МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ч а с т ь 3

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Учебно-методическое пособие

Гомель 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ч а с т ь 3

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Одобрено методической комиссией электротехнического факультета в качестве учебно-методического пособия для студентов электротехнических специальностей

Гомель 2013

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6
Д81

Р е ц е н з е н т – зав. кафедрой высшей математики канд. физ.-мат. наук, доцент *С. П. Новиков* (УО «БелГУТ»).

Дудко, С. А.

Д81 Системы дифференциальных уравнений : учеб.-метод. пособие : в 3 ч. / С. А. Дудко, Е. А. Задорожнюк, А. И. Прокопенко; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2013. – Ч. 3 : Системы дифференциальных уравнений специального вида. – 40 с.

ISBN 978-985-554-102-9 (ч. 3)

Изложены классические методы интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Разобрано большое количество примеров. Приведены упражнения для домашних заданий.

Предназначено для студентов электротехнических специальностей, а также может быть использовано студентами других факультетов.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6

ISBN 978-985-554-102-9 (ч. 3)
ISBN 978-985-554-099-2

6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

В огромном числе задач: модельных и прикладных теоретической механики (прежде всего теории колебаний); теории линейных электрических цепей; теории автоматического регулирования – приходится сталкиваться с необходимостью описания переходных процессов в системах, на которые действуют периодические внешние силы. В этом разделе мы рассмотрим два подхода, позволяющих достаточно просто и эффективно находить решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с периодическими внешними силами.

6.1 Метод Фурье

Рассмотрим классическую механическую задачу для демпфированного осциллятора (с учетом силы трения), на который действует периодическая сила $f(t)$ периода T, т.е. $f(t) = f(t+T)$. Уравнение, описывающее вынужденные колебания осциллятора под действием внешней силы $f(t)$, имеет вид

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \tag{6.1}$$

где λ – коэффициент трения, ω_0 – собственная частота осциллятора. Периодическую функцию $f(t)$ представим ее рядом Фурье

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \beta_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right),$$

или, переходя на язык циклической частоты $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, представим ряд Фурье функции $f(t)$ в виде (как обычно ряд Фурье и представляют в задачах электротехники и теории колебаний)

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t). \tag{6.2}$$

Как следствие, исходя из представления функции $f(t)$ в виде ряда (6.2), частное периодическое решение уравнения (6.1) будем искать, используя принцип суперпозиции частных решений, в виде

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n(t),$$

где функция $\bar{x}_n(t)$ является решением уравнения

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = \alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t. \tag{6.3}$$

Функцию $\bar{x}_n(t)$ ищем методом неопределенных коэффициентов в виде

$$\bar{x}_n(t) = A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t.$$

Подставляя функцию $\bar{x}_n(t)$, ее первую производную

$$\bar{x}_n'(t) = -A_n n\omega \sin n\omega t + B_n n\omega \cos n\omega t$$

и вторую производную

$$\bar{x}_n''(t) = -A_n (n\omega)^2 \cos n\omega t - B_n (n\omega)^2 \sin n\omega t$$

в уравнение (6.3), приходим к равенству

$$\left(A_n\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2\right) + B_n n\tilde{\omega}\right)\cos n\omega t + \left(B_n\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2\right) - A_n n\tilde{\omega}\right)\sin n\omega t =$$

$$= \alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t,$$

где для упрощения выкладок и краткости записи мы ввели «частоту»

$$\tilde{\omega} = 2\lambda\omega.$$

Из этого равенства и получаем требуемую систему уравнений

$$\begin{cases} A_n\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2\right) + B_n n\tilde{\omega} = \alpha_n, \\ -A_n n\tilde{\omega} + B_n\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2\right) = \beta_n, \end{cases}$$

решая которую, находим коэффициенты A_n и B_n (при этом вновь возвращаемся к явному виду для «частоты» $\tilde{\omega}$):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\alpha_n\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2\right) - 2\alpha\beta_n n\omega}{(n\omega)^4 + \left(4\alpha^2 - 2\omega_0^2\right)(n\omega)^2 + \omega_0^4}, \\ B_n &= \frac{2\lambda\alpha_n n\omega + \beta_n\left(\omega_0^2 - (n\omega)^2\right)}{(n\omega)^4 + \left(4\alpha^2 - 2\omega_0^2\right)(n\omega)^2 + \omega_0^4}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Функция $\bar{x}_0$, являющаяся решением уравнения

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^{\,2} x = \frac{\alpha_0}{2},$$

имеет вид

$$\bar{x}_0 = \frac{\alpha_0}{2\omega_0^{\,2}}.$$

Таким образом, частное периодическое решение уравнения (6.1) имеет вид

$$\bar{x}(t) = \frac{\alpha_0}{2\omega_0^{\,2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \right), \tag{6.5}$$

где коэффициенты ряда (6.5) A_n и B_n вычисляем по формулам (6.4).

***Пример* 1.** Рассмотрим осциллятор с параметрами $\alpha = 1$, $\omega_0^{\,2} = 2$. Уравнение вынужденных колебаний осциллятора под действием периодической силы $f(t)$ имеет вид

$$x'' + 2x' + 2x = f(t). \tag{6.6}$$

По формулам (6.4) находим коэффициенты ряда для частного периодического решения уравнения

$$A_n = \frac{\alpha_n\left(2 - (n\omega)^2\right) - 2\beta_n n\omega}{(n\omega)^4 + 4}, \quad B_n = \frac{2\alpha_n n\omega + \beta_n\left(2 - (n\omega)^2\right)}{(n\omega)^4 + 4}.$$

Как следствие, получаем

$$A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t = \frac{1}{(n\omega)^4 + 4}\Big[\left(\alpha_n\left(2 - (n\omega)^2\right) - 2\beta_n n\omega\right) \cos n\omega t +$$

$$+ \left(2\alpha_n n\omega + \beta_n\left(2 - (n\omega)^2\right)\right) \sin n\omega t\Big] = \frac{1}{(n\omega)^4 + 4}\Big[\alpha_n\big(2n \sin n\omega t -$$

$$- \left((n\omega)^2 - 2\right) \cos n\omega t\big) - \beta_n\left(2n\omega \cos n\omega t + \left((n\omega)^2 - 2\right) \sin n\omega t\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n\omega)^4 + 4}}\left(\alpha_n \sin\left(n\omega t - \varphi_n\right) - \beta_n \cos\left(n\omega t - \varphi_n\right)\right),$$

где $\operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{(n\omega)^2 - 2}{2n\omega}$.

Таким образом, выражение для частного решения данного уравнения (6.6) принимает вид

$$\bar{x}(t)=\frac{\alpha_0}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\sin(n\omega t-\varphi_n)-\beta_n\cos(n\omega t-\varphi_n)}{\sqrt{(n\omega)^4+4}} \qquad (6.7)$$

Пусть периодическая сила $f(t)$ имеет вид, представленный на рисунке 1:

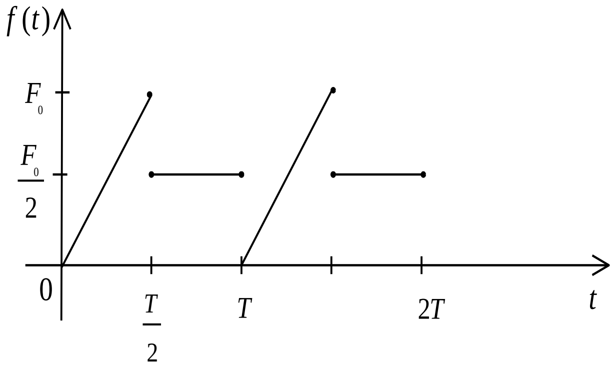


Рисунок 1

$$f(t)=F_0\begin{cases}\dfrac{2t}{T},\ 0\le t<\dfrac{T}{2},\\[2mm] \dfrac{1}{2},\ \dfrac{T}{2}\le t<T.\end{cases}$$

Коэффициенты ряда Фурье для функции $f(t)$ вычисляем по формулам

$$\alpha_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt,\ \beta_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt,\ n=1,2,\ldots,$$

$$\alpha_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Для данной функции $f(t)$ получаем

$$\alpha_n=\frac{4F_0}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\cos\frac{2\pi nt}{T}dt+\frac{F_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt=\frac{F_0\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2n^2},$$

$$\beta_n = \frac{4F_0}{T^2}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt + \frac{F_0}{T}\int\limits_{\frac{T}{2}}^{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = -\frac{F_0\left(1+(-1)^n\right)}{2\pi n}.$$

Так как

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} -2, n = 2k+1, \\ 0, n = 2k, k = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \qquad 1+(-1)^n = \begin{cases} 2, n = 2k, k = 1,2,\ldots, \\ 0, n = 2k+1, \end{cases}$$

то получаем

$$\alpha_n = \alpha_{2k+1} = -\frac{2F_0}{\pi^2(2k+1)^2}, \beta_n = \beta_{2k} = -\frac{F_0}{2\pi k}, \alpha_0 = \frac{4F_0}{T^2}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} tdt + \frac{F_0}{T}\int\limits_{\frac{T}{2}}^{T} dt = F_0.$$

Подставляя полученные коэффициенты в формулу (6.7), находим частное периодическое решение исходного уравнения

$$\overline{x}(t) = \frac{F_0}{4} + \frac{F_0}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k\omega t - \varphi_{2k})}{k\sqrt{4(k\omega)^4+1}} - \frac{2F_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)\omega t - \varphi_{2k+1}\right)}{(2k+1)^2\sqrt{\omega^4(2k+1)^4+4}},$$

$$\text{где } \operatorname{tg}\varphi_{2k} = \frac{2(k\omega)^2 - 1}{2k\omega}, \quad \operatorname{tg}\varphi_{2k+1} = \frac{\omega^2(2k+1)^2 - 2}{2\omega(2k+1)}.$$

6.2 Операционный метод

Эффективным методом решения дифференциальных уравнений и систем уравнений в ситуации, когда на систему действуют внешние периодические силы, является операционный метод. Рассмотрим особенности метода на конкретных примерах.

***Пример* 2.** Найти лаплас-образы данных периодических функций.

а) Функция $f(t)$ периода T (рисунок 2). Аналитическая зависимость, определяющая функцию $f(t)$, имеет вид

$$f(t)=F_0\begin{cases}\dfrac{2t}{T}, \quad 0\le t<\dfrac{T}{2},\\[2ex] \dfrac{2(T-t)}{T}, \quad \dfrac{T}{2}\le t<T.\end{cases} \qquad (6.8)$$

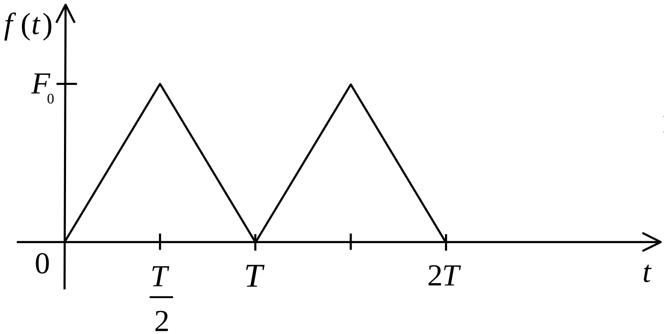


Рисунок 2

Лаплас-образ периодической функции находим, используя формулу (5.6), в которой определим $F_0(p)=\int\limits_0^T e^{-pt} f(t)\,dt$.

Получаем

$$F_0(p)=\frac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} te^{-pt}dt+2\int\limits_{\frac{T}{2}}^{T}\left(1-\frac{t}{T}\right)e^{-pt}dt=-\frac{2}{pT}\left(te^{-pt}\Big|_0^{\frac{T}{2}}+\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)+$$

$$+2\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\right)+\frac{2}{pT}\left(te^{-pt}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}+\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\right)=\frac{2}{pT}\left(Te^{-pT}-Te^{-\frac{pT}{2}}\right)+$$

$$+\frac{2}{p^2T}\left(e^{-pT}-2e^{-\frac{pT}{2}}+1\right)-\frac{2}{p}\left(e^{-pT}-e^{-\frac{pT}{2}}\right)=\frac{2}{p^2T}\left(1-e^{-\frac{pT}{2}}\right)^2.$$

Как следствие, лаплас-образ

$$F(p)=\frac{2\left(1-e^{-\frac{pT}{2}}\right)^2}{p^2T(1-e^{pT})}=\frac{2\left(1-e^{-\frac{pT}{2}}\right)}{p^2T\left(1+e^{-\frac{pT}{2}}\right)}=\frac{2\left(e^{\frac{pT}{4}}-e^{-\frac{pT}{4}}\right)}{p^2T\left(e^{\frac{pT}{4}}+e^{-\frac{pT}{4}}\right)}=\frac{2\operatorname{sh}\frac{pT}{4}}{Tp^2\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$F(p)=\frac{2\operatorname{sh}\dfrac{pT}{4}}{Tp^2\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}}. \qquad (6.9)$$

б) Пусть функция $f(t)$ имеет период $2T$, т.е. $f(t)=f(t+2T)$ (рисунок 3). Аналитически данная функция задается формулами

$$f(t)=\begin{cases} A, 0\le t<T, \\ A\left(1-\dfrac{t}{T}\right), T\le t<2T \end{cases}. \qquad (6.10)$$

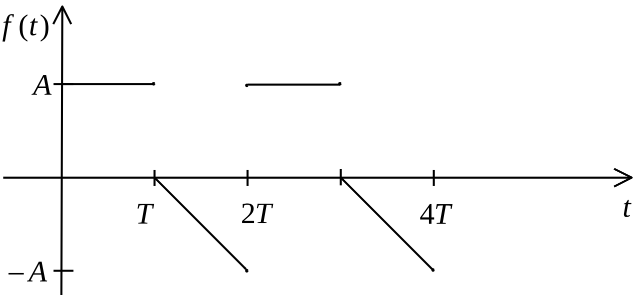


Рисунок 3

Меняя в формуле (5.6) T на $2T$, получаем выражение для лаплас-образа функции с периодом $2T$:

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-2pT}}, \text{ где } F_0(p)=\int_0^{2T} e^{-pT} f(t)\,dt.$$

Таким образом, получаем

$$F_0(p)=A\left(\int_0^T e^{-pt}dt+\int_T^{2T} e^{-pt}dt-\frac{1}{T}\int_T^{2T} te^{-pt}dt\right)=A\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^T-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_T^{2T}+\frac{1}{pT}\left(te^{-pt}\Big|_T^{2T}+\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_T^{2T}\right)\right)=\frac{A}{Tp^2}\Big[e^{-2pT}-e^{-pT}+$$

$$+Tp\left(1-e^{-pT}+e^{-2pT}\right)\Big].$$

Используя полученное соотношение для лаплас-образа $F_0(p)$, находим

$$F(p)=\frac{A\left(e^{-2pt}-e^{-pt}+Tp\left(1-e^{-pT}\right)+e^{-2pT}\right)}{Tp^2\left(1-e^{-2pT}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(e^{-pt}-1+Tp\left(e^{pT}-1+e^{-pT}\right)\right)}{Tp^2\left(e^{pT}-e^{-pT}\right)}=\frac{A\left(e^{-pT}-1+Tp\left(2\mathrm{ch}pT-1\right)\right)}{2Tp^2\mathrm{sh}pT}.$$

Итак, лаплас-образ данной периодической функции имеет вид

$$F(p)=\frac{A\left(e^{-pt}-1+Tp\left(2\mathrm{ch}pT-1\right)\right)}{2Tp^2\mathrm{sh}pT}. \qquad (6.11)$$

***Пример* 3.** Найти решение поставленной задачи Коши.

а) $y''+m^2y=f(t)$, $y(0)=y'(0)=1$, (6.12)

где $f(t)$ – периодическая функция, которая дается формулой (6.8).

Решение. Вводим лаплас-образ неизвестной функции $y(t)\risingdotseq Y(p)$, лаплас-образ функции $f(t)$ дается формулой (6.9). С учетом начальных условий, переходим к лаплас-образам в обеих частях уравнения (6.12). Получаем

$$\left(p^2+m^2\right)Y(p)-p-1=F(p),$$

откуда находим

$$Y(p)=Y_1(p)+Y_2(p)=\frac{p+1}{p^2+m^2}+\frac{F(p)}{p^2+m^2}.$$

Рассмотрим сначала лаплас-образ $Y_2(p)$, который, с учетом формулы (6.9) для лаплас-образа $F(p)$, имеет вид

$$Y_2(p)=\frac{F(p)}{p^2+m^2}=\frac{2F_0\mathrm{sh}\frac{pT}{4}}{Tp^2\left(p^2+m^2\right)\mathrm{ch}\frac{pT}{4}}=\frac{2F_0\mathrm{sh}\frac{pT}{4}}{TB(p)}.$$

Далее находим функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу $Y_2(p)$.

Функция $B(p)=p^2\left(p^2+m^2\right)\mathrm{ch}\frac{pT}{4}$ имеет бесконечно много нулей в точках $p=p_n$, являющихся решениями уравнения

$\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}=0$, $\dfrac{p_nT}{4}=i\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $p_n=\dfrac{i2\pi(2n+1)}{T}=i\omega(2n+1)$ $\left(\omega=\dfrac{2\pi}{T}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$. Нулю функции $B(p)$ в точке $p=p_n$ отвечает простой полюс (1-го порядка) функции $Y_2(p)$. Вычет функции $Y_2(p)e^{pt}$ в простом полюсе p_n находим по формуле [см. формулу (5.10)]

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left[Y_2(p)e^{pt}\right]=\frac{2F_0}{T}\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{p_nT}{4}e^{p_nt}}{B'(p_n)}. \tag{6.13}$$

Находим производную функции $B(p)$:

$$B'(p)=\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{pT}{4}p^2\left(p^2+m^2\right)+\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\left[p^2\left(p^2+m^2\right)\right]'_p,$$

поэтому

$$B'(p_n)=\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}p_n^{\,2}\left(p_n^{\,2}+m^2\right)+0=\left[\text{подставляем } p_n=i\omega(2n+1)\right]=$$

$$=-\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}\omega^2(2n+1)^2\left(m^2-\omega^2(2n+1)^2\right)=\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}\omega^2(2n+1)^2\times$$

$$\times\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right).$$

Подставляя полученное соотношение для производной $B'(p_n)$ в равенство (6.13), получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left[Y_2(p)e^{pt}\right]=\frac{8F_0}{T^2}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{p_nT}{4}e^{p_nt}}{\operatorname{sh}\dfrac{p_nT}{4}\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right)}=\frac{8F_0}{T^2}\times$$

$$\times\frac{e^{i\omega(2n+1)t}}{\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right)}=\frac{8F_0}{T^2}\cdot\frac{\cos\omega(2n+1)t+i\sin\omega(2n+1)t}{\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right)}.$$

Выделяя в полученном выражении действительную часть, приходим к соотношению

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left[Y_2(p)e^{pt}\right]=\frac{8F_0}{T^2}\cdot\frac{\cos\omega(2n+1)t}{\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right)}. \tag{6.14}$$

Функция $Y_2(p)$ имеет также два простых комплексно сопряженных полюса в точках $p=\pm im$ (корни уравнения $p^2+m^2=0$). Представив лаплас-образ $Y_2(p)$ в виде

$$Y_2(p)=\frac{2F_0\operatorname{sh}\dfrac{pT}{4}}{Tp^2(p-im)(p+im)\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}},$$

находим вычет в полюсе 1-го порядка $p=im$ [см. формулу (5.9) для случая кратности полюса $n_k=1$]. В дальнейших вычислениях мы также будем использовать формулы, связывающие гиперболические функции мнимого аргумента с тригонометрическими функциями

$$\operatorname{ch}ix=\cos x,\quad \operatorname{sh}ix=i\sin x, \tag{6.15}$$

где x – действительное число.

Используя формулы (6.15), получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=im}\left[Y_2(p)e^{pt}\right]=\frac{2F_0}{T}\lim_{p\to im}\left[(p-im)\frac{\operatorname{sh}\dfrac{pT}{4}}{p^2(p-im)(p+im)\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}}\right]=$$

$$=\frac{2F_0}{T}\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{imT}{4}e^{imt}}{2im(im)^2\operatorname{ch}\dfrac{imT}{4}}=-\frac{F_0}{T}\cdot\frac{i\sin\dfrac{mT}{4}(\cos mt+i\sin mt)}{im^3\cos\dfrac{mT}{4}}=$$

$$=-\frac{F_0}{Tm^3}\operatorname{tg}\frac{mT}{4}(\cos mt+i\sin mt).$$

Далее выделяем действительную часть:

$$\operatorname*{Res}_{p=im}\left[Y_2(p)e^{pt}\right]=-\frac{F_0}{Tm^3}\operatorname{tg}\frac{mT}{4}\cos mt. \tag{6.16}$$

Рассмотрим точку $p=0$. Используя разложение гиперболического синуса в ряд Маклорена

$$\operatorname{sh}\frac{pT}{4}=\frac{pT}{4}+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^3+\ldots=\frac{pT}{4}\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right),$$

представим лаплас-образ $Y_2(p)$ в виде

$$Y_2(p)=\frac{2F_0}{T}\cdot\frac{\frac{pT}{4}\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right)}{p^2\left(p^2+m^2\right)\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}=\frac{F_0\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right)}{2p\left(p^2+m^2\right)\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}.$$

Из полученного соотношения видно, что точка $p=0$ является полюсом 1-го порядка. Поэтому получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(Y_2(p)e^{pt}\right)=\frac{F_0}{2}\lim_{p\to 0}\left[p\frac{\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right)e^{pt}}{p\left(p^2+m^2\right)\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}\right]=\frac{F_0(1+0)}{2m^2}=\frac{F_0}{2m^2}. \quad (6.17)$$

Суммируя результаты, даваемые соотношениями (6.14), (6.16), (6.17), находим функцию-оригинал для лаплас-образа $Y_2(p)$. Получаем

$$Y_2(p)\doteq\operatorname*{Res}_{p=0}\left(Y_2(p)e^{pt}\right)+2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=im}\left(Y_2(p)e^{pt}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(Y_2(p)e^{pt}\right)=\frac{F_0}{2m^2}-\frac{2F_0}{Tm^3}\operatorname{tg}\frac{mT}{4}\cos mt+$$

$$+\frac{16F_0}{T^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\omega(2n+1)t}{\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right)}. \quad (6.18)$$

Лаплас-образ $Y_1(p)$ представим в виде суммы двух табличных лаплас-образов:

$$Y_1(p)=\frac{p+1}{p^2+m^2}=\frac{p}{p^2+m^2}+\frac{1}{m}\cdot\frac{m}{p^2+m^2}\doteq\cos mt+\frac{1}{m}\sin mt. \quad (6.19)$$

Суммируя функции-оригиналы (6.18), (6.19), находим решение поставленной задачи Коши:

$$y(t)=\cos mt+\frac{1}{m}\sin mt+\frac{F_0}{2m^2}-\frac{2F_0}{Tm^3}\operatorname{tg}\frac{mT}{4}\cos mt+$$

$$+\frac{16F_0}{T^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\omega(2n+1)}{\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right)}=\frac{F_0}{2m^2}+\frac{1}{m}\sin mt+$$

$$+\left(1-\frac{2F_0}{Tm^3}\operatorname{tg}\frac{mT}{4}\right)\cos mt+\frac{16F_0}{T^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\omega(2n+1)t}{\omega^2(2n+1)^2\left(\omega^2(2n+1)^2-m^2\right)}.$$

б) $y'' - m^2 y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, (6.20)

где $f(t)$ – периодическая функция вида (6.10).

Решение. Переходим к лаплас-образам в обеих частях уравнения (6.20). С учетом нулевых начальных условий получаем

$$(p^2 - m^2)\,Y(p) = F(p),$$

где лаплас-образ $F(p)$ дается формулой (6.11). Из полученного уравнения находим лаплас-образ $Y(p)$, который имеет вид

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 - m^2} = \frac{A}{2T} \cdot \frac{e^{-pt} - 1 + Tp\,(2\mathrm{ch}pt - 1)}{p^2\,(p^2 - m^2)\,\mathrm{shpT}} = \frac{A}{2T} \cdot \frac{C(p)}{B(p)}.$$

Далее вновь находим все нули функции $B(p) = p^2\,(p^2 - m^2)\,\mathrm{sh}\,pT$. Из уравнения $\mathrm{sh}\,pT = 0$ получаем бесконечно много нулей:

$$p_n T = i\pi n,\ p_n = \frac{i\pi n}{T},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Вычисляем вычет функции $Y(p)\,e^{pt}$ в полюсе первого порядка $p = p_n$. Производная функции $B(p)$ имеет вид

$$B'(p) = T\mathrm{ch}pTp^2\,(p^2 - m^2) + \mathrm{sh}\,pT\,\left(p^2\,(p^2 - m^2)\right)'_p,$$

поэтому [в дальнейших вычислениях вновь используем формулы (6.15)]

$$B'(p_n) = T\,\mathrm{ch}\,p_n T p_n^2\,(p_n^2 - m^2) + 0 = T\cos\pi n\left(-\frac{(\pi n)^2}{T^2}\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{(\pi n)^2}{T^2} - m^2\right) = \frac{1}{T^3}(-1)^n(\pi n)^2\left((\pi n)^2 + (mT)^2\right).$$

Так как

$$e^{-p_n T} = e^{-i\pi n} = \cos\pi n - i\sin\pi n = (-1)^n,$$

то для функции $C(p) = e^{-pT} - 1 + Tp\,(2\mathrm{ch}pT - 1)$ при $p = p_n$ получаем

$$C(p_n) = (-1)^n - 1 + i\pi n\,(2\cos\pi n - 1) = (-1)^n - 1 + i\pi n\,\left(2(-1)^n - 1\right).$$

Используя полученные соотношения, находим

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]=\frac{A}{2T}\cdot\frac{C(p_n)}{B'(p_n)}e^{p_n t}=\frac{AT^2}{2}\cdot\frac{(-1)^n-1+i\pi n\left(2(-1)^n-1\right)}{(-1)^n(\pi n)^2\left((\pi n)^2+(mT)^2\right)}\times$$

$$\times e^{i\frac{\pi nt}{T}}=\frac{1}{2}AT^2\frac{1-(-1)^n+i\pi n\left(2-(-1)^n\right)}{(\pi n)^2\left((\pi n)^2+(mT)^2\right)}\left(\cos\frac{\pi nt}{T}+i\sin\frac{\pi nt}{T}\right).$$

Выделяя в полученном выражении действительную часть, приходим к соотношению

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}(Y(p)\,e^{pt})=\frac{1}{2}AT^2\frac{(1-(-1)^n)\cos\frac{\pi nt}{T}-\pi n(2-(-1)^n)\sin\frac{\pi nt}{T}}{(\pi n)^2\left((\pi n)^2+(mT)^2\right)}. \quad (6.21)$$

Функция $B(p)$ имеет также два действительных нуля $p=\pm m$, являющихся решениями уравнения $p^2-m^2=0$.

Представив лаплас-образ $Y(p)$ в виде

$$Y(p)=\frac{A}{2T}\cdot\frac{e^{-pt}-1+Tp\left(2\operatorname{ch}pT-1\right)}{p^2(p-m)(p+m)\operatorname{sh}pT},$$

находим вычеты функции $Y(p)\,e^{pt}$ в полюсах $p=\pm m$:

$$\operatorname*{Res}_{p=m}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]=\frac{A}{2T}\lim_{p\to m}\left[(p-m)\frac{e^{-pT}-1+Tp\left(2\operatorname{ch}pT-1\right)}{p^2(p-m)(p+m)\operatorname{sh}pT}e^{pt}\right]=$$

$$=\frac{A}{4T}\cdot\frac{e^{-mT}-1+Tm\left(2\operatorname{ch}mT-1\right)}{m^3\operatorname{sh}mT}e^{mt}.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-m}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]=\frac{A}{2T}\lim_{p\to -m}\left[(p+m)\frac{e^{-pT}-1+Tp\left(2\operatorname{ch}pT-1\right)}{p^2(p-m)(p+m)\operatorname{sh}pT}e^{pt}\right]=$$

$$=\frac{A}{4T}\cdot\frac{e^{mT}-1-Tm\left(2\operatorname{ch}mT-1\right)}{m^3\operatorname{sh}mT}e^{-mt}.$$

Суммируя эти два соотношения, получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=m}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]+\operatorname*{Res}_{p=-m}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]=\frac{A}{4Tm^3\operatorname{sh}mT}\left[\left(e^{-mT}-1\right)e^{mt}+\right.$$

$$+\left(e^{mT}-1\right)e^{-mt}+Tm\left(2\operatorname{ch}mT-1\right)\left(e^{mt}-e^{-mT}\right)\Big]=\frac{A}{4Tm^{3}\operatorname{sh}mT}\times$$

$$\times\left[2\operatorname{ch}m(t-T)-2\operatorname{ch}mt+2Tm\left(2\operatorname{ch}mT-1\right)\operatorname{sh}mt\right]. \qquad (6.22)$$

Чтобы определить порядок полюса в точке $p=0$, используем разложение гиперболических функций и экспоненты в ряд Маклорена:

$$\operatorname{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots,\ \operatorname{sh}z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots,\ e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots,. \quad (6.23)$$

Для функции $C(p)$ получаем (используем разложение для гиперболического косинуса и экспоненты)

$$C(p)=1-pT+\frac{(pT)^2}{2!}-\frac{(pT)^3}{3!}+\ldots-1+Tp\left(2+2\frac{(pT)^2}{2!}+\right.$$

$$\left.+2\frac{(pT)^4}{4!}+\ldots-1\right)=pT\left((pT)^2+\frac{2}{4!}(pT)^4+\ldots+\frac{1}{2!}(pT)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3!}(pT)^2+\ldots\right)=(pT)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}pT+\ldots\right).$$

Соответственно, функцию $B(p)$ приводим к виду (используем разложение для гиперболического синуса)

$$B(p)=p^3T\left(p^2-m^2\right)\left(1+\frac{1}{3!}(pT)^2+\ldots\right).$$

Как следствие, лаплас-образ $Y(p)$ принимает вид

$$Y(p)=\frac{A}{2T}\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{A}{2}\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}pT+\ldots}{p\left(p^2-m^2\right)\left(1+\frac{1}{3!}(pT)^2+\ldots\right)}.$$

Как следует из полученного выражения, точка $p=0$ является полюсом 1-го порядка для функции $Y(p)$. Поэтому получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\frac{A}{2}\lim_{p\to 0}\left[p\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}pT+\ldots}{p\left(p^2-m^2\right)\left(1+\frac{1}{3!}(pT)^2+\ldots\right)}\right]=$$

$$=\frac{A}{2}\frac{\frac{1}{2}+0}{\left(0-m^2\right)(1+0)}=-\frac{A}{4m^2}. \tag{6.24}$$

Суммируя результаты, даваемые формулами (6.21), (6.22), (6.24), находим функцию $y(t)$, являющуюся решением поставленной задачи Коши:

$$y(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}\left(Y(p)e^{pt}\right)+\operatorname*{Res}_{p=m}\left(Y(p)e^{pt}\right)+\operatorname*{Res}_{p=-m}\left(Y(p)e^{pt}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(Y(p)e^{pt}\right)=-\frac{A}{4m^2}+\frac{A}{4Tm^3\operatorname{sh}mT}\Big(2\operatorname{ch}m(t-T)-$$

$$-2\operatorname{ch}mT+2mT\left(2\operatorname{ch}mT-1\right)\operatorname{sh}mt\Big)+AT^2\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)\cos\frac{\pi nt}{T}-\pi n\left(2-(-1)^n\right)\sin\frac{\pi nt}{T}}{(\pi n)^2\left((\pi n)^2+(mT)^2\right)}=-\frac{A}{4m^2}+$$

$$+\frac{A}{2Tm^3\operatorname{sh}mT}\Big(\operatorname{ch}m(t-T)-\operatorname{ch}mt+Tm\left(2\operatorname{ch}mT-1\right)\operatorname{sh}mt\Big)+$$

$$+\frac{2AT^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\left(\pi^2(2k+1)^2+(mT)^2\right)}\cos\frac{\pi(2k+1)t}{T}-$$

$$-\frac{AT^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n\left((\pi n)^2+(mT)^2\right)}\sin\frac{\pi nt}{T}.$$

Совершенно аналогичным образом операционный метод может быть использован и для решения систем дифференциальных уравнений.

***Пример* 4.** Найти решение задачи Коши для данной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'+z=f(t), \\ z'+y=0, \quad y(0)=z(0)=0, \end{cases} \tag{6.25}$$

где $f(t)$ – периодическая функция периода T (рисунок 4).

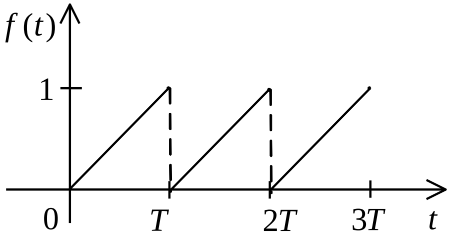


Рисунок 4

Решение. Аналитическая зависимость для функции $f(t)$ имеет вид $f(t)=\dfrac{t}{T}$, где $t\in(0;T)$. По формуле (5.6) находим лаплас-образ функции $f(t)$

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pt}},$$

где

$$F_0(p)=\frac{1}{T}\int_0^T te^{-pt}dt=-\frac{1}{pT}\left(Te^{-pT}+\frac{1}{p}\left(e^{-pT}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{p^2T}\left(1-e^{-pT}-pTe^{-pT}\right).$$

Как следствие, получаем

$$F(p)=\frac{1-e^{-pT}-pTe^{-pT}}{p^2T\left(1-e^{-pT}\right)}=\frac{\left(e^{\frac{pT}{2}}-e^{-\frac{pT}{2}}-pTe^{-\frac{pT}{2}}\right)}{p^2T\left(e^{\frac{pT}{2}}-e^{-\frac{pT}{2}}\right)}=\frac{2\operatorname{sh}\dfrac{pT}{2}-pTe^{-\frac{pT}{2}}}{2p^2T\operatorname{sh}\dfrac{pT}{2}}.$$

Вводим лаплас-образы неизвестных функций $y(t)\risingdotseq Y(p)$, $z(t)\risingdotseq Z(p)$. Тогда, после перехода к соответствующим лаплас-образам в системе уравнений (6.25). Получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} pY(p)+Z(p)=F(p), \\ Y(p)+pZ(p)=0. \end{cases} \tag{6.26}$$

С учетом явного выражения для лаплас-образа $F(p)$ находим из системы уравнений (6.26) лаплас-образ

$$Y(p)=\frac{pF(p)}{p^2-1}=\frac{2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}-pTe^{-\frac{pT}{2}}}{2Tp(p^2-1)\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}=\frac{2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}-pTe^{-\frac{pT}{2}}}{2TB_1(p)}.$$

Далее находим функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу $Y(p)$. Функция $B_1(p)=p(p^2-1)\operatorname{sh}\frac{pT}{2}$ имеет нули в точках $p_n=\frac{i2\pi n}{T}=i\omega n,\quad n=1,2,\ldots$ (корни уравнения $\operatorname{sh}\frac{pT}{2}=0$). Производная функции $B_1(p)$

$$B_1'(p)=\frac{T}{2}\operatorname{ch}\frac{pT}{2}p(p^2-1)+\operatorname{sh}\frac{pT}{2}\left(p(p^2-1)\right)_p',$$

поэтому

$$B_1'(p_n)=\frac{T}{2}\operatorname{ch}i\pi n\cdot i\omega n\left(-(\omega n)^2-1\right)=-\frac{T}{2}i(-1)^n\omega n\left((\omega n)^2+1\right).$$

Используя полученное соотношение для производной $B_1'(p_n)$, находим вычет функции $Y(p)e^{pt}$ в полюсе 1-го порядка $p_n=i\omega n$:

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}Y(p)e^{pt}=-\frac{Tp_ne^{-\frac{p_nT}{2}}e^{p_nt}}{2TB_1'(p_n)}=\frac{1}{T}\cdot\frac{i\omega ne^{-i\pi n}e^{i\omega nt}}{i(-1)^n\omega n\left((\omega n)^2+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot\frac{\cos n\omega t+i\sin n\omega t}{(\omega n)^2+1}.$$

Как следствие,

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}Y(p)e^{pt}=\frac{1}{T}\cdot\frac{\cos n\omega t}{(\omega n)^2+1}. \qquad (6.27)$$

Из уравнения $p^2-1=0$ получаем два полюса 1-го порядка $p=\pm1$. Вычисляем вычеты функции $Y(p)e^{pt}$ в этих полюсах

$$\operatorname*{Res}_{p=1}Y(p)e^{pt}=\frac{1}{2T}\lim_{p\to1}\left[(p-1)\frac{\left(2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}-pTe^{-\frac{pT}{2}}\right)e^{pt}}{p(p-1)(p+1)\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{4T}\cdot\frac{2\operatorname{sh}\frac{T}{2}-Te^{-\frac{T}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{t}=\frac{1}{4T}\left(2e^{t}-\frac{T}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{t-\frac{T}{2}}\right),\qquad(6.28)$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-1}Y(p)e^{pt}=\frac{1}{2T}\lim_{p\to-1}\left[(p+1)\frac{\left(2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}-pTe^{-\frac{pT}{2}}\right)e^{pt}}{p(p-1)(p+1)\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{4T}\cdot\frac{2\operatorname{sh}\frac{T}{2}-Te^{-\frac{T}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{-t}=\frac{1}{4T}\left(2e^{-t}-\frac{T}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)}\right).\qquad(6.29)$$

Точка $p=0$ не является полюсом функции $Y(p)$. Действительно, используя формулу (6.23), для функции в числителе дроби $Y(p)$ получаем

$$2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}-pTe^{-\frac{pT}{2}}=pT\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{2}\right)^{2}+\frac{1}{5!}\left(\frac{pT}{2}\right)^{4}+\ldots\right)-$$

$$-pT\left(1-\frac{pT}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{pT}{2}\right)^{2}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{pT}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{6}pT+\ldots\right).\qquad(6.30)$$

Разлагая также в ряд Маклорена функцию $\operatorname{sh}\frac{pT}{2}$ в знаменателе дроби $Y(p)$, приводим лаплас-образ $Y(p)$ к виду

$$Y(p)=\frac{1}{2T}\cdot\frac{\frac{1}{2}(pT)^{2}\left(1-\frac{1}{6}pT+\ldots\right)}{\frac{1}{2}p^{2}T\left(p^{2}-1\right)\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{2}\right)^{2}+\ldots\right)}=\frac{1-\frac{1}{6}pT+\ldots}{2\left(p^{2}-1\right)\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{2}\right)^{2}+\ldots\right)}.$$

Из полученного выражения выражения видно, что в точке $p=0$ функция $Y(p)$ равна конечной величине.

Суммируя результаты равенств (6.27), (6.28), (6.29), находим функцию $y(t)$ [оригинал лаплас-образа $Y(p)$]:

$$y(t)=\operatorname*{Res}_{p=1}\left[Y(p)e^{pt}\right]+\operatorname*{Res}_{p=-1}\left[Y(p)e^{pt}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left[Y(p)e^{pt}\right]=$$

$$=\frac{1}{4T}\left(2e^{t}-\frac{T}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{t-\frac{T}{2}}\right)+\frac{1}{4T}\left(2e^{-t}-\frac{T}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)}\right)+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{(n\omega)^{2}+1}=$$

$$=\frac{1}{4T}\left(2\left(e^{t}+e^{-t}\right)-\frac{T}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}\left(e^{t-\frac{T}{2}}+e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)}\right)\right)=\frac{1}{4T}\left(4\operatorname{ch}t-\frac{2T}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}\operatorname{ch}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)+$$

$$+2T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^{2}+T^{2}}\cos\frac{2\pi nt}{T}=\frac{1}{T}\operatorname{ch}t-\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{T}{2}}\operatorname{ch}\left(t-\frac{T}{2}\right)+$$

$$+2T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^{2}+T^{2}}\cos\frac{2\pi nt}{T}.$$

Из второго уравнения системы уравнений (6.26) получаем

$$Z(p)=-\frac{1}{p}Y(p)=-\frac{F(p)}{p^{2}-1}=-\frac{\operatorname{sh}\frac{pT}{2}-pTe^{-\frac{pT}{2}}}{2Tp^{2}\left(p^{2}-1\right)\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}=$$

$$=\frac{Tpe^{-\frac{pT}{2}}-2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}{2Tp^{2}\left(p^{2}-1\right)\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}=\frac{Tpe^{-\frac{pT}{2}}-2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}{2TB_{2}(p)}.$$

Производная $B_2(p)$ имеет вид

$$B_2'(p)=\frac{T}{2}\operatorname{ch}\frac{pT}{2}p^{2}\left(p^{2}-1\right)+\operatorname{sh}\frac{pT}{2}\left[p^{2}\left(p^{2}-1\right)\right]'_{p},$$

поэтому

$$B_2'(p_n)=B_2'(i\omega n)=\frac{T}{2}(-1)^{n}(\omega n)^{2}\left((\omega n)^{2}+1\right).$$

Используя это соответствие, вычисляем вычет функции $Z(p)e^{pt}$ в полюсе $p_n = i\omega n$:

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n} Z(p)e^{pt} = \frac{Tpe^{-\frac{p_nT}{2}}e^{p_nt}}{2TB_2'(p_n)} = \frac{1}{T}\cdot\frac{i\omega n e^{-i\pi n}e^{i\omega nt}}{(-1)^n(\omega n)^2\left((\omega n)^2+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{i(\cos n\omega t + i\sin n\omega t)}{\omega n\left((\omega n)^2+1\right)}.$$

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n} Z(p)e^{pt} = -\frac{1}{T}\cdot\frac{\sin n\omega t}{\omega n\left((\omega n)^2+1\right)}. \qquad (6.31)$$

Далее вычисляем вычеты функции $Z(p)e^{pt}$ в действительных полюсах:

$$\operatorname*{Res}_{p=1} Z(p)e^{pt} = \frac{1}{4T}\frac{Te^{-\frac{T}{2}} - 2\operatorname{sh}\frac{T}{2}}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{t}, \qquad (6.32)$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-1} Z(p)e^{pt} = -\frac{1}{4T}\frac{Te^{\frac{T}{2}} - 2\operatorname{sh}\frac{T}{2}}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}e^{-t}, \qquad (6.33)$$

Используя равенство (6.30), представим лаплас-образ $Z(p)$ в виде

$$Z(p) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(pT)^2\left(1-\frac{1}{6}pT+\ldots\right)}{p^3T^2(p^2-1)\left(1+\frac{1}{3!}(pT)^2+\ldots\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{6}pT+\ldots}{p(p^2-1)\left(1+\frac{1}{3!}(pT)^2+\ldots\right)}.$$

Как следует из полученного соотношения, точка $p=0$ является полюсом 1-го порядка функции $Z(p)$, поэтому получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=0} Z(p)e^{pt} = -\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left[p\,\frac{\left(1-\frac{1}{6}pT+\ldots\right)e^{pt}}{p\left(p^2-1\right)\left(1+\frac{1}{3!}(pT)^2+\ldots\right)}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-0}{(0-1)(1+0)}=\frac{1}{2}. \qquad (6.34)$$

Суммируя результаты полученных равенств (6.31) – (6.34), находим функцию $z(t)$:

$$z(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4T}\left(\frac{T}{\operatorname{sh}\frac{T}{2}}\left(e^{t-\frac{T}{2}}-e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)}\right)-2\left(e^t-e^{-t}\right)\right)-\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n\omega\left((n\omega)^2+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{T}{2}}\operatorname{sh}\left(t-\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{T}\operatorname{sh}t-T^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n\left((\pi n)^2+T^2\right)}\sin\frac{2\pi nt}{T}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши для системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$y(t)=\frac{1}{T}\operatorname{ch}t-\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{T}{2}}\operatorname{ch}\left(t-\frac{T}{2}\right)+2T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^2+T^2}\cos\frac{2\pi nt}{T},$$

$$z(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{T}{2}}\operatorname{sh}\left(t-\frac{T}{2}\right)-\frac{1}{T}\operatorname{sh}t-T^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n\left((2\pi n)^2+T^2\right)}\sin\frac{2\pi nt}{T}.$$

***Пример* 5.** Рассмотрим систему двух связанных гармонических осцилляторов массами m_1 и m_2, которые соединены между собой и с опорами тремя линейными пружинами (рисунок 5) (коэффициенты жесткости трех пружин одинаковы, т.е. $k_1=k_2=k_3=k$). Осцилляторы находятся на гладкой горизонтальной поверхности (пренебрегаем трением). Координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ определяют смещение осцилляторов от положения статического равновесия масс. На осциллятор с массой m_1 действует периодическая сила $f(t)$ (рисунок 6) с периодом $T\left[f(t)=f(t+T)\right]$.

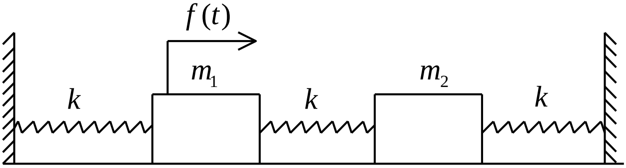
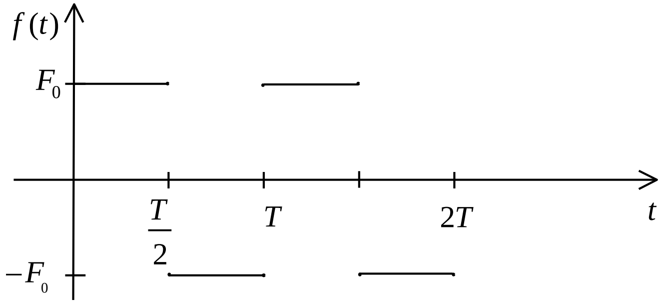


Рисунок 5

Рисунок 6



Начальные условия для системы осцилляторов полагаем нулевыми, т.е. $x_1(0)=\dot{x}_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$. Уравнения движения для системы осцилляторов имеют вид

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1=-kx_1-k(x_1-x_2)+f(t), \\ m_2\ddot{x}_2=-kx_2-k(x_2-x_1), \end{cases}$$

или, приводя подобные в правых частях уравнений этой системы, получаем

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1=-2kx_1+kx_2+f(t), \\ m_2\ddot{x}_2=kx_1-2kx_2. \end{cases} \qquad (6.35)$$

Далее вводим лаплас-образы неизвестных функций $x_1(t)\risingdotseq X_1(p)$, $x_2(t)\risingdotseq X_2(p)$. По формуле (5.6) находим лаплас-образ периодической силы $f(t)\risingdotseq F(p)$. Получаем

$$F(p)=\frac{F_0\operatorname{sh}\dfrac{pT}{4}}{p\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}}.$$

Тогда, переходя в системе уравнений (6.35) к соответствующим лаплас-образам, получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} \left(m_1 p^2 + 2k\right) X_1(p) - kX_2(p) = F(p), \\ -kX_1(p) + \left(m_2 p^2 + 2k\right) X_2(p) = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим требуемые лаплас-образы. Используя формулы Крамера, получаем

$$X_1(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} F(p) & -k \\ 0 & m_2 p^2 + 2k \end{vmatrix} = \frac{\left(m_2 p^2 + 2k\right) F(p)}{\Delta(p)},$$

$$X_2(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} m_1 p^2 + 2k & F(p) \\ -k & 0 \end{vmatrix} = \frac{kF(p)}{\Delta(p)},$$

где определитель системы

$$\Delta(p) = m_1 m_2 p^4 + 2k\left(m_1 + m_2\right) p^2 + 3k^2 = m_1 m_2 \left(p^2 + \omega_1^2\right)\left(p^2 + \omega_2^2\right).$$

При записи определителя $\Delta(p)$ мы ввели собственные частоты системы осцилляторов

$$\omega_1^2 = k\,\frac{m_1 + m_2 - \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 m_2},$$

$$\omega_2^2 = k\,\frac{m_1 + m_2 + \sqrt{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 m_2}.$$

Таким образом, для лаплас-образа $X_1(p)$, с учетом явного выражения для лаплас-образа $F(p)$, получаем

$$X_1(p) = \frac{F_0}{m_1 m_2} \cdot \frac{\left(m_2 p^2 + 2k\right) \operatorname{sh}\frac{pT}{4}}{p\left(p^2 + \omega_1^2\right)\left(p^2 + \omega_2^2\right) \operatorname{ch}\frac{pT}{4}}.$$

Далее находим функцию-оригинал для лаплас-образа $X_1(p)$. Вводим функцию

$$B(p) = p\left(p^2 + \omega_1^2\right)\left(p^2 + \omega_2^2\right) \operatorname{ch}\frac{pT}{4}.$$

Ее производная равна

$$B'(p) = \frac{T}{4} \operatorname{sh}\frac{pT}{4}\, p\left(p^2 + \omega_1^2\right)\left(p^2 + \omega_2^2\right) + \operatorname{ch}\frac{pT}{4} \cdot \left[p\left(p^2 + \omega_1^2\right)\left(p^2 + \omega_2^2\right)\right]'_p.$$

Вычисляем вычет функции $X_1(p)e^{pt}$ в полюсе 1-го порядка $p_n = \frac{i2\pi(2n+1)}{T} = i\omega(2n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (корни уравнения $\operatorname{ch}\frac{pT}{4} = 0$). Используя полученное соотношение для производной $B'(p)$, находим

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left[X_1(p)e^{pt}\right] = \frac{F_0}{m_1 m_2}\cdot\frac{\left(m_2 p_n^2 + 2k\right)\operatorname{sh}\frac{p_n T}{4}}{B'(p_n)}e^{p_n t} =$$

$$= \frac{4F_0}{m_1 m_2 T}\cdot\frac{\left(m_2 p_n^2 + 2k\right)\operatorname{sh}\frac{p_n T}{4}}{p_n\left(p_n^2+\omega_1^2\right)\left(p_n^2+\omega_2^2\right)\operatorname{sh}\frac{p_n T}{4}}e^{p_n t} =$$

$$= \frac{4F_0}{m_1 m_2 T}\cdot\frac{\left[2k - m_2\omega^2(2n+1)^2\right]e^{i\omega(2n+1)t}}{i\omega(2n+1)\left[\omega_1^2-\omega^2(2n+1)^2\right]\left[\omega_2^2-\omega^2(2n+1)^2\right]} =$$

$$= \frac{4F_0}{m_1 m_2 T}\cdot\frac{\left[2k - m_2\omega^2(2n+1)^2\right]\left[\cos\omega(2n+1)t + i\sin\omega(2n+1)t\right]}{i\omega(2n+1)\left[\omega^2(2n+1)^2-\omega_1^2\right]\left[\omega^2(2n+1)^2-\omega_2^2\right]}.$$

Действительная часть полученного выражения

$$\operatorname*{ReRes}_{p=p_n}\left[X_1(p)e^{pt}\right] = \frac{4F_0}{m_1 m_2 T}\cdot\frac{2k - m_2\omega^2(2n+1)^2}{\omega(2n+1)\left[\omega^2(2n+1)^2-\omega_1^2\right]}\times$$

$$\times\frac{\sin\omega(2n+1)t}{\omega^2(2n+1)^2-\omega_2^2}. \tag{6.36}$$

Представив функцию $B(p)$ в виде

$$B(p) = p(p-i\omega_1)(p+i\omega_1)\left(p^2+\omega_2^2\right)\operatorname{ch}\frac{pT}{4},$$

вычисляем вычет функции $X_1(p)e^{pt}$ в полюсе $p = i\omega_1$:

$$\operatorname*{Res}_{p=i\omega_1}\left(X_1(p)\,e^{pt}\right)=\frac{F_0}{m_1m_2}\lim_{p\to i\omega_1}\left[(p-i\omega_1)\frac{m_2p^2+2k}{p(p-i\omega_1)(p+i\omega_1)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}\dfrac{p_nT}{4}e^{p_nt}}{(p^2+\omega_2{}^2)\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}}\right]=\frac{F_0}{m_1m_2}\cdot\frac{(2k-m_2\omega_1{}^2)\operatorname{sh}\dfrac{i\omega_1T}{4}e^{i\omega_1t}}{2(i\omega_1)^2(\omega_2{}^2-\omega_1{}^2)\operatorname{ch}\dfrac{i\omega_1T}{4}}=$$

$$=\frac{F_0}{2m_1m_2}\cdot\frac{(2k-m_2\omega_1{}^2)\sin\dfrac{\omega_1T}{4}(\cos\omega_1t+i\sin\omega_1t)}{i\omega_1{}^2(\omega_2{}^2-\omega_1{}^2)\cos\dfrac{\omega_1T}{4}}$$

Выделяя действительную часть, получаем

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega_1}\left(X_1(p)\,e^{pt}\right)=\frac{F_0}{2m_1m_2}\cdot\frac{(2k-m_2\omega_1{}^2)\operatorname{tg}\dfrac{\omega_1T}{4}\sin\omega_1t}{\omega_1{}^2(\omega_2{}^2-\omega_1{}^2)}. \qquad (6.37)$$

Аналогичным образом, использовав для функции $B(p)$ представление $B(p)=p(p^2+\omega_1{}^2)(p-i\omega_2)(p+i\omega_2)\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}$, вычисляем

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega_2}\left(X_1(p)\,e^{pt}\right)=-\frac{F_0}{2m_1m_2}\cdot\frac{(2k-m_2\omega_2{}^2)\operatorname{tg}\dfrac{\omega_2T}{4}\sin\omega_2t}{\omega_2{}^2(\omega_2{}^2-\omega_1{}^2)}. \qquad (6.38)$$

Точка $p=0$ не является полюсом функции $X_1(p)$. Действительно, использовав разложение гиперболического синуса в ряд Маклорена (формулы (6.23)), получаем

$$\lim_{p\to0}X_1(p)=\frac{F_0}{m_1m_2}\lim_{p\to0}\frac{(m_2p^2+2k)\dfrac{pT}{4}\left(1+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right)}{p(p^2+\omega_1{}^2)(p^2+\omega_2{}^2)\operatorname{ch}\dfrac{pT}{4}}=\frac{F_0T_k}{2m_1m_2\omega_1{}^2\omega_2{}^2}.$$

Суммируя результаты равенств (6.36), (6.37), (6.38), находим координату первого осциллятора (ее зависимость от времени)

$$x_1(t)=2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega_1}\left(X_1(p)\,e^{pt}\right)+2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega_2}\left(X_1(p)\,e^{pt}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2\,\mathrm{ReRes}_{p=p_n}\left[X_1(p)\,e^{pt}\right] = \frac{F_0}{m_1 m_2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left(\frac{2k-m_2\omega_1^2}{\omega_1^2}\,\mathrm{tg}\frac{\omega_1 T}{4}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\omega_1 t-\frac{2k-m_2\omega_2^2}{\omega_2^2}\,\mathrm{tg}\frac{\omega_2 T}{4}\sin\omega_2 t\right)+\frac{4F_0}{\pi m_1 m_2}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2k-m_2\omega^2(2n+1)^2\right)\sin\omega(2n+1)t}{(2n+1)\left(\omega^2(2n+1)^2-\omega_1^2\right)\left(\omega^2(2n+1)^2-\omega_2^2\right)},$$

где при записи последнего выражения мы использовали равенство $\omega T = 2\pi$.

Для лаплас-образа $X_2(p)$ мы получили следующее выражение:

$$X_2(p)=\frac{kF(p)}{\Delta(p)}=\frac{kF_0}{m_1 m_2}\cdot\frac{\mathrm{sh}\frac{pT}{4}}{p\left(p^2+\omega_1^2\right)\left(p^2+\omega_2^2\right)\mathrm{ch}\frac{pT}{4}}.$$

Все дальнейшие вычисления аналогичны предыдущим, поэтому сразу приводим результаты:

$$\mathrm{ReRes}_{p=i\omega_1}\left[X_2(p)\,e^{pt}\right]=\frac{kF_0}{2m_1 m_2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\frac{\omega_1 T}{4}\sin\omega_1 t}{\omega_1^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}, \qquad (6.39)$$

$$\mathrm{ReRes}_{p=i\omega_2}\left[X_2(p)\,e^{pt}\right]=-\frac{kF_0}{2m_1 m_2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\frac{\omega_2 T}{4}\sin\omega_2 t}{\omega_2^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}, \qquad (6.40)$$

$$\mathrm{ReRes}_{p=p_n}\left[X_2(p)\,e^{pt}\right]=\frac{2kF_0}{\pi m_1 m_2}\cdot\frac{\sin\omega(2n+1)t}{(2n+1)\left(\omega^2(2n+1)^2-\omega_1^2\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{\omega^2(2n+1)^2-\omega_2^2}. \qquad (6.41)$$

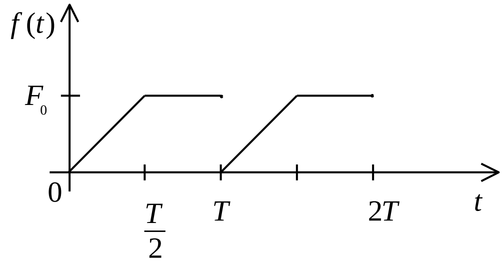
Суммируя результаты равенств (6.39) – (6.41), находим координату второго осциллятора

$$x_2(t)=\frac{kF_0}{m_1 m_2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left(\frac{1}{\omega_1^2}\,\mathrm{tg}\frac{\omega_1 T}{4}\sin\omega_1 t-\frac{1}{\omega_2^2}\,\mathrm{tg}\frac{\omega_2 T}{4}\sin\omega_2 t\right)+$$

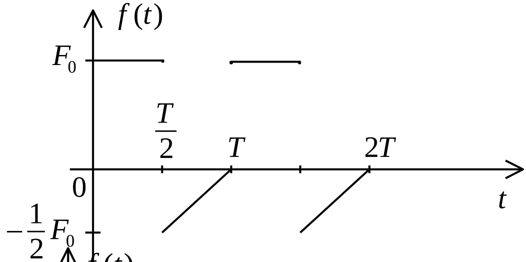
$$+\frac{4kF_0}{\pi m_1 m_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\omega(2n+1)t}{(2n+1)\left(\omega^2(2n+1)^2-\omega_1^2\right)\left(\omega^2(2n+1)^2-\omega_2^2\right)}.$$

***Упражнение* 1.** Найти лаплас-образы данных периодических функций периода T $\left(f(t)=f(t+T)\right)$ (рисунок 7).

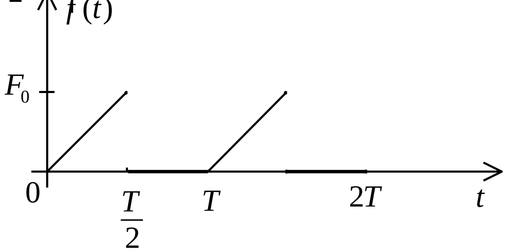
1.1



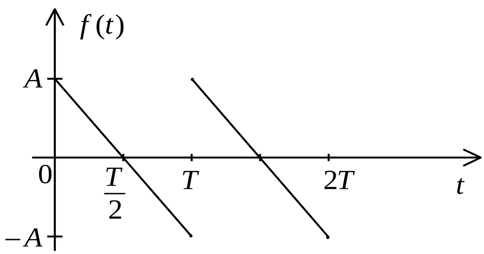
1.2



1.3



1.4 Рисунок 7



Отв.

$$\textbf{1.1}\ F(p)=\frac{F_0\left(2\left(e^{\frac{pT}{2}}-1\right)-Tpe^{-\frac{pT}{2}}\right)}{2Tp^2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}.$$

$$\textbf{1.2}\ F(p)=\frac{F_0\left(2Tp\left(\operatorname{ch}\frac{pT}{2}-1\right)+1-e^{-\frac{pT}{2}}\right)}{2Tp^2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}.$$

$$\textbf{1.3}\ F(p)=\frac{F_0\left(2\left(e^{\frac{pT}{2}}-1\right)-Tp\right)}{2Tp^2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}.$$

$$\textbf{1.4}\ F(p)=\frac{A\left(2Tp\operatorname{ch}\frac{pT}{2}-4\operatorname{sh}\frac{pT}{2}\right)}{2Tp^2\operatorname{sh}\frac{pT}{2}}.$$

***Упражнение* 2.** Найти лаплас-образы периодической функции периода $f(t)$ с периодом $3T$ $\left(f(t)=f(t+3T)\right)$ (рисунок 8).

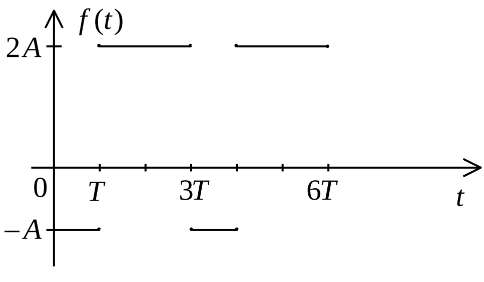


Рисунок 8

Отв. $$F(p)=\frac{A\left(3e^{\frac{pT}{2}}-e^{-\frac{3pT}{2}}-2\operatorname{ch}\frac{3pT}{2}\right)}{2p\operatorname{sh}\frac{3pT}{2}}.$$

***Упражнение* 3.** Найти решение поставленной задачи Коши.

3.1 $x'' + 4x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t)$ – периодическая сила с периодом $3T$ (см. рисунок 8).

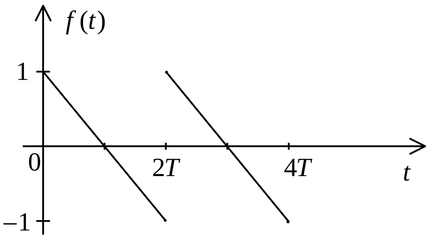
Отв.

$$x(t) = \frac{A}{6} - \frac{A}{8\sin 3T} \quad 6\sin 2T \sin T \sin 2t + (3\sin T + \sin 3T)\cos 2t \quad +$$

$$+\frac{27AT^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\dfrac{\pi n(2t+T)}{3T} - \sin\dfrac{2\pi n t}{3T}}{9T^2 - (\pi n)^2}.$$

3.2 $y'' - y = f(t),\ y(0) = y'(0) = 0,\ f(t)$ – периодическая сила с периодом $2T \quad f \quad t \quad = f \quad t + 2T$ (рисунок 9).

Рисунок 9



Отв. $y(t) = \dfrac{1}{T}(T\operatorname{cth}T - 1)\operatorname{sh}t - 2T^2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n((\pi n)^2 + T^2)}\sin\frac{\pi n t}{T}.$

3.3 $y'' + k^2 y = f(t),\ y(0) = y'(0) = 0,\ f(t)$ – периодическая сила с периодом $2T \quad f \quad t \quad = f \quad t + 2T$ (рисунок 10).

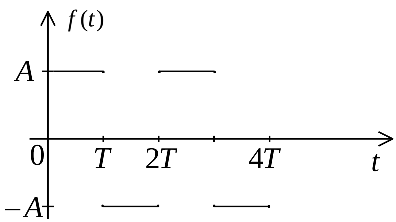


Рисунок 10

Отв. $y(t) = \dfrac{A}{k^2}\operatorname{tg}\dfrac{kT}{2}\sin kt + \dfrac{4AT^2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi(2n+1)t}{T}}{(2n+1)((kT)^2 - \pi^2(2n+1)^2)}.$

3.4 $x'' + x = f(t),\ x(0) = x'(0) = 0,\ f(t)$ – периодическая сила с периодом $2T$ $\quad f\ \ t\ = f\ \ t + 2T$ $\quad$ (рисунок 11).

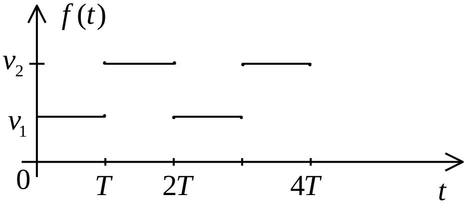


Рисунок 11

Отв. $x(t) = \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2) - \dfrac{1}{2}(v_2 - v_1)\operatorname{tg}\dfrac{T}{2}\sin t - \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2)\cos t +$

$$+2T^2(v_2 - v_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi(2k+1)t}{T}}{\pi(2k+1)(\pi^2(2k+1) - T^2)}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

Гамма-функция Эйлера

Интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx, \qquad (А.1)$$

сходящийся для любого комплексного значения z в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$, называется эйлеровым интегралом II рода. Функция $\Gamma(z)$, представленная этим интегралом, является аналитической в области $\mathrm{Re}\, z > 0$. Эта функция называется гамма-функцией Эйлера.

Вычисляя интеграл (А.1) по частям

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx = \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-x} dx^z = e^{-x}x^z \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-x} x^z dx =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}x^z\right) + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-x} x^z dx = \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-x} x^z dx = \frac{1}{z}\Gamma(z),$$

получаем основное функциональное соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \qquad (А.2)$$

Учитывая очевидное равенство $\Gamma(1) = 1$, при помощи соотношения (А.2) получаем

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\ldots(z+1)\Gamma(z) \qquad (А.3)$$

и

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

где n – натуральное число.

Соотношение (А.3) позволяет построить аналитическое продолжение гамма-функции на всю плоскость. При этом продолженная функция будет в точках $0, 1, 2, \ldots$ иметь простые полюсы. В самом деле,

$$\Gamma(z)\;(z+n) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\ldots z}.$$

Но в правой части этого равенства записана функция, аналитическая в некоторой окрестности точки $z = -n$. Поэтому при $z = -n$ гамма-функция имеет простой полюс с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{z=-n}\Gamma(z)=\Gamma(z)(z+n)\Big|_{z=-n}=\frac{\Gamma(1)}{(-1)\dots(-n)}=\frac{(-1)^n}{n!},$$

где $n=0,1,2,\dots$.

Имеется ещё одно функциональное соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \qquad \text{(A.4)}$$

Из этого соотношения непосредственно вытекают формулы

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!, \; n=1,2,\dots.$$

Из соотношения (А.4) также вытекает, что гамма-функция нигде в комплексной плоскости не обращается в 0. Это означает, что функция $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ является целой аналитической функцией с простыми нулями в точках $0;-1;-2;\dots$. Эта функция может быть представлена в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}, \qquad \text{(A.5)}$$

где $c=0{,}577216$ – постоянная Эйлера,

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right).$$

Логарифмируя соотношение (п. 1.5) и дифференцируя результат по z, можно получить формулу

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=-c-\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+k}-\frac{1}{k}\right).$$

В частности,

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-c.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)

Лаплас-образы некоторых элементарных функций

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1; \qquad \frac{1}{p^2} \risingdotseq t;$$

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \risingdotseq t^n \quad (n \in N); \qquad \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \risingdotseq t^{\nu} \quad (\nu \in \mathbb{R});$$

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \sin\omega t; \qquad \frac{p}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \cos\omega t;$$

$$\frac{\omega}{p^2-\omega^2} \risingdotseq \operatorname{sh}\omega t; \qquad \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \risingdotseq \operatorname{ch}\omega t;$$

$$\frac{1}{p-\alpha} \risingdotseq e^{\alpha t}; \qquad \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}} \risingdotseq t^n e^{\alpha t};$$

$$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2} \risingdotseq e^{\alpha t}\sin\omega t; \qquad \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2} \risingdotseq e^{\alpha t}\cos\omega t;$$

$$\frac{\omega\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}} \risingdotseq \sin\omega\sqrt{t}; \qquad \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}} \risingdotseq \frac{\cos\omega\sqrt{t}}{\sqrt{t}};$$

$$\frac{\omega\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{\frac{\omega^2}{4p}} \risingdotseq \operatorname{sh}\omega\sqrt{t}; \qquad \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\frac{\omega^2}{4p}} \risingdotseq \frac{\operatorname{ch}\omega\sqrt{t}}{\sqrt{t}};$$

$$e^{-\lambda\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \quad (\lambda > 0); \qquad \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\lambda\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \quad (\lambda > 0);$$

$$\frac{1}{p(p^2+\omega^2)} \risingdotseq \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t);$$

$$\frac{p+\alpha}{p^2(p+a)} \risingdotseq \frac{\alpha-a}{a^2} e^{-at} + \frac{\alpha}{a} t + \frac{a-\alpha}{a^2};$$

$$\frac{p^2+\alpha p+\beta}{p^2(p+a)} \doteq \frac{a^2-a\alpha+\beta}{a^2}e^{-at}+\frac{\beta}{a}t+\frac{a\alpha-\beta}{a^2};$$

$$\frac{p+\alpha}{p(p+a)^2} \doteq \frac{\alpha}{a^2}+\left(\frac{a-\alpha}{a}t-\frac{\alpha}{a^2}\right)e^{-at};$$

$$\frac{p^2+\alpha p+\beta}{p(p+a)^2} \doteq \frac{\beta}{a^2}+\left(\frac{a\alpha-\beta-a^2}{a}t+\frac{a^2-\beta}{a^2}\right)e^{-at};$$

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b};$$

$$\frac{p+\alpha}{p(p+a)(p+b)} \doteq \frac{\alpha}{ab}+\frac{\alpha-a}{a(a-b)}e^{-at}+\frac{\alpha-b}{b(b-a)}e^{-bt};$$

$$\frac{p}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{be^{-bt}-ae^{-at}}{b-a};$$

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)} \doteq \frac{(c-b)e^{-at}+(a-c)e^{-bt}+(b-a)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)};$$

$$\frac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)} \doteq \frac{a(b-c)e^{-at}+b(c-a)e^{-bt}+c(a-b)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)};$$

$$\frac{p}{(p+\alpha)^2+\omega^2} \doteq \left(\cos\omega t-\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)e^{-\alpha t};$$

$$\frac{p}{(p+a)^3} \doteq t\left(1-\frac{1}{2}at\right)e^{-at};$$

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2} \doteq \frac{e^{-at}-[1-(a-b)t]e^{-bt}}{(a-b)^2};$$

$$\frac{p}{(p+a)(p+b)^2} \doteq \frac{[a-b(a-b)t]e^{-bt}-ae^{-at}}{(a-b)^2};$$

$$\frac{p+\alpha}{(p+a)(p+b)^2} \doteq \frac{\alpha-a}{(b-a)^2}e^{-at}+\left(\frac{\alpha-b}{a-b}t+\frac{a-\alpha}{(a-b)^2}\right)e^{-bt};$$

$$\frac{1}{p^4+\omega^4} \doteq \frac{1}{\omega^3\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}}-\operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\frac{p}{p^4+\omega^4} \doteq \frac{1}{\omega^2}\sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{p^2}{p^4+\omega^4} \doteq \frac{1}{\omega\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}+\sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\frac{p^3}{p^4+\omega^4} \doteq \cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{1}{p^4-\omega^4} \doteq \frac{1}{2\omega^3}\left(\operatorname{sh}\omega t-\sin\omega t\right);$$

$$\frac{p}{p^4-\omega^4} \doteq \frac{1}{2\omega^2}\left(\operatorname{ch}\omega t-\cos\omega t\right);$$

$$\frac{p^2}{p^4-\omega^4} \doteq \frac{1}{2\omega}\left(\operatorname{sh}\omega t+\sin\omega t\right);$$

$$\frac{p^3}{p^4-\omega^4} \doteq \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\omega t+\cos\omega t\right);$$

$$\frac{1}{p\left(p^2+\omega^2\right)^2} \doteq \frac{1}{\omega^4}\left(1-\cos\omega t\right)-\frac{1}{2\omega^3}t\sin\omega t;$$

$$\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \doteq \frac{1}{2\omega^3}\sin\omega t-\frac{1}{2\omega^2}t\cos\omega t;$$

$$\frac{p^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \doteq \frac{1}{2\omega}\left(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t\right);$$

$$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \doteq t\cos\omega t;$$

$$\frac{1}{p^3\left(p^2+\omega^2\right)} \doteq \frac{1}{2\omega^2}t^2+\frac{1}{\omega^4}\left(\cos\omega t-1\right);$$

$$\frac{1}{p^3\left(p^2-\omega^2\right)} \doteq \frac{1}{\omega^4}\left(\operatorname{ch}\omega t-1\right)-\frac{1}{2\omega^2}t^2;$$

$$\frac{1}{\left(\left(p+\alpha\right)^2+\omega^2\right)^2} \doteq \frac{1}{2\omega^3}e^{-\alpha t}\left(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right);$$

$$\frac{p+\alpha}{\left((p+\alpha)^2+\omega^2\right)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega} t e^{-\alpha t}\sin\omega t; \qquad \frac{(p+\alpha)^2-\omega^2}{\left((p+\alpha)^2+\omega^2\right)^2} \risingdotseq t e^{-\alpha t}\cos\omega t;$$

$$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \risingdotseq \frac{a\sin bt-b\sin at}{ab(a^2-b^2)};$$

$$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \risingdotseq \frac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2};$$

$$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \risingdotseq \frac{a\sin at-b\sin bt}{a^2-b^2};$$

$$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \risingdotseq \frac{a^2\cos at-b^2\cos bt}{a^2-b^2};$$

$$\frac{1}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)} \risingdotseq \frac{b\,\mathrm{sh}\,at-a\,\mathrm{sh}\,bt}{ab(a^2-b^2)}; \qquad \frac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)} \risingdotseq \frac{\mathrm{ch}\,bt-\mathrm{ch}\,at}{b^2-a^2};$$

$$\frac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)} \risingdotseq \frac{a\,\mathrm{sh}\,at-b\,\mathrm{sh}\,bt}{a^2-b^2};$$

$$\frac{p^3}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)} \risingdotseq \frac{a^2\,\mathrm{ch}\,at-b^2\,\mathrm{ch}\,bt}{a^2-b^2};$$

$$\frac{p+\alpha}{(p+a)^2(p+b)^2} \risingdotseq \left(\frac{\alpha-a}{(b-a)^2}t+\frac{a+b-2\alpha}{(b-a)^3}\right)e^{-at}+$$

$$+\left(\frac{\alpha-b}{(a-b)^2}t+\frac{a+b-2\alpha}{(a-b)^3}\right)e^{-bt};$$

$$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^3} \risingdotseq \frac{1}{8\omega^5}\left((3-\omega^2t^2)\sin\omega t-3\omega t\cos\omega t\right);$$

$$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^3} \risingdotseq \frac{t}{(2\omega)^3}\left(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right);$$

$$\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^3} \risingdotseq \frac{1}{(2\omega)^3}\left((1+\omega^2t^2)\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}; \qquad \frac{1}{p\sqrt{p}} \risingdotseq 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}; \qquad \frac{1}{p^n\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\frac{2^n t^n}{(2n-1)!!};$$

$$\frac{1}{p\left(\sqrt{p}+a\right)} \risingdotseq \frac{1}{a}\left(1-e^{a^2t}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{t}\right)\right)\right),$$

где $\Phi(s)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^s e^{-y^2}dy$ – функция Лапласа;

$$\frac{1}{\sqrt{p}+a} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}-ae^{a^2t}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{t}\right)\right);$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{p}+a\right)^2} \risingdotseq \left(2a^2t+1\right)e^{a^2t}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{t}\right)\right)-2a\sqrt{\frac{t}{\pi}};$$

$$\frac{1}{p\left(\sqrt{p}+a\right)^2} \risingdotseq \frac{1}{a^2}+\left(2t-\frac{1}{a^2}\right)e^{a^2t}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{t}\right)\right)-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{t}{\pi}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+a\right)} \risingdotseq e^{a^2t}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{t}\right)\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+a\right)^2} \risingdotseq 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}-2ate^{a^2t}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{t}\right)\right);$$

$$\frac{a-\sqrt{p}}{p\left(\sqrt{p}+a\right)} \risingdotseq 1-2e^{a^2t}\left(1-\Phi\left(a\sqrt{t}\right)\right);$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p^2} \risingdotseq \left(t+\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)\right)-\lambda\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}};$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p\left(\sqrt{p}+a\right)} \risingdotseq \frac{1}{a}\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)\right)-\frac{1}{a}e^{a\lambda+a^2t}\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right);$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p} \risingdotseq 1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right);$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{\sqrt{p}+a} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}-ae^{a\lambda+a^2t}\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right);$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p\left(\sqrt{p}+a\right)^2} \doteqdot \frac{1}{a^2}\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)\right)-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}+\left(2t+\frac{\lambda}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{a\lambda+a^2t}\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right);$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{\left(\sqrt{p}+a\right)^2} \doteqdot \left(2at^2+\lambda a+1\right)e^{a\lambda+a^2t}\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right)-2a\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}};$$

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+a\right)^2} \doteqdot 2\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}-\left(2at+\lambda\right)e^{a\lambda+a^2t}\left(1-\Phi\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right);$$

$$\frac{e^{-\sqrt{\alpha(p+\beta)}}}{p} \doteqdot \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{\alpha\beta}}\left(1-\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{t}}-\sqrt{\beta t}\right)\right)+e^{\sqrt{\alpha\beta}}\left(1-\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{t}}+\sqrt{\beta t}\right)\right)\right);$$

$$e^{-\sqrt{\alpha(p+\beta)}} \doteqdot \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\beta t-\frac{\alpha}{4t}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Богданов, Ю. С.** Курс дифференциальных уравнений / Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник, Ю. Б. Сыроид. – Минск : Універсітэцкае, 1996. – 287 с.

2 **Минюк, С. А.** Математика для инженеров. В 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский. – Минск : Элайда, 2004. – Т. 2. – 592 с.

3 **Матвеев, Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Минск : Вышэйшая школа, 1974. – 766 с.

4 **Тихонов, А. Н.** Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – Москва : Наука, 1985. – 231 с.

5 **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 320 с.

6 **Краснов, М. Л.** Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 176 с.

7 Дудко, С. А. Операционное исчисление и его приложение : пособие. В 2 ч. / С. А. Дудко, Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – Ч. 1. – 87 с.

СОДЕРЖАНИЕ

6 Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений с периодическими внешними силами………………………………………... 3
6.1 Метод Фурье…………………………………………………………… 3
6.2 Операционный метод………………………………………………..... 7
Приложение А Гамма-функция Эйлера…………………………………….. 33
Приложение Б Лаплас-образы некоторых элементарных функций……………. 35
Список литературы………………………………………………………... 40

Учебное издание

ДУДКО Сергей Алексеевич
ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Часть 3. Системы дифференциальных уравнений специального вида

Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 31.01.2013 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 1,57. Тираж 250 экз.
Зак № 382. Изд № 55.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34