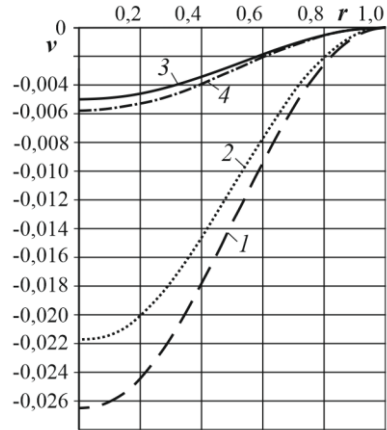
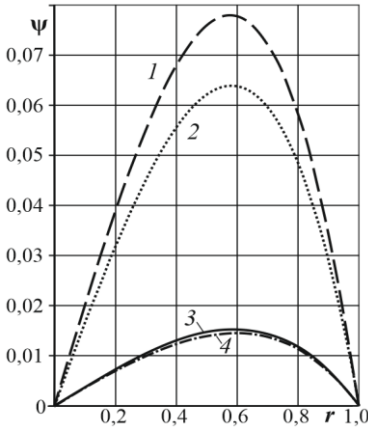


Рисунок 3. – Изменение функции обжатия в зависимости от материалов слоев

Перемещения убывают с ростом упругих характеристик материалов. Если верхний несущий слой из кордиерита, материала с существенно более высокими характеристиками, то влияние жесткости нижнего несущего слоя сглаживается, кривые (3, 4) близки. Усиление нижнего слоя приводит к увеличению функции обжатия (4), в то время как остальные перемещения уменьшаются.



1 – Д16Т– фторопласт-4–Д16Т; 2 – титан–фторопласт-4–Д16Т;

3 – кордиерит– фторопласт-4–Д16Т; 4 – кордиерит– фторопласт-4–титан

Рисунок 4. – Изменение сдвига в зависимости от материалов слоев

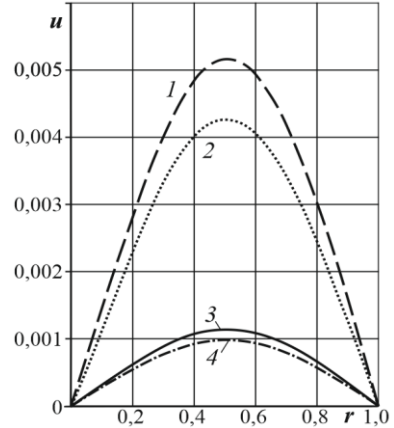
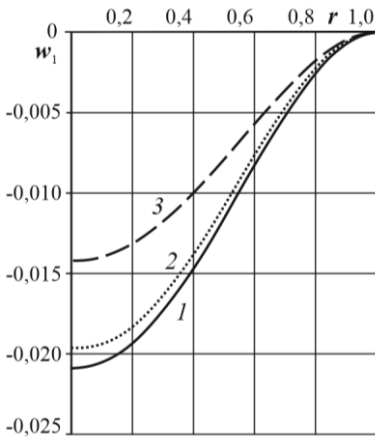


Рисунок 5. – Радиальные перемещения в зависимости от материалов слоев

Далее численные результаты получены для пластин, слои которых Д16Т– фторопласт-4–Д16. На рисунках 6, 7 показано изменение прогибов несущих слоев при их усилении ( $c = 0,23$ ). При утолщении нижнего слоя (2) его прогиб уменьшается на 27 %, а прогиб верхнего слоя на 7 %. Если увеличивается толщина верхнего слоя, то прогиб нижнего уменьшается на 12 %, а верхнего на 32 %.



1 –  $h_1 = h_2 = 0,03$ ; 2 –  $h_1 = 0,03$ ;  $h_2 = 0,035$ ; 3 –  $h_1 = 0,035$ ,  $h_2 = 0,03$

Рисунок 6. – Прогиб верхнего слоя

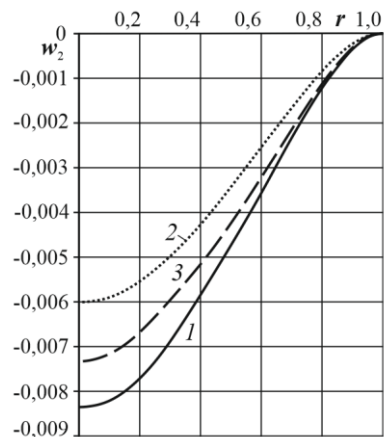


Рисунок 7. – Прогиб нижнего слоя

На рисунке 8 приведен график изменения деформации обжатия  $\varepsilon_z^{(3)}$  в заполнителе вдоль радиуса пластины. Деформация постоянна по толщине, поэтому одинакова во всех плоскостях заполнителя. Она достигает максимума в центре пластины, оставаясь в силу граничных условий нулевой на контуре.

Сдвиговая деформация  $\varepsilon_{rz}^{(3)}$  зависит от координаты  $z$ , графики ее изменения на поверхностях заполнителя показаны на рисунке 9. Максимальное значение достигается на нижней поверхности слоя, оно примерно в 2,5 раза больше аналогичного значения на верхней плоскости.

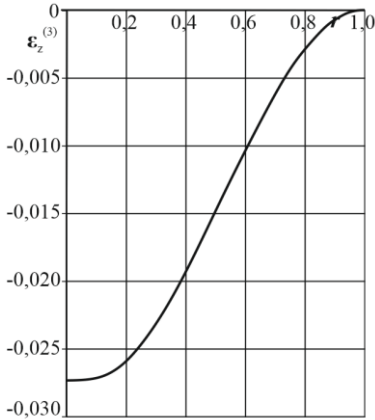


Рисунок 8. – Изменение деформации обжатия  $\varepsilon_z(r)$  вдоль радиуса

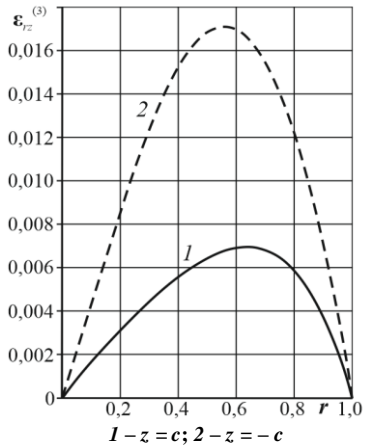


Рисунок 9. – Изменение деформации  $\varepsilon_{rz}(r)$  на поверхностях заполнителя

Изменение напряжений по толщине на контуре пластины иллюстрирует рисунок 10. Их значения во внешних слоях отнесены к  $10^8$  Па, в заполнителе – к  $10^7$  Па. На контуре максимальные значения окружных напряжений примерно в два раза меньше радиальных.

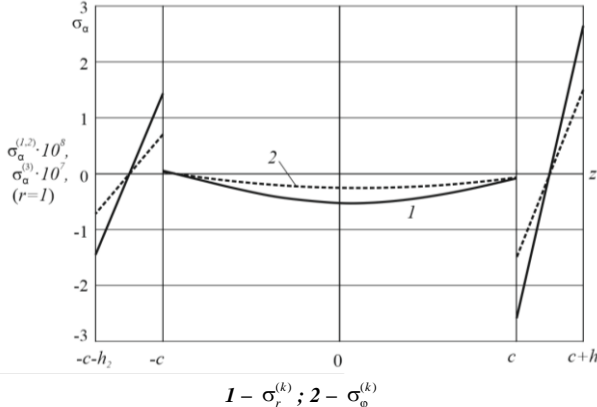


Рисунок 10. – Изменение напряжений по толщине пластины

В диссертации показано, что учет сжимаемости заполнителя приводит к увеличению прогиба верхнего несущего слоя на 42 %.

**В четвертой главе** приведена постановка и получено аналитическое рекуррентное решение краевой задачи об изгибе упругопластической трехслойной круговой пластины со сжимаемым заполнителем.

Рассмотрена несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина (см. рисунок 1), несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а сжимаемый по толщине наполнитель может проявлять упругие и нелинейно упругие свойства. Кинематика пакета соответствует ранее принятой модели. В слоях пластины используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi),$$

$$s_z^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_z^{(3)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_{rz}^{(3)}, \quad (13)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\vartheta_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензора напряжений и деформаций;

$G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации  $k$ -го слоя;

$\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$  – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев и физической нелинейности наполнителя, которые при интенсивности деформаций  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$  следует положить равными нулю;

$\varepsilon_y^{(k)}$  – предел текучести (нелинейности) материалов слоев;

$s_z^{(3)}$ ,  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\vartheta_z^{(3)}$ ,  $\vartheta_{rz}^{(3)}$  – девиаторы тензоров в наполнителе.

С помощью соотношений (13) выделим в тензоре напряжений упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «o») слагаемые:

$$\sigma_{\alpha}^{(k)} = \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{ao}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_z^{(3)} = \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{zo}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rzo}^{(3)}, \quad (14)$$

где

$$\sigma_{ae}^{(k)} = 2G_k\vartheta_{\alpha}^{(k)} + K_k\theta^{(k)}, \quad \sigma_{ao}^{(k)} = 2G_k\omega_k\vartheta_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma_z^{(3)} = 2G_3\vartheta_z^{(3)} + K_3\theta^{(3)},$$

$$\sigma_{zo}^{(3)} = 2G_3\omega_3\vartheta_z^{(3)}, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3\vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rzo}^{(3)} = 2G_3\omega_3\vartheta_{rz}^{(3)}.$$

Уравнения равновесия в усилиях круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем (5) и граничные условия (6) были получены независимо от физических уравнений состояния, поэтому можно воспользоваться ими и в рассматриваемом случае. Подставив в них выражения внутренних усилий через перемещения, получим систему уравнений равновесия в перемещениях, которую можно записать в виде:

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r} - a_4v_{,r}) + K_3^-v_{,r} = p_{\omega},$$

$$L_2(a_2u + a_5\psi - a_6w_{,r} - a_7v_{,r}) = h_{\omega},$$

$$L_3(a_3u + a_6\psi - a_8w_{,r} - a_9v_{,r}) = -q + q_{\omega},$$

$$L_3(a_4u + a_7\psi - a_9w_{,r} - a_{10}v_{,r}) + \frac{c}{6}K_3^- \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) = -q + g_{\omega}. \quad (15)$$

Здесь  $p_{\omega}, h_{\omega}, q_{\omega}, g_{\omega}$  – нелинейные добавки

$$p_{\omega} = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_{\omega} = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_{\omega} = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad g_{\omega} = D_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega,r} - D_{\varphi\omega,r}), \quad (16)$$

где нелинейные составляющие внутренних усилий  $T_{\alpha\omega}$ ,  $H_{\alpha\omega}$ ,  $M_{\alpha\omega}$ ,  $D_{\alpha\omega}$  вычисляются по формулам (2), в которых напряжения  $\sigma_{\alpha}^{(k)}$  нужно заменить на  $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) из соотношений (14).

Система уравнений равновесия (15) является существенно нелинейной. Для ее решения применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. В результате система принимает следующий итерационный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w^{(n)},_r - a_4 v^{(n)},_r) + K_3^- v^{(n)},_r &= p_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_3 \psi^{(n)} - a_6 w^{(n)},_r - a_7 v^{(n)},_r) &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_6 \psi^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r - a_9 v^{(n)},_r) &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_3(a_4 u^{(n)} + a_7 \psi^{(n)} - a_9 w^{(n)},_r - a_{10} v^{(n)},_r) + \frac{c}{6} K_3^- \left( v^{(n)},_{rr} + \frac{v^{(n)},_r}{r} \right) &= -q + g_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $n$  – номер приближения.

Нелинейные добавки в (17) вычисляются по результатам предыдущего приближения. Они определяются соотношениями ( $\alpha = r, \psi$ )

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n-1)} &= T_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r} (T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \quad h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r} (H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)}), \\ q_{\omega}^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r} (2M_{r\omega}^{(n-1)},_r - M_{\varphi\omega}^{(n-1)},_r), \quad g_{\omega}^{(n-1)} = D_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r} (2D_{r\omega}^{(n-1)},_r - D_{\varphi\omega}^{(n-1)},_r), \\ T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)}) \varepsilon_{\alpha}^{(k,n-1)} dz, \quad M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)}) \varepsilon_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c (T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}), \quad D_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)}. \end{aligned}$$

Итерационное решение системы дифференциальных уравнений (17) будет

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= -\frac{1}{a_6} L_3^{-1} (q - q_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{C_1^{(n)} r}{4a_6} (2 \ln r - 1) - \\ &\quad - \frac{1}{a_6} (a_3 u^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r - a_9 v^{(n)},_r) + C_3^{(n)} \frac{r}{2} + C_4^{(n)} \frac{1}{r}, \\ u^{(n)} &= b_1 v^{(n)},_r + b_2 L_3^{-1} (q - q_{\omega}^{(n-1)}) + b_3 L_3^{-1} (q - g_{\omega}^{(n-1)}) - b_2 C_1^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) - \\ &\quad - b_3 C_2^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + b_4 L_2^{-1} (h_{\omega}^{(n-1)}) + b_5 L_2^{-1} (p_{\omega}^{(n-1)}) + C_5^{(n)} \frac{r}{2} + C_6^{(n)} \frac{1}{r}, \\ v^{(n)} &= -\frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8^{(n)}}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left( \int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr - \right. \\ &\quad \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \right) + C_9^{(n)}, \end{aligned}$$

$$w^{(n)} = b_6 \int u^{(n)} dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v^{(n)} - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr -$$

$$- \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r} \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{C_1^{(n)} a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10}^{(n)} \frac{r^2}{4} + C_{11}^{(n)} \ln r + C_{12}^{(n)}, \quad (18)$$

где  $q_1^{(n-1)}(r)$  – функция, зависящая от вида нагрузки.

Для сплошных круглых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, следует положить

$$C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = C_{11}^{(n)} = 0.$$

Если контур пластины заделан, то из принятых граничных условий типа (8) следует:

$$C_3^{(n)} = \frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0},$$

$$C_5^{(n)} = -\frac{2b_2}{r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_3}{r_0} L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_4}{r_0} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} -$$

$$- \frac{2b_5}{r_0} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0},$$

$$C_7^{(n)} = -\frac{\pi}{2J_1(\beta r_0)} \left( Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} - \right.$$

$$\left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} \right),$$

$$C_9^{(n)} = \frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{\pi}{2} \left( \int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} - \right.$$

$$\left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} \right),$$

$$C_{10}^{(n)} = \frac{2a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} + \frac{2a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0^2} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0},$$

$$C_{12}^{(n)} = \left( \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - b_2 b_6 \right) \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} +$$

$$+ \left( \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} - b_4 b_6 \right) \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} -$$

$$- b_5 b_6 \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - b_3 b_6 \int L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - b_6 C_5^{(n)} \frac{r_0^2}{4} - C_{10}^{(n)} \frac{r_0^2}{4}.$$

*Численные результаты* получены для круговой трехслойной пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт-4–Д16Т. Величина нагрузки и толщины слоев подбирались таким образом, чтобы нелинейные свойства мате-

риалов проявились в достаточной степени:  $q = -3$  МПа,  $h_1 = h_2 = 0,03$ ,  $c = 0,23$ . Пластина жестко заделана по контуру, ее радиус  $r_0 = 1$  м.

Аналитическое выражение для функций пластичности и нелинейности в соотношениях (13) принималось в известном виде:

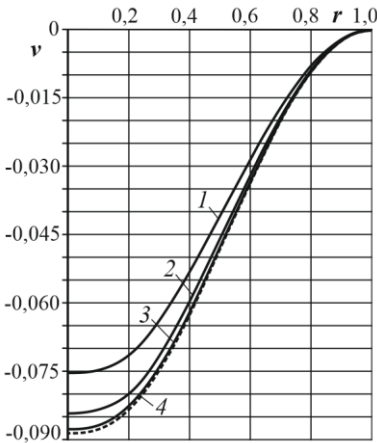
$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y, \end{cases}$$

где  $A_k$ ,  $\alpha_k$  – константы нелинейности материала.

Соответствующие нелинейные характеристики материалов заимствованы из литературы: для Д16Т  $A_1 = 0,96$ ,  $\alpha_1 = 2,34$ ,  $\varepsilon_y^{(1)} = 0,735$  %; для фторопласта  $A_3 = 0,905$ ,  $\alpha_3 = 1,48$ ,  $\varepsilon_s = \varepsilon_y^{(3)} = 3,3$  %. Следует отметить, что при использовании в качестве материалов слоев сплава Д16-Т и фторопласта-4 метод упругих решений будет сходиться в пределах малых деформаций, т.к. известно, что выполняется достаточное условие сходимости.

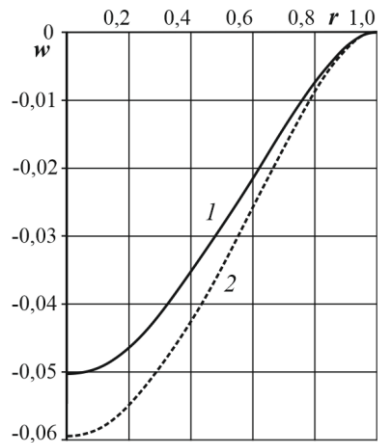
Рисунок 11 демонстрирует практическую сходимость метода упругих решений для функции обжатия. Номер кривой соответствует номеру итерации,  $I$  – упругая пластина. Здесь второе приближение отличается от первого примерно на 11 %. За искомое решение принято 4-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %. Конечное отличие от упругой пластины – 16,3 %. Все остальные перемещения выражены через функцию обжатия.

На рисунке 12 показаны графики изменения прогиба нижнего слоя вдоль радиуса: Здесь максимальное увеличение составляет 16,7 %.



1, 2, 3, 4 – номер приближения

Рисунок 11. – Изменение функции сжимаемости  $v(r)$  вдоль радиуса пластины



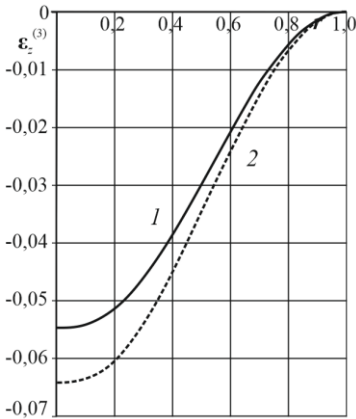
1 – упругая пластина; 2 – физически нелинейная

Рисунок 12. – Изменение прогиба нижнего слоя  $w(r)$  вдоль радиуса пластины

Численные исследования показали, что учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению искомых перемещений на 16–20%. Это существенно уточняет напряженно-деформированное состояние рассматриваемой трехслойной пластины.



На рисунке 13 приведены графики изменения деформации обжатия  $\varepsilon_z^{(3)}$  вдоль радиусов упругой и упругопластической пластин. Учет нелинейности материалов приводит к увеличению расчетной деформации на 18,2 %.



1 – упругая; 2 – упругопластическая

Рисунок 13. – Деформация обжатия

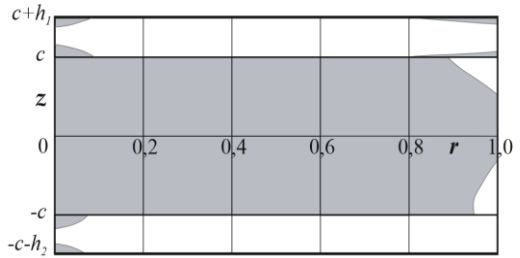


Рисунок 14. – Области физической нелинейности

Распределение областей физической нелинейности материалов слоев (серая заливка) вдоль радиуса трехслойной пластины при ее равномерном нагружении распределенной нагрузкой интенсивностью  $q_0 = 3$  МПа иллюстрирует рисунок 14. Он свидетельствует о том, что первые пластические деформации возникают в центре пластины и затем появляются на контуре. Весь заполнитель, за исключением небольшой области на контуре пластины, деформируется нелинейно.

В диссертации показано, что учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению радиальных напряжений в центре пластины до 27 %, в заполнителе – до 47 %.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

В работе проведены теоретические исследования деформирования трехслойных круговых пластин со сжимаемыми заполнителями и получены следующие новые научные результаты, включающие:

- механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования трехслойных круговых пластин, содержащие уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, формулировки граничных условий, отличающиеся учетом сжимаемости заполнителя [1, 3–7, 10, 13];
- аналитические решения краевых задач теории упругости о деформировании круговых трехслойных пластин, содержащие формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений при произвольных и равномерно распределенных нагрузках в случае различных условий закрепления контура, учитывающие сжимаемость заполнителя [2–5, 8, 9];

- итерационный метод, типа метода упругих решений Ильюшина, аналитические рекуррентные решения краевых задач теории малых упругопластических деформаций, позволившие алгоритмизировать процесс исследования параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемых пластин при физически нелинейном деформировании материалов слоев [6, 11, 12, 14];

- параметрический численный анализ напряженно-деформированного состояния упругих и упругопластических круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем, содержащий графики, отражающие законы изменения перемещений, деформаций и напряжений по радиусу и высоте пластин при различных геометрических и упругих параметрах слоев, показавший, что в принятых условиях учет сжимаемости заполнителя приводит к увеличению максимального расчетного прогиба до 42 %, подтвердивший практическую сходимость метода упругих решений, установивший рост прогибов за счет физической нелинейности до 18 %, а напряжений – до 27 % в несущих слоях и до 47 % в заполнителе [4–6, 8, 9, 11, 14].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Полученные результаты позволяют численно моделировать перемещения, деформации и напряжения в трехслойных круговых пластинах, сборно-разборных настилах, сэндвич-панелях, давать практические рекомендации при проектировании слоистых элементов конструкций, снижать материальные затраты, требуемые для проведения экспериментальных исследований. Учет сжимаемости заполнителя приводит к существенному уточнению НДС исследуемых конструкций. Аналитические решения, полученные в работе, представляют самостоятельную ценность как новые фундаментальные результаты и будут служить для проверки численных решений подобных задач. Разработанные методики могут использоваться в проектных организациях строительного и машиностроительного профиля при расчете композитных элементов конструкций.

Научные результаты диссертации внедрены в расчётную практику Транспортного унитарного предприятия «Химтранс» и предприятия комплексного проектирования «Гомельдорпроект» КПРСУП «Гомельоблдорстрой».

С помощью разработанных методик и программ численных расчетов была выполнена оценка прочности и жесткости плит дорожного покрытия ПКП «Гомельдорпроект» и даны практические рекомендации по определению внутренних усилий, возникающих в покрытии. Проведена прочностная оценка сэндвич-панелей при строительстве складских помещений ТУП «Химтранс» и даны практические рекомендации по определению наиболее опасных участков конструкций.

Результаты внедрений подтверждены соответствующими актами.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в рецензируемых журналах и сборниках трудов

1. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 53–57.
2. Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации : сборник научных трудов / Белорусский государственный университет транспорта. – Гомель, 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.
3. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет. – Минск, 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.
4. Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2; URL: <http://mathmod.esrae.ru/18-69> (дата обращения: 08.10.2018).
5. Старовойтов, Э. И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.
6. Захарчук, Ю. В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

### Материалы конференций

7. Захарчук, Ю. В. Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VIII Международной научно-практической конференции, посвященной Году науки, Гомель, 23–24 ноября 2017 г. / Министерство транспорта и коммуникаций Республики Беларусь, Белорусская железная дорога, Белорусский государственный университет транспорта ; редкол.: Ю. И. Кулаженко (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2017. – Ч.2. – С. 185–186.
8. Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на изгиб трехслойной пластины / Ю. В. Захарчук // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 19–21 марта 2018 г. / Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2018. – С. 9–10.
9. Захарчук, Ю. В. О влиянии сжимаемости наполнителя на деформирование круглой трехслойной пластины / Ю. В. Захарчук // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXIV Международного симпозиума имени А. Г. Горшкова, Вятчи, 19–23 марта 2018 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – М. : ООО «ТРИ», 2018. – Т.2 – С. 55–57.

10. Захарчук, Ю. В. Вывод уравнений равновесия при деформировании композитной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы VI Международной научно-практической конференции, Гомель, 17–18 мая 2018 г. / Белорусский государственный университет транспорта ; редкол.: А. А. Поддубный (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2018. – Ч.1. – С. 58–61.

11. Захарчук, Ю. В. Перемещения в упругопластической круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Актуальные вопросы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: материалы IV Международной научно-практической конференции, Гомель, 11–12 октября 2018 г. / Министерство транспорта и коммуникаций Республики Беларусь, Белорусская железная дорога, Белорусский государственный университет транспорта ; редкол.: Ю. И. Кулаженко (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2018. – Ч.2. – С. 147–149.

12. Захарчук, Ю. В. Изгиб физически нелинейной трехслойной пластины / Ю. В. Захарчук // Приборостроение-2018: материалы 11-й Международной научно-технической конференции, Минск, 14–16 ноября 2018 г. / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: О. К. Гусев [и др.]. – Минск, 2018. – С. 277–278.

#### **Тезисы докладов**

13. Захарчук, Ю. В. Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы: тезисы докладов VI Международного научного семинара, Москва, 8–10 ноября 2017 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2017. – С. 59–61.

14. Захарчук, Ю. В. Изгиб трехслойной упругопластической пластины с жестким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы: тезисы докладов VII Международного научного семинара, Москва, 12–13 ноября 2018 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2018. – С. 61–63.

## РЕЗЮМЕ

Захарчук Юлія Вікторівна

**Физически линейное и нелинейное деформирование трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем**

*Ключевые слова:* трехслойные круговые пластины, сжимаемый наполнитель, изгиб, упругость, пластичность.

*Объект исследования:* трехслойные круговые пластины со сжимаемым наполнителем; *предмет исследования:* напряженно-деформированное состояние объекта.

*Цель работы:* создание механико-математических моделей деформирования физически линейных и нелинейных трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем под действием осесимметричных нагрузок произвольного вида при различных видах закрепления контура.

Приведены постановки новых краевых задач о физически линейном и нелинейном деформировании трехслойных круговых пластин с легким сжимаемым наполнителем, испытывающих изгиб под действием осесимметричных распределенных нагрузок. Разработаны методы решения поставленных задач. Решения задач теории упругости получены в конечном виде, при физической нелинейности материалов слоев – в рекуррентном.

Численно исследованы параметры напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем в зависимости от граничных условий, геометрических и упругих параметров материалов слоев, величины нагрузки. Проведено сравнение с прогибом пластины при несжимаемом наполнителе.

Результаты исследований являются новыми и могут быть использованы проектными организациями в строительстве и машиностроении.

## РЭЗЮМЭ

Захарчук Юлія Віктараўна

**Фізічна лінейнае і нелінейнае дэфармаванне трохслаёвых пласцін са сціскальным запаўняльнікам**

*Ключавыя словы:* трохслаёвыя кругавыя пласціны, сціскальны запаўняльнік, выгіб, пружкасць, пластычнасць.

*Аб'ект даследавання:* трохслаёвыя кругавыя пласціны са сціскальным запаўняльнікам; *прадмет даследавання:* напружана-дэфармаваны стан аб'екта.

*Мэта работы:* стварэнне механіка-матэматычных мадэляў дэфармавання фізічна лінейных і нелінейных трохслаёвых кругавых пласцін са сціскальным запаўняльнікам пад дзеяннем восевасіметрычных нагрузак адвольнага выгляду пры розных відах замацавання контура.

Прыведзены пастаноўкі новых краевых задач аб фізічна лінейным і нелінейным дэфармаванні трохслаёвых кругавых пласцін з лёгкім сціскальным запаўняльнікам, якія выпрабюваюць выгіб пад дзеяннем восевасіметрычных

размеркаваных нагрузак. Распрацаваны метады рашэння пастаўленых задач. Рашэнні задач тэорыі пругкасці атрыманы ў канчатковым выглядзе, пры фізічнай нелінейнасці матэрыялаў слаёў – у рэкурэнтным.

Колькасна даследаваны параметры напружана-дэфармаванага стану пругкіх і фізічна нелінейных трохслаёвых кругавых пласцін са сціскальным запаўняльнікам у залежнасці ад межавых умоў, геаметрычных і пругкіх параметраў матэрыялаў слаёў, велічыні нагрузкі. Праведзена параўнанне з прагінам пласціны з несціскальным запаўняльнікам.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і могуць быць выкарыстаны практнымі арганізацыямі ў будаўніцтве і машынабудаванні.

## SUMMARY

Zakharchuk Yuliya Viktorovna

### **Physically linear and nonlinear deformation of three-layer plates with compressible filler**

*Keywords:* three-layer circular plates, compressible filler, bending, elasticity, plasticity.

*Object of study:* three-layer circular plates with compressible filler; *subject of study:* the stress-strain state of the object.

*Objective of the work:* the creation of mechanical-mathematical models of deformation of physically linear and nonlinear three-layer circular plates with compressible filler under the action of axisymmetric loads of arbitrary type with different types of fixing the contour.

The statements of new boundary-value problems of physically linear and nonlinear deformation of three-layer circular plates with light compressible filler, subjected to bending under the action of axisymmetric distributed loads, are given. The methods for solving the problems are developed. Solutions to the problems of elasticity theory are obtained in the final form, with the physical nonlinearity of the materials of the layers – in the recurrent form.

The parameters of the stress-strain state of elastic and physically nonlinear three-layer circular plates with compressible filler are numerically investigated depending on the boundary conditions, the geometric and elastic parameters of the materials of the layers, and the load. A comparison with the deflection of the plate at incompressible filler is carried out.

The research results are new and can be used by project organizations in construction and engineering.

Научное издание

*ЗАХАРЧУК Юлия Викторовна*

**ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ  
ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН  
СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 27.12.2018 г. Формат бумаги 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 1,16. Тираж 90 экз. Зак. 4441.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский государственный университет транспорта.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий

№ 1/361 от 13.06.2014.

№ 2/104 от 01.04.2014.

№ 3/1583 от 14.11.2017.

Ул. Кирова, 34, 246653. Гомель