МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра «Высшая математика»

А. И. ПРОКОПЕНКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, Д. Н. СИМОНЕНКО

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2016

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра «Высшая математика»

А. И. ПРОКОПЕНКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
Д. Н. СИМОНЕНКО

РЯДЫ

*Одобрено методической комиссией электротехнического факультета
в качестве учебно-методического пособия*

Гомель 2016

УДК 517.518.4 (075.8)
ББК 22.161
П80

Рецензент – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики *И. М. Дергачева* (УО «БелГУТ»).

Прокопенко, А. И.

П80 Ряды : учеб.-метод. пособие / А. И. Прокопенко, Е. А. Задорожнюк, Д. Н. Симоненко; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2016. – 83 с.
ISBN 978-985-554-488-4

Изложены краткие теоретические сведения о рядах. Разобрано большое количество примеров с подробными пояснениями. Для проверки полученных знаний даны самостоятельные и контрольная работы.

Составлено в соответствии с действующей программой по высшей математике. Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 517.518.4 (075.8)
ББК 22.161

ISBN 978-985-554-488-4

1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1 Основные понятия. Простейшие свойства. Необходимый признак сравнения

Числовым рядом называется выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ – числа, называемые *членами ряда*.

Выражение (1.1) принято сокращенно записывать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{1.2}$$

Ряд называется *сходящимся*, если его *n*-я частичная сумма

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \tag{1.3}$$

при неограниченном возрастании *n* стремится к конечному пределу, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \tag{1.4}$$

Число S в этом случае называется *суммой ряда*. В противном случае ряд называется *расходящимся* и суммы не имеет. Приведем основные свойства сходящихся числовых рядов.

1. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m + \ldots,$ то сходится и ряд $u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots,$ получаемый из данного ряда отбрасыванием первых *m* членов (*m* – любое натуральное число).

2. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$ сумма которого S, то сходится и ряд $cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots,$ причем сумма его равна cS.

3. Если сходятся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$ суммы которых соответственно равны S' и S'', то сходится и ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots,$ причем его сумма равна $S' + S''$.

4. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{1.5}$$

(необходимый признак сходимости ряда). Обратное утверждение неверно, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ то ряд расходится (достаточный признак расходимости ряда).

***Пример* 1.1.1.** Выписать 4 первых члена ряда, если известен общий член ряда

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Решение. Подставляя в формулу u_n значение $n=1,$ находим

$$u_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, полагая $n=2,$ получаем

$$u_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6},$$

и далее

$$u_3 = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}, u_4 = \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{20}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots.$$

***Пример* 1.1.2.** Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots,$$

рассмотренный в примере 1.1.1, является сходящимся, и найти его сумму.

Решение. Перепишем общий член ряда в следующем виде:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Найдем теперь частичную сумму

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Так как в выражении для частичной суммы слагаемые

$$-\frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3} \text{ и } \frac{1}{3},\ldots,-\frac{1}{n} \text{ и } \frac{1}{n}$$

взаимно уничтожаются, то

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

т.е. ряд сходится и его сумма равна 1.

***Пример* 1.1.3.** Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но расходится.

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Необходимый признак выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Покажем, что ряд тем не менее расходится. Для этого оценим n-ю частичную сумму

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ раз}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Итак, $S_n \ge \sqrt{n}$, т.е. при $n\to\infty, S_n \to \infty$. Следовательно, ряд расходится.

***Пример* 1.1.4.** Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \ldots + \frac{n}{2n+3} + \ldots.$$

Решение. Ищем предел

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \ne 0.$$

Необходимый признак не выполнен, поэтому ряд расходится.

Задачи

Найти общий член ряда:

1.1.1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots.$

1.1.2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots.$

1.1.3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots.$

1.1.4. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots.$

1.1.5. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots.$

1.1.6. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots.$

1.1.7. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots.$

1.1.8. $1-1+1-1+1-\ldots.$

1.1.9. $\frac{4}{2}+\frac{5}{8}+\frac{6}{24}+\frac{7}{64}+\ldots.$

1.1.10. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\ldots.$

Найти сумму n первых членов ряда S_n и сумму ряда S:

1.1.11. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$

1.1.12. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots.$

Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда:

1.1.13. $\frac{2}{7}+\frac{3}{9}+\ldots+\frac{n+1}{2n+5}+\ldots.$

1.1.14. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots.$

1.1.15. $\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\frac{4}{401}+\ldots.$

1.1.16. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 3}+\frac{3}{\ln 4}+\ldots+\frac{n}{\ln(n+1)}+\ldots.$

1.1.17. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots.$

1.1.18. $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots.$

1.2 Сходимость знакоположительных рядов

Ряд называется *знакоположительным*, если все его члены положительны.

Для знакоположительных числовых рядов имеют место следующие достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

Признак сравнения. Если члены знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.6}$$

не превосходят соответствующих членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{1.7}$$

т.е. $a_n \le b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ то из расходимости ряда (1.6) следует расходимость ряда (1.7).

Этот признак остается в силе, если неравенство $a_n \le b_n$ выполняется не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера n.

Признак сравнения в предельной форме. Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k,$$

то ряды (1.6) и (1.7) сходятся или расходятся одновременно. Для сравнения часто используют ряды:

а) сумма членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots,$$

который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$;

б) обобщенно гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,$$

сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \leq 1$;

в) при $p = 1$ получаем расходящийся ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$ который называется гармоническим.

Признак Даламбера. Если для ряда (1.6) существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ – расходится (при $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным).

Радикальный признак Коши. Если для ряда (1.6) существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд сходится, при $l > 1$ – расходится, при $l = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Интегральный признак Коши. Если члены ряда (1.6) не возрастают, т.е.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$$

и $f(x)$ – такая непрерывная, положительная и невозрастающая функция для $1 < x < \infty,$ что

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n, \ldots,$$

тогда ряд сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

***Пример* 1.2.1.** Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots.$$

Решение. Сравним исходный ряд со сходящимся рядом, составленным из членов сходящейся геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \quad \left(\text{здесь } \; q=\frac{1}{2}\right).$$

Так как $\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\le\dfrac{1}{2^n}$, то на основании признака сравнения, исходный ряд сходится.

***Пример* 1.2.2.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Сравним ряд с расходящимся обобщенным гармоническим рядом $\left(p=\dfrac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

Поскольку $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то на основании признака сравнения данный ряд расходится.

***Пример* 1.2.3.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{(n+1)^3}$.

Решение. Сравним этот ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, воспользовавшись предельной формой признака сравнения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n}{(n+1)^3}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{(n+1)^3}=2,$$

следовательно, данный ряд сходится.

***Пример* 1.2.4.** Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots.$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для этого найдем $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{n\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Так как $l=\frac{1}{2}<1,$ то ряд сходится.

***Пример* 1.2.5.** Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{8}+\left(\frac{5}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{14}\right)^3+\ldots+\left(\frac{4n-3}{3n+5}\right)^n+\ldots.$$

Решение. Общий член данного ряда представляет собой n-ю степень некоторого выражения, поэтому удобнее всего применить радикальный признак Коши. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n-3}{3n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{3n+5}=\frac{4}{3}>1,$$

то ряд расходится.

***Пример* 1.2.6.** Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{e^{-1}}{1}+\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

Решение. Применим интегральный признак Коши, приняв

$$f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

Данная функция непрерывна и монотонно убывает при $x\in[1;\infty)$.

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\cdot\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{-2\sqrt{x}}dx=$$

$$=-2\cdot\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\cdot\lim_{b\to\infty}e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b=-2\cdot\left(0-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}.$$

Несобственный интеграл сходится, поэтому сходится и данный ряд.

***Пример* 1.2.7.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}.$$

Решение. Примем $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$, где $f(x)$ – непрерывная и убывающая функция на $[1;\infty)$.

Применим интегральный признак Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+4}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{xdx}{x^2+4}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big|_1^b\right)=\infty.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Задачи

Исследовать на сходимость ряды:

1.2.1. $\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{13}+\dfrac{9}{17}+\ldots.$

1.2.2. $\dfrac{4}{7}+\dfrac{7}{12}+\dfrac{10}{17}+\ldots.$

1.2.3. $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)!}+\ldots.$

1.2.4. $\dfrac{1}{e}+\dfrac{8}{e^2}+\dfrac{27}{e^3}+\ldots+\dfrac{n^3}{e^n}+\ldots.$

1.2.5. $\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{2}{9}\right)^2+\left(\dfrac{3}{13}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^n+\ldots.$

1.2.6. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{12}+\ldots.$

1.2.7. $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1\cdot 2}{10^2}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\dfrac{n!}{10^n}+\ldots.$

1.2.8. $\dfrac{1}{2\ln^2 2}+\dfrac{1}{3\ln^2 3}+\dfrac{1}{4\ln^2 4}+\ldots.$

1.2.9. $\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^4+\left(\dfrac{3}{4}\right)^9+\ldots+\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ldots.$

1.2.10. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{7}{10}\right)^{\frac{3}{3}}+\ldots+\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{3}}+\ldots.$

1.2.11. $\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\ldots.$

1.2.12. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{5}{\left(\sqrt{3}\right)^3}+\ldots+\frac{2n-1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}+\ldots.$

1.2.13. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots.$

1.2.14. $\frac{3}{8}+\frac{27}{64}+\frac{243}{512}+\ldots+\frac{3^{2n-1}}{8^n}+\ldots.$

1.2.15. $\frac{\operatorname{arctg} 1}{2}+\frac{\operatorname{arctg} 2}{5}+\frac{\operatorname{arctg} 3}{10}+\ldots+\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}+\ldots.$

1.2.16. $\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot 2^6+\left(\frac{9}{10}\right)^3\cdot 3^6+\ldots.$

1.2.17. $1+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{5}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{2n-1}+\ldots.$

1.2.18. $\sin 1+\sin\frac{1}{2^2}+\sin\frac{1}{3^2}+\ldots+\sin\frac{1}{n^2}+\ldots.$

1.2.19. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{9}+\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots+\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots.$

1.2.20. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}+\ldots.$

1.2.21. $\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}+\frac{1}{3\sqrt{\ln 3}}+\frac{1}{4\sqrt{\ln 4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}+\ldots.$

1.2.22. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}+\ldots.$

1.2.23. $\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{3}{28}+\ldots+\frac{n}{n^3+1}+\ldots.$

1.2.24. $l+\frac{\sqrt{l}}{4}+\frac{\sqrt[3]{l}}{9}+\ldots+\frac{\sqrt[n]{l}}{n^2}+\ldots.$

1.2.25. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$

1.2.26. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$.

1.3 Знакопеременные ряды

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным*.

Например:

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+\ldots .$$

Частным случаем знакопеременного ряда является *знакочередующийся*, все члены которого поочередно меняют знак:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots, \tag{1.8}$$

где a_n $(n=1,2,3\ldots)$ – числа одного знака. Такой ряд обычно записывают в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n>0. \tag{1.9}$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (1.9) выполняются два условия:

1) $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots$ (члены ряда по модулю убывают);

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (общий член ряда стремится к нулю при $n\to\infty$),

то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий **достаточный признак сходимости**: если для знакопеременного ряда сходится ряд, составленный из модулей его членов, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Данный признак не является необходимым, т.е. существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то время как ряды, составленные из их модулей, расходятся.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся* (неабсолютно), если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

***Пример* 1.3.1.** Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Решение. Для данного знакочередующегося ряда выполняются условия признака Лейбница:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,$

поэтому ряд сходится. Составим ряд из модулей его членов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Ряд расходится как гармонический. Следовательно, исследуемый ряд сходится условно.

***Пример* 1.3.2.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

Решение. Так как ряд знакочередующийся, применим признак Лейбница.

1) $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\frac{1}{4^2}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$

Ряд сходится. Составим ряд из модулей:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Этот ряд сходится как обобщенный гармонический ($p = 2$). Значит, исследуемый ряд сходится абсолютно.

***Пример* 1.3.3.** Исследовать на сходимость ряд

$$1-1+1-1+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}+\ldots.$$

Решение. Этот знакочередующийся ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю (не выполняется необходимый признак сходимости ряда).

***Пример* 1.3.4.** Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5\sqrt{5}}-\frac{1}{6\sqrt{6}}-\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots.$$

Решение. Данный ряд – знакопеременный. Составим ряд из модулей его членов:

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots.$$

Ряд сходится как обобщенный гармонический $\left(p=\frac{3}{2}\right)$.

Исследуемый ряд сходится абсолютно.

***Пример* 1.3.5.** Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots.$$

Решение. Применим признак Лейбница к данному знакочередующемуся ряду:

1) $\frac{1}{\ln 2}>\frac{1}{\ln 3}>\frac{1}{\ln 4}>\ldots>\frac{1}{\ln(n+1)}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0.$

Оба условия выполнены, ряд сходится. Составим ряд из модулей его членов:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots.$$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1},$$

то ряд расходится.

Итак, исследуемый ряд сходится условно.

Задачи

Исследовать сходимость знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

1.3.1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\ldots+\left(-1\right)^{n}\frac{1}{n^{2}+1}+\ldots.$

1.3.2. $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\ldots.$

1.3.3. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots.$

1.3.4. $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\ldots.$

1.3.5. $\frac{\sin 1}{1^{2}}+\frac{\sin 2}{2^{2}}+\frac{\sin 3}{3^{2}}+\ldots.$

1.3.6. $-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}-\ldots+\left(-1\right)^{\frac{n^{2}+n}{2}}\frac{n}{3^{n}}+\ldots.$

1.3.7. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^{2}}-\ldots.$

1.3.8. $-\frac{1}{4^{2}}+\frac{1}{7^{2}}-\frac{1}{10^{2}}+\ldots.$

1.3.9. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots.$

1.3.10. $\frac{1}{2\ln^{2}2}-\frac{1}{3\ln^{2}3}+\frac{1}{4\ln^{2}4}-\ldots.$

1.3.11. $\frac{3}{1}-\frac{3\cdot 5}{1\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7}-\ldots+\frac{\left(-1\right)^{n-1}3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot\left(2n+1\right)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot\left(3n-2\right)}+\ldots.$

1.3.12. $-\frac{2}{5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 9}-\frac{2\cdot 7\cdot 12}{5\cdot 9\cdot 13}+\ldots+\frac{\left(-1\right)^{n}2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot\left(5n-3\right)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot\left(4n+1\right)}+\ldots.$

1.3.13. $-1+\frac{2^{2}}{2!}-\frac{3^{3}}{3!}+\frac{4^{4}}{4!}-\ldots.$

1.3.14. $-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{9}+\ldots.$

1.3.15. $\frac{\cos 1}{1^3}+\frac{\cos 2}{2^3}+\frac{\cos 3}{3^3}+\ldots$.

1.3.16. $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}-\ldots+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n}+\ldots$.

1.3.17. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$.

1.3.18. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\ldots$.

1.3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$.

1.3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot \sqrt{n}}$.

1.4 Приближенное вычисление суммы ряда

Рассмотрим сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots\ . \qquad (1.10)$$

Его сумма S является пределом последовательности частичных сумм

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

при $n\to\infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

поэтому для достаточно больших n справедливо приближенное равенство

$$S_n\approx S, \qquad (1.11)$$

точность которого возрастает с увеличением n.

Остатком сходящегося ряда (1.10) называется разность между суммой ряда S и его n-й частичной суммой S_n:

$$R=S-S_n. \qquad (1.12)$$

Из равенства (1.12) ясно, что остаток ряда представляет собой сумму сходящегося ряда, полученного из данного отбрасыванием его n первых членов:

$$R = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+m} + \ldots . \qquad (1.13)$$

Абсолютная погрешность при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n равна модулю остатка ряда:

$$\Delta_S = |R_n|.$$

Приведем **теоремы об оценке остатка ряда**.

1. Если все члены сходящегося знакоположительного ряда не превосходят соответствующих членов другого сходящегося знакоположительного ряда, то n-й остаток первого ряда не превосходит n-го остатка второго ряда.

2. Абсолютная величина n-го остатка абсолютно сходящегося знакопеременного ряда не превосходит n-го остатка ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда.

3. Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его n-й остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов.

***Пример* 1.4.1.** Оценить четвертый остаток ряда

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 5^n} + \ldots .$$

Решение. Каждый член этого знакоположительного ряда меньше соответствующего члена геометрической прогрессии

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots$$

со знаменателем $q = \frac{1}{5}$. Следовательно, четвертый остаток R_4 данного ряда меньше четвертого остатка $\bar{R}_4$ ряда, составленного из членов этой прогрессии:

$$R_4 < \bar{R}_4 = \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \ldots = \frac{\frac{1}{5^5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4\cdot 5^4} = \frac{1}{2500} = 0{,}0004.$$

Следовательно, сумма данного ряда отличается от его четвертой частичной суммы S_4 меньше, чем на 0,0004.

Пример **1.4.2.** Сколько членов ряда

$$\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{2^3}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}+\ldots \tag{1.14}$$

следует взять, чтобы вычислить сумму ряда с точностью до 0,01?

Решение. Данный ряд – знакопеременный, так как $\sin n$ в зависимости от значения *n* может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\left|\frac{\sin 1}{2}\right|+\left|\frac{\sin 2}{2^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n}{2^n}\right|+\ldots. \tag{1.15}$$

Так как $|\sin n|\le 1$, то $\left|\frac{\sin n}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$, т.е. члены ряда (1.15) не превосходят соответствующих членов сходящейся геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots. \tag{1.16}$$

Отсюда вытекает, что данный ряд (1.14) сходится абсолютно.

Обозначим остатки рядов (1.15) и (1.16) через R_n и $\overline{R}_n$ соответственно, причем $|R_n|\le\overline{R}_n$. Имеем

$$\overline{R}_n=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}.$$

При $n\ge 7$ $\overline{R}<\frac{1}{128}<0{,}01.$

Таким образом, достаточно взять 7 членов ряда.

Пример **1.4.3.** Вычислить с точностью до 0,001 сумму ряда

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}+\ldots.$$

Решение. Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому

$$|\bar{R}_n|<|u_{n+1}|.$$

Будем вычислять члены ряда до тех пор, пока один из них по абсолютной величине не будет меньше 0,001:

$$|u_1|=1; |u_2|=\frac{1}{2^2}=0,2500; |u_3|=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}\approx 0,0370;$$

$$|u_4|=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}\approx 0,0039; |u_5|=\frac{1}{5^5}=\frac{1}{3125}\approx 0,00032<0,001.$$

Таким образом, требуемая точность будет достигнута, если ограничиться вычислением частичной суммы S_4, т.е.

$$S\approx S_4=1-0,25+0,0370-0,0039=0,7831\approx 0,783.$$

***Пример* 1.4.4.** Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Решение. Знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому найдем член u_n, который по модулю будет меньше 0,01:

$$|u_1|=1; |u_2|=\frac{1}{3^2}\approx 0,111; |u_3|=\frac{1}{5^2}\approx 0,040; |u_4|=\frac{1}{7^2}\approx 0,020;$$

$$|u_5|=\frac{1}{9^2}\approx 0,012; |u_6|=\frac{1}{11^2}\approx 0,0083<0,01.$$

Следовательно,

$$S\approx S_5=1-0,111+0,040-0,020+0,012=0,921\approx 0,92.$$

Задачи

1.4.1. Оценить погрешность, возникшую от замены суммы ряда

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}+\ldots$$

суммой его первых 15 членов.

1.4.2. Оценить погрешность, если сумму ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

заменить суммой его первых 100 членов.

1.4.3. Вычислить с точностью до 0,01 суммы рядов:

а) $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}-\ldots;$

б) $\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{12^2}+\ldots;$

в) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\ldots;$

г) $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}+\ldots;$

д) $\frac{1}{3^2}-\frac{2}{15^2}+\frac{3}{35^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n}{\left(4n^2-1\right)^2}+\ldots;$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1};$

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}.$

1.4.4. Сколько членов нужно взять, чтобы вычислить сумму ряда с точностью до 0,001:

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots;$

б) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 5^2}+\frac{3}{7\cdot 5^3}+\frac{4}{9\cdot 5^4}+\ldots;$

в) $-2+\frac{4}{2^2}-\frac{8}{3^3}+\frac{16}{4^4}-\ldots;$

г) $\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{9^3}+\ldots.$

1.4.5. Оценить погрешность, допущенную при замене суммы ряда суммой его первых 10 членов:

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots;$

б) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots;$

в) $1+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\left(\frac{1}{4}\right)^4+4\left(\frac{1}{4}\right)^6+\ldots.$

1.4.6. Найти сумму ряда

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots.$

2 СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.1 Область сходимости степенного ряда

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \quad (2.1)$$

где a_n, a – действительные числа, называется *степенным рядом* по степеням $x-a,$ а числа a_n – коэффициенты степенного ряда.

При $a=0$ получаем степенной ряд по степеням x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \quad (2.2)$$

Множество всех значений аргумента $x,$ для которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости степенного ряда*.

Радиусом сходимости степенного ряда (2.1) называется такое положительное число $R,$ что ряд сходится при всех $x,$ удовлетворяющих условию $|x-a|<R$ и расходится при $|x-a|>R.$ Интервал $(a-R; a+R),$ во всех точках которого ряд (2.1) сходится, называется *интервалом сходимости*. Для ряда (2.2) интервал сходимости $(-R; R).$

В концевых точках интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (2.3)$$

или

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (2.4)$$

***Пример* 2.1.1.** Найти область сходимости ряда

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Решение. Найдем радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Следовательно, интервал сходимости $(-1;1)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1$ получаем

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots.$$

Этот знакочередующийся ряд сходится условно.

При $x=1$ получаем $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ – расходящийся гармонический ряд.

Итак, область сходимости исходного ряда – $[-1;1)$.

***Пример* 2.1.2.** Найти область сходимости ряда

$$1+\frac{x+3}{2}+\frac{(x+3)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(x+3)^n}{2^n}+\ldots.$$

Решение. Найдем радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}}=2.$$

Интервал сходимости $(a-R;a+R)$ при $a=-3$ есть $(-5;-1)$.

При $x=-5$ получаем

$$1+\frac{-2}{2}+\frac{(-2)^2}{2^2}+\ldots+\frac{(-2)^n}{2^n}+\ldots=1-1+1-\ldots+(-1)^n+\ldots.$$

Этот ряд расходится.

При $x=-1$ получаем $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ – расходящийся ряд.

Итак, область сходимости ряда $(-5;-1)$.

***Пример* 2.1.3.** Найти область сходимости ряда

$$1+x+2x^2+\ldots+n!x^n+\ldots.$$

Решение. Радиус сходимости ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Следовательно, ряд сходится в единственной точке $x=0$.

***Пример* 2.1.4.** Найти область сходимости ряда

$$1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{3^2}+\ldots+\frac{x^{2n}}{3^n}+\ldots.$$

Решение. В данном степенном ряде все нечетные коэффициенты a_{2n+1} равны нулю, поэтому воспользоваться формулами (2.3) и (2.4) нельзя. Так как все члены данного ряда неотрицательны, то воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{2(n+1)}}{3^{n+1}}}{\dfrac{x^{2n}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{3}.$$

Ряд сходится, если $\dfrac{x^2}{3}<1,\ x^2<3,\ |x|<\sqrt{3},$ т.е. интервал сходимости ряда $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

При $x=\pm\sqrt{3}$ имеем $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ – расходящийся ряд.

Итак, область сходимости ряда $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

***Пример* 2.1.5.** Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2}+\frac{x^2}{1{,}5^4}+\frac{x^3}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^9}+\ldots+\frac{x^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}+\ldots.$$

Решение. Найдем радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Интервал сходимости $(-e;e)$.

При $x=-e$ получаем

$$-\frac{e}{2}+\frac{e^2}{1{,}5^4}-\frac{e^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^9}+\ldots+\frac{(-1)^n e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}+\ldots.$$

Для полученного знакочередующегося ряда проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{e^n}=1.$$

Необходимый признак невыполнен, ряд расходится.

При $x=e$ получаем также расходящийся ряд.

Итак, область сходимости $(-e;e)$.

Задачи

Найти область сходимости степенного ряда:

2.1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

2.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$.

2.1.3. $1+2!x+3!x^2+4!x^3+\ldots$.

2.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$.

2.1.5. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$.

2.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$.

2.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

2.1.8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2k}}{k^3\cdot 3^k}$.

2.1.9. $1-4x+4^2x^2-4^3x^3+\ldots$.

2.1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.

2.1.11. $x-\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}-\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\ldots.$

2.1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$

2.1.13. $1+\frac{2x}{1!}+\frac{3x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}+\ldots.$

2.1.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^n}\,x^n.$

2.1.15. $\frac{x-2}{5}+\frac{(x-2)^2}{2\cdot 5^2}+\frac{(x-2)^3}{3\cdot 5^3}+\ldots.$

2.1.16. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+5)^k}{k^4}.$

2.1.17. $1+10x+10^2x^2+10^3x^3+\ldots.$

2.1.18. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k\cdot 7^k}.$

2.1.19. $10^2x+10^4x^3+10^6x^5+\ldots.$

2.1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n+1)e^{n-1}}.$

2.1.21. $1!x+2!x^2+3!x^3+\ldots.$

2.1.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$

2.1.23. $1+2(x-1)+2^2(x-1)^2+\ldots.$

2.1.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}.$

2.1.25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}.$

2.1.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 4^n\cdot\ln n}.$

2.1.27. $\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2x^2+\left(\frac{4}{7}\right)^3x^3+\ldots.$

2.1.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}.$

2.1.29. $1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^6}{10^2}+\frac{x^9}{10^3}+\ldots.$

2.2.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{(4n-3)^2}x^{2n-1}.$

2.1.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n.$

2.1.32. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n}.$

2.1.33. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}.$

2.2 Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена

Всякая функция $f(x)$, определенная в окрестности точки a и бесконечно дифференцируемая в этой точке, может быть разложена в этой окрестности в сходящийся к ней бесконечный степенной ряд Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots \\ \ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots, \tag{2.5}$$

если в этой окрестности выполняется условие для остаточного члена $R_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0, \tag{2.6}$$

где c заключено между a и x.

При $a=0$ получается ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots. \tag{2.7}$$

Если в некотором интервале, содержащем точку a, при любом n выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, где M – положительная постоянная, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ и функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Справедливы следующие разложения:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in(-\infty;\infty); \tag{2.8}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;\infty); \tag{2.9}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;\infty); \tag{2.10}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots,\ x \in (-1;1); \qquad (2.11)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ x \in (-1;1); \qquad (2.12)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ x \in (-1;1); \qquad (2.13)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1`}}{2n+1} + \ldots,\ x \in [-1;1]. \qquad (2.14)$$

Ряд в правой части равенства (2.11) называется *биномиальным*. Для него указан лишь интервал сходимости. Равенство (2.11) имеет также место при $x = \pm 1,$ если $m \geq 0,$ и при $x = +1,$ если $-1 < m < 0.$

***Пример* 2.2.1.** Разложить в ряд Тейлора функцию $\cos x$ при $a = \frac{\pi}{4}.$

Решение. Вычисляем значение данной функции и ее производных при $x = a = \frac{\pi}{4}$:

$$f(x) = \cos x, \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

....

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\qquad\qquad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}\right),$$

…………………………. ………………………….

Подставив эти значения в ряд Тейлора (2.5), получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\ldots+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}+\ldots\right).$$

Исследуем остаточный член $R_n(x)$ ряда Тейлора:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!}=0,$ а $\left|\cos\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ при любом *x*, т.е. полученный ряд Тейлора для $\cos x$ сходится к функции $\cos x$ при любом *x*, т.е.

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}+\ldots\right),\ x\in(-\infty;\infty).$$

***Пример* 2.2.2.** Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=2^x$.

Решение. Найдем значение функции и ее производных при $x=0$:

$f(x)=2^x;$ $\qquad\qquad f(0)=1;$

$f'(x)=2^x\ln 2;$ $\qquad\qquad f'(0)=\ln 2;$

$f''(x)=2^x\ln^2 2;$ $\qquad$ $f''(0)=\ln^2 2;$

$f'''(x)=2^x\ln^3 2;$ $\qquad$ $f'''(0)=\ln^3 2;$

………………… $\qquad$ ……………….

$f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2;$ $\qquad$ $f^{(n)}(0)=\ln^n 2;$

………………… $\qquad$ ……………….

Запишем ряд Маклорена

$$1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\frac{\ln^3 2}{3!}x^3+\ldots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+\ldots.$$

Так как $0<\ln 2<1,$ то при фиксированном x имеет место неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$ при любом n. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,$ и данный ряд сходится к функции 2^x :

$$2^x=1+\frac{\ln 2}{1!}x+\frac{\ln^2 2}{2!}x^2+\frac{\ln^3 2}{3!}x^3+\ldots+\frac{\ln^n 2}{n!}x^n+\ldots,\ x\in(-\infty;\infty).$$

Второй способ разложения $f(x)=2^x$ в ряд Маклорена см. в примере 2.2.11.

Разложение функции в стенной ряд по формулам (2.5) и (2.7) часто связано с громоздкими вычислениями при нахождении производных и исследовании остаточного члена. Рассмотрим некоторые приемы, позволяющие при разложении функции в степенной ряд избежать этих трудностей.

I Метод подстановки. Сущность этого метода поясним на примерах.

***Пример* 2.2.3.** Разложить в степенной ряд функцию e^{-x^2}.

Решение. Положим $t=-x^2;$ тогда $e^{-x^2}=e^t$. Используя формулу (2.8), запишем

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots,-\infty<t<\infty.$$

При $t=-x^2$ получим разложение

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,\ x\in(-\infty;\infty).$$

***Пример* 2.2.4.** Разложить в степенной ряд функцию $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$.

Решение. Положим $t=-x^3$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся формулой (2.11) биномиального ряда при $m=-\dfrac{1}{2}$, получаем разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}}=1-\frac{1\cdot t}{2\cdot 1!}+\frac{1\cdot 3\cdot t^2}{2^2\cdot 2!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot t^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{\left(-1\right)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)t^n}{2^n\cdot n!}+\ldots,$$

справедливое для $-1<t<1$.

Подставив в это разложение $t=-x^3$, получаем разложение, верное для всех значений x из интервала $-1<x<1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=1-\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 1!}+\frac{1\cdot 3\cdot x^6}{2^2\cdot 2!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^9}{2^3\cdot 3!}+\frac{\left(-1\right)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)x^{3n}}{2^n\cdot n!}+\ldots.$$

II Метод, использующий формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\ x\in\left(-1;1\right). \qquad (2.15)$$

***Пример* 2.2.5.** Разложить в ряд Маклорена функцию $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение. Заменив в формуле (2.15) x на $-x^2$, получим

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+\left(-1\right)^n x^{2n}+\ldots,\ x\in\left(-1;1\right).$$

***Пример* 2.2.6.** Разложить в ряд Тейлора по степеням $x-2$ функцию $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}$.

Решение. Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3+x-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{3}\right)}.$$

Заменив x на $-\frac{x-2}{3}$ в разложении (2.15), получим

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{x-2}{3}+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2-\ldots+(-1)^n\left(\frac{x-2}{3}\right)^n+\ldots\right).$$

Это разложение справедливо, когда

$$\left|-\frac{x-2}{3}\right|<1, |x-2|<3, -3<x-2<3, -1<x<5.$$

Итак, область сходимости ряда $(-1;5)$.

***Пример* 2.2.7.** Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\frac{3-x}{1-x^2}$.

Решение. Представим данную дробь в виде

$$\frac{3-x}{1-x^2}=\frac{3-x}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x},$$

где A и B – неопределенные коэффициенты. Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем их числители:

$$3-x=A(1+x)+B(1-x).$$

Полагая $x=1$, находим $A=1$, а при $x=-1$ получаем $B=2$. Следовательно,

$$\frac{3-x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+x}.$$

Теперь, используя разложение (2.15), получим

$$\frac{3-x}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+2(-1)^n\right)x^n,\ x\in(-1;1).$$

III Метод дифференцирования. Если требуется разложить в степенной ряд функцию $f(x)$, а известно разложение первообразной данной функции $F(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$, то можно продифференцировать степенной ряд $F(x)$ и получить искомое разложение $f(x)$. Интервал сходимости при этом сохраняется.

***Пример* 2.2.8.** Разложить в ряд Маклорена функцию $\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Решение. Так как $\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)'=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, то воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1+x^2}$ (см. пример 2.2.5):

$$-\frac{1}{1+x^2}=-1+x^2-x^4+\ldots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n},\ x\in(-1;1).$$

Поэтому

$$\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2nx^{2n-1}=$$

$$=2\left(x-2x^3+3x^5-\ldots+(-1)^{n+1}nx^{2n-1}+\ldots\right),\ x\in(-1;1).$$

IV Метод интегрирования. Допустим, что известно разложение в степенной ряд для производной от функции $f(x)$. Тогда, интегрируя ряд почленно, получим разложение в ряд функции $f(x)$. Интервал сходимости ряда сохраняется.

***Пример* 2.2.9.** Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\operatorname{arctg} x$.

Решение. Так как $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$, то $\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$.

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+t^8-\ldots,\ t\in(-1;1).$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+t^8-\ldots)dt=$$

$$=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\ldots\right)\Bigg|_0^x=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Это разложение выполняется для $x\in(-1;1)$. Однако можно показать, что оно остается в силе и на концах интервала.

Итак,

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1;1].$$

***Пример* 2.2.10.** Разложить по степеням x функцию $y=\ln(1+x)$.

Решение. Воспользуемся тождеством

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots,\ t\in(-1;1).$$

Почленно интегрируем степенной ряд

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x \left(1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots\right)dt=$$

$$=\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^x=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\ x\in(-1;1).$$

Легко проверить, что при $x=1$ ряд сходится, т.е. область сходимости полученного ряда $(-1;1]$.

***Пример* 2.2.11.** Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=2^x$.

Решение. Данная функция в примере 2.2.2 разложена в ряд с использованием непосредственно формулы (2.7). Применим метод подстановки, используя разложение

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots, -\infty < t < \infty.$$

Заменим t на $x\ln 2$. Тогда

$$2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x\ln 2} = 1 + \frac{\ln 2}{1!}x + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n 2}{n!}x^n + \ldots, x \in (-\infty; \infty).$$

***Пример* 2.2.12.** Разложить по степеням x функцию $f(x) = x\ln(1+x^2)$.

Решение. Воспользуемся разложением (2.13):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, x \in (-1; 1).$$

Заменим x на x^2, получим

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots, x \in (-1; 1).$$

Умножив это выражение на x, получим

$$x\ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n} + \ldots, x \in (-1; 1).$$

Заметим, что для разложения функций в степенные ряды используют и другие методы, основанные, например, на операциях умножения и деления рядов, которые здесь не рассматриваются.

Задачи

Разложить в ряд Тейлора функции:

2.2.1. $f(x) = \frac{1}{x}$ при $a = -2$.

2.2.2. $f(x) = \cos x$ при $a = \frac{\pi}{4}$.

2.2.3. $f(x) = x^3 \ln x$ при $a = 1$.

2.2.4. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ при $a = 2$.

2.2.5. $f(x) = e^x$ при $a = -2$.

2.2.6. $f(x) = \sqrt{x}$ при $a = 4$.

Разложить в ряд Маклорена функции:

2.2.7. $f(x) = 10^x$.

2.2.8. $f(x) = \ln(1-x)$.

2.2.9. $f(x) = xe^x$.

2.2.10. $f(x) = e^{-x^2}$.

2.2.11. $f(x) = \sin^2 x$.

2.2.12. $f(x) = \sin 2x$.

2.2.13. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. 2.2.14. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$.

2.2.15. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. 2.2.16. $f(x)=(1+x)e^x$.

2.2.17. $f(x)=\dfrac{x-3}{(x+1)^3}$. 2.2.18. $f(x)=e^{-x}\sin x$.

2.2.19. $f(x)=\ln\left(1+3x+2x^2\right)$.

Разложить в ряд по степеням x следующие функции:

2.2.20. $f(x)=\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg} x$. 2.2.21. $f(x)=x\cdot\ln\dfrac{1}{1-x}$.

2.2.22. $f(x)=\operatorname{ch} x$. 2.2.23. $f(x)=\operatorname{sh} 2x$.

2.2.24. $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg} x+\ln\sqrt{1-x^2}$.

2.3 Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Степенные ряды могут быть использованы для приближенного решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решение не удается найти в элементарных функциях. Решение дифференциального уравнения во многих случаях можно представить в виде степенного ряда, сходящегося в определенном интервале. В таких случаях коэффициенты этого ряда можно найти способом последовательного дифференцирования или способом неопределенных коэффициентов.

2.3.1 Способ последовательного дифференцирования

Этот способ состоит в том, что частное решение $y=y(x)$ при $x=x_0$ дифференциального уравнения любого порядка, разрешенного относительно старшей производной, ищется в виде разложения в степенной ряд Тейлора:

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots .$$

Коэффициенты этого ряда находятся из начальных условий (первые n коэффициентов, если уравнение n-го порядка) путем последовательного дифференцирования исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования всех остальных найденных значений производных. Найденные значения производных подставляют в искомый ряд. Для тех значений x, для которых этот ряд сходится, он представляет решение уравнения.

***Пример* 2.3.1.** Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения

$$y' = 2xy^2, \; y(1) = 1.$$

Решение. Ищем решение данного уравнения в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$:

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{y''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \ldots .$$

Первый коэффициент ряда известен из начального условия $y(1) = 1.$ Подставляя в дифференциальное уравнение $x = 1$ и $y = 1,$ находим $y' = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2.$ Для отыскания y'' дифференцируем обе части уравнения

$$y'' = 2y^2 + 4xyy'.$$

При $x = 1, y = 1, y' = 2$ получаем, что $y'' = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 10.$

Подставив полученные значения производных в степенной ряд, получим приближенное решение дифференциального уравнения в виде частичной суммы ряда

$$y \approx 1 + 2(x - 1) + 5(x - 1)^2 .$$

2.3.2 Способ неопределенных коэффициентов

По этому способу частное решение дифференциального уравнения ищется в виде разложений в степенной ряд с неопределенными коэффициентами:

$$y=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)^2+\ldots+a_n\left(x-x_0\right)^n+\ldots.$$

Неопределенные коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ находят следующим образом. Подставляют ряд y и его производные в дифференциальное уравнение. Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получают бесконечную систему алгебраических уравнений, из которых и находят, при заданных начальных условиях, неопределенные коэффициенты. Данный способ чаще всего применяют при решении линейных дифференциальных уравнений. В своей области сходимости полученный степенной ряд сходится к решению данного дифференциального уравнения.

Пример **2.3.2.** Найти первые пять членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y''=xy'-y+e^x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Решение. Так как начальные условия заданы в точке $x_0=0$, то решение представим в виде ряда

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots.$$

Найдем производные:

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots;$$

$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots.$$

Используя начальные условия, найдем значения двух первых коэффициентов:

$$y(0)=a_0=1,\ y'(0)=a_1=0.$$

Подставим ряды для y, y', y'' и

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

в уравнение

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots=x\cdot\left(2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots\right)-$$

$$-\left(1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots\right)+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\ldots.$$

Приведем подобные члены

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots=x+\left(a_2+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(2a_3+\frac{1}{6}\right)x^3+\left(3a_4+\frac{1}{24}\right)x^4+\ldots.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x*:

$$2a_2=0;\qquad a_2=0;$$

$$6a_3=1;\qquad a_3=\frac{1}{6};$$

$$12a_4=a_2+\frac{1}{2};\qquad a_4=\frac{1}{24};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем искомое решение

$$y=1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\ldots.$$

С помощью степенных рядов можно находить и общее решение дифференциального уравнения.

***Пример* 2.3.3.** Проинтегрировать уравнение $y''-xy=0$.

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots.$$

Дифференцируем ряд

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$

$$y''=2\cdot1\cdot a_2+3\cdot2\cdot a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots.$$

Подставив y и y'' в исходное уравнение, получаем

$$\left(2a_2+3\cdot2\cdot a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots\right)-$$

$$-x\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\right)=0.$$

Соберем члены с одинаковыми степенями *x*:

$$2a_2+\left(3\cdot2a_3-a_0\right)x+\left(4\cdot3a_4-a_1\right)x^2+\ldots$$

$$\ldots+\left(n(n-1)a_n-a_{n-3}\right)x^{n-2}+\ldots=0.$$

Приравниваем к нулю все коэффициенты полученного ряда:

$$a_2=0;\,3\cdot2a_3-a_0=0;\,4\cdot3\cdot a_4-a_1=0;\ldots;\,n(n-1)a_n-a_{n-3}=0;\ldots.$$

Последовательно находим все коэффициенты исходного ряда (a_0 и a_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных):

$$a_2 = 0;\ a_3 = \frac{a_0}{3\cdot 2};\ a_4 = \frac{a_1}{4\cdot 3};\ a_5 = \frac{a_2}{5\cdot 4} = 0;\ a_6 = \frac{a_3}{6\cdot 5} = \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2};\ldots.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{3\cdot 2}x^3 + \frac{a_1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \ldots =$$

$$= a_0\left(1 + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \ldots\right).$$

Исследовать сходимость полученных рядов, вообще говоря, сложно. Поэтому при решении задач этого раздела, исследование на сходимость не обязательно.

Задачи

2.3.1. Найти в виде степенного ряда частный интеграл уравнения $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0,$ удовлетворяющий начальным условиям $y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$

2.3.2. Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд частного интеграла уравнения $y' + xy^2 = 2\cos x,$ удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1.$

2.3.3. Найти разложение в степенной ряд частного интеграла уравнения $y'' + xy^2 = 2\cos x,$ удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд частного интеграла данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям.

2.3.4. $y'' - y\cos x = x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

2.3.5. $y'' - y'\sin x + y = 1,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

2.3.6. $y'' - x^2 y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

2.3.7. $y'' - ye^x = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

2.3.8. Найти общий интеграл уравнения $x^2 y' - y(x+1) = -x^2.$

2.3.9. С помощью степенного ряда проинтегрировать уравнение $(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2.$

2.3.10. С помощью степенного ряда проинтегрировать уравнение $(1+x^2)y'' + 2xy' = 6x^2 + 2.$

Найти с помощью рядов решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям.

2.3.11. $y' = y^2 - x^2,\ y(0) = 0.$

2.3.12. $\cos^2 x \cdot y' + \cos x \cdot y - \sin x = 1,\ y(0) = 1.$

2.3.13. $y'' = 2yy',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

2.3.14. $4x^2 y'' + y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = \dfrac{1}{2}.$

2.3.15. $y' = xe^x + 2y^2,\ y(0) = 0.$

2.3.16. $(1-x)y' + y - x - 1 = 0,\ y(0) = 0.$

2.3.17. $y' + y = (1+x)^2,\ y(0) = 1.$

2.3.18. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},\ y(0) = 0.$

2.3.19. $(1-x)y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

2.4 Приближенные вычисления значений функций

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ с заданной степенью точности ε. Предположим, что функцию можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

в интервале $(a-R;\ a+R)$ и что $x_0 \in (a-R;\ a+R)$. Тогда

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0-a) + a_2(x_0-a)^2 + \ldots + a_n(x_0-a)^n + \ldots.$$

Взяв достаточное число первых членов ряда, получим приближенное равенство

$$f\left(x_0\right) \approx S_n\left(x_0\right) = a_0 + a_1\left(x_0 - a\right) + a_2\left(x_0 - a\right)^2 + \ldots + a_n\left(x_0 - a\right)^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с возрастанием n. Абсолютная погрешность этого равенства

$$\left| f\left(x_0\right) - S_n\left(x_0\right) \right| = \left| r_n\left(x_0\right) \right|,$$

где остаток ряда

$$r_n\left(x_0\right) = a_{n+1}\left(x_0 - a\right)^{n+1} + a_{n+2}\left(x_0 - a\right)^{n+2} + \ldots.$$

Желая вычислить значение функции $f\left(x_0\right)$ с точностью ε, мы должны взять сумму такого числа n первых членов, чтобы

$$\left| f\left(x_0\right) - S_n\left(x_0\right) \right| = \left| r_n\left(x_0\right) \right| < \varepsilon.$$

Методы оценки остатков числовых рядов мы рассмотрели в разделе 1.4. Можно оценивать остаток ряда также с помощью остаточного члена $R_n\left(x\right)$ ряда Тейлора или Маклорена. Если функция разложена в степенной ряд, то это есть ряд Тейлора или Маклорена. В этом случае абсолютная погрешность, т.е. $\left| f\left(x_0\right) - S_n\left(x_0\right) \right|$, равна модулю остаточного члена ряда Тейлора или Маклорена. Таким образом,

$$\left| f\left(x_0\right) - S_n\left(x_0\right) \right| = \left| R_n\left(x_0\right) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x_0 - a\right)^{n+1} \right|,$$

где c содержится между a и x_0. В зависимости от каждого конкретного случая применяется тот или другой метод оценки остатка ряда.

***Пример* 2.4.1.** Вычислить с точностью до 0,001 число e.

Решение. Воспользуемся разложением

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in \left(-\infty; \infty\right).$$

При $x = 1$ имеем

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Возьмем первые $n+1$ членов, получим приближенное равенство

$$e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена ряда Маклорена. Так как $f^{(n+1)}(x)=e^x$, то

$$R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где c между 0 и x.

При $x=1$ имеем

$$R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}1^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!},\ 0<\mathrm{c}<1.$$

Так как $e^c<e<3$, то получим

$$R_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Если $n=5$, то

$$\frac{3}{(5+1)!}=\frac{3}{6!}=\frac{1}{240}>0,001,$$

а если $n=6$, то

$$\frac{3}{(6+1)!}=\frac{3}{7!}=\frac{1}{1680}<0,001.$$

Поэтому для достижения требуемой точности достаточно взять $n=6$. Итак, с точностью до 0,001 имеем

$$e\approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}.$$

Все вычисления будем проводить с одним дополнительным знаком

$$e\approx 2+0,5000+0,1667+0,0417+0,0083+0,0014=2,7181.$$

Следовательно, $e=2,718$ с точностью до 0,001.

***Пример* 2.4.2.** Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение. Используем разложение

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots.$$

Переведем 18° в радианы, получим $x=\frac{\pi}{10}$. Тогда

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!\cdot 10^3} + \frac{\pi^5}{5!\cdot 10^5} - \ldots .$$

Полученный ряд – знакочередующийся, он сходится по признаку Лейбница. На основании оценки остатка знакочередующегося ряда (см. раздел 1.4), остаток ряда по модулю не превосходит модуля первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{\pi^3}{3!\cdot 10^3} > 0{,}0001, \text{ а } \frac{\pi^5}{5!\cdot 10^5} < 0{,}0001,$$

то с точностью до 0,0001 получим

$$\sin 18^\circ = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!\cdot 10^3}.$$

Все вычисления проводим с одним дополнительным знаком. Полагая $\pi = 3{,}14159,$ получим

$$\sin 18^\circ \approx \frac{3{,}14159}{10} - \frac{31{,}00624}{6000} \approx 0{,}31416 - 0{,}00517 = 0{,}30899.$$

Итак, $\sin 18^\circ \approx 0{,}3090.$

Для вычисления корней с любой степенью точности можно использовать биномиальный ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,\ x \in (-1;1).$$

Предположим, что нужно вычислить $\sqrt[n]{A}$. Пусть числа A и n – целые и положительные. Представим $A = a^n + b,$ где $a > 0$ – число, которое подбирается так, чтобы число a^n как можно меньше отличалось от A. Тогда

$$A = a^n + b = a^n\left(1 + \frac{b}{a^n}\right), \text{ где } \left|\frac{b}{a^n}\right| < 1.$$

Итак,

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n\left(1 + \frac{b}{a^n}\right)} = a\cdot\sqrt[n]{1 + \frac{b}{a^n}} = a\left(1 + \frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Выражение $\left(1+\frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ разложим в биномиальный ряд, полагая $x=\frac{b}{a^n}$, $m=\frac{1}{n}$. Сходимость биномиального ряда будет тем лучшее, чем меньше по модулю величина $\frac{b}{a^n}$.

***Пример* 2.4.3.** Вычислить $\sqrt[3]{751}$ с точностью до 0,00001.

Решение. Преобразуем

$$751=9^3+22=9^3\cdot\left(1+\frac{22}{9^3}\right)=9^3\cdot\left(1+\frac{22}{729}\right).$$

Тогда

$$\sqrt[3]{751}=\sqrt[3]{9^3\cdot\left(1+\frac{22}{729}\right)}=9\cdot\sqrt[3]{1+\frac{22}{729}}=9\cdot\left(1+\frac{22}{729}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Разложим $\left(1+\frac{22}{729}\right)^{\frac{1}{3}}$ в биномиальный ряд, полагая в нем $x=\frac{22}{729}$, $m=\frac{1}{3}$,

$$\sqrt[3]{751}=9\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{729}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{22}{729}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{27}\cdot\left(\frac{22}{729}\right)^3-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{81}\cdot\left(\frac{22}{729}\right)^4+\ldots\right).$$

Полученный ряд, начиная со второго члена, является знакочередующимся. Найдем член ряда, по модулю меньший 0,00001.

$$|R_4|<9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{81}\cdot\left(\frac{22}{729}\right)^4<0,00001,$$

поэтому остаток ряда, начиная с четвертого члена, можно отбросить. Итак,

$$\sqrt[3]{751} \approx 9 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{729} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{22}{729} \right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{27} \cdot \left(\frac{22}{729} \right)^3 \right) \approx$$

$$\approx 9 \cdot (1{,}000000 + 0{,}010061 - 0{,}000101 + 0{,}0000001) \approx 9{,}08964.$$

Для вычисления натуральных логарифмов чисел можно использовать формулу

$$\ln(N+h) = \ln N + 2\left(\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h} \right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h} \right)^5 + \ldots \right).$$

Здесь для вычисления $\ln(N+h)$ используется известный $\ln N$.

Оценим верхнюю границу погрешности, возникающей при отбрасывании членов ряда. Возьмем в разложении $\ln(N+h)$ первые n членов и обозначим $x = \dfrac{h}{2N+h}$, тогда

$$\ln(N+h) \approx \ln N + 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} \right).$$

Допущенная ошибка выразится остатком ряда

$$r_n = 2\left(\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \frac{1}{2n+3}x^{2n+3} + \ldots \right).$$

Заменим первый множитель в правой части каждого слагаемого на $\dfrac{1}{2n+1}$ и вынесем общий множитель за скобки, получим

$$r_n < \frac{2}{2n+1}x^{2n+1}\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots\right).$$

В скобках стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(|x| < 1)$, поэтому

$$r_n < \frac{2}{2n+1}x^{2n+1}\frac{1}{1-x^2} = \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)\left(1-x^2\right)}.$$

Мы получили верхнюю границу погрешности, возникающей при отбрасывании членов, а именно, когда оставлено n первых членов.

***Пример* 2.4.4.** Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение. Примем в формуле $N=1, h=1, x=\dfrac{h}{2N+h}=\dfrac{1}{3}$. Тогда

$$\ln 2=\ln 1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}+\ldots\right).$$

Установим, при каком n будет выполнено условие $r_n<10^{-5}$. Проверим при $n=5$:

$$r_5<\frac{2}{11}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{44}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}<0,00001,$$

т.е. достаточно взять первые пять членов ряда для достижения заданной точности. Чтобы сохранить заданную точность, все вычисления будем вести с двумя резервными цифрами, т.е. с семью десятичными знаками:

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{81}+\frac{1}{5\cdot 243}+\frac{1}{7\cdot 2187}+\frac{1}{9\cdot 19683}\right)\approx$$

$$\approx 2\left(0,3333333+0,0123457+0,0008231+0,0000653+0,0000056\right)=$$

$$=0,6931460\approx 0,69315.$$

Задачи

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности значения функций:

2.4.1. $\cos 18^{\circ}$ с точностью до 10^{-5}.

2.4.2. $\cos 1^{\circ}$ с точностью до 10^{-6}.

2.4.3. $\sin 1,2$ с точностью до 10^{-4}.

2.4.4. $\dfrac{1}{e}$ с точностью до 10^{-4}.

2.4.5. $\sin 0,3$ с точностью до 10^{-4}.

2.4.6. $\sqrt[3]{1,006}$ с точностью до 10^{-3}.

2.4.7. $\sqrt[5]{1,25}$ с точностью до 10^{-3}.

2.4.8. $\sqrt{404}$ с точностью до 10^{-3}.

2.4.9. $\sqrt[3]{70}$ с точностью до 10^{-3}.

2.4.10. $\ln 5$ с точностью до 10^{-4}.

2.4.11. $\sqrt{17}$ с точностью до 10^{-4}.

2.4.12. $\operatorname{arctg} 0{,}1$ с точностью до 10^{-4}.

2.4.13. $\operatorname{tg} 5^{\circ}$ с точностью до 10^{-4}.

2.4.14. $\ln 5$ с точностью до 10^{-6}.

2.4.15. Вычислить $\sqrt[3]{1{,}0012}$, ограничившись двумя членами биномиального ряда. Оценить допущенную погрешность.

2.4.16. Вычислить $\sqrt{0{,}993}$, ограничившись двумя членами биномиального ряда. Оценить допущенную погрешность.

2.4.17. Вычислить $\lg 101$.

2.4.18. Вычислить $\operatorname{arctg} 1{,}2$.

Написать биномиальный ряд для $\sqrt[3]{1+x}$ и вычислить:

2.4.19. $\sqrt[3]{0{,}991}$.

2.4.20. $\sqrt[3]{130}$.

2.5 Приближенное вычисление определенных интегралов

Многие определенные интегралы не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона-Лейбница, поскольку ее применение связано с нахождением первообразной, которая не всегда выражается в элементарных функциях или ее нахождение представляет значительные трудности. В некоторых случаях целесообразно приближенное вычисление определенных интегралов с помощью рядов. Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить с любой точностью.

***Пример* 2.5.1.** Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

Решение. Воспользуемся разложением

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,\ x \in (-\infty; \infty).$$

Тогда

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,\ x \in (-\infty; \infty).$$

Интегрируя этот ряд почленно (это возможно, так как пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости данного ряда), получаем

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 18} + \frac{1}{4^5 \cdot 600} - \frac{1}{4^7 \cdot 7 \cdot 5040} + \ldots.$$

Поскольку данный ряд является знакочередующимся, то для приближенного вычисления суммы ряда возьмем первые два члена, так как

$$\frac{1}{4^5 \cdot 600} = \frac{1}{614400} < 0{,}00001.$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 18} = 0{,}250000 - 0{,}000868 \approx 0{,}24913.$$

Пример **2.5.2.** Вычислить с точностью до 0,01 длину дуги полуволны косинусоиды $y = \cos x \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \right)$.

Решение. Длина дуги гладкой кривой $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$ находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

Для данной кривой $y = \cos x$

$$l = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$$ – “неберущийся” интеграл.

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Воспользуемся разложением биномиального ряда, заменив x на $\sin^2 x$ и считая $m=\frac{1}{2}$. Имеем

$$\sqrt{1+\sin^2 x}=1+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\sin^4 x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\sin^6 x+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\sin^8 x+\ldots.$$

Тогда

$$l=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 x}dx=$$

$$=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2^2\cdot 2}\sin^4 x+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 6}\sin^6 x-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 24}\sin^8 x+\ldots\right)dx.$$

При почленном интегрировании полученного ряда воспользуемся формулой

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi d\varphi=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$l=2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}-\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}+\right.$$
$$\left.+\frac{21}{768}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}+\ldots\right).$$

Полученный ряд, начиная со второго члена, является знакочередующимся. Поскольку

$$\frac{21}{768}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\approx 0,0067<0,01,$$

то для вычисления суммы ряда с заданной точностью достаточно взять первые пять членов. Имеем

$$l \approx \pi \cdot (1 + 0,250 - 0,047 + 0,020 - 0,011) = 3,808 \approx 3,81.$$

***Пример* 2.5.3.** Вычислить $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд, полагая, что $x = t^3,\ m = -\frac{1}{2}.$ Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} = \left(1+t^3\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^6 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}t^9 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}t^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 6}t^9 + \ldots,\ (-1 < t < 1).$$

Найдем интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{8}t^6 - \frac{5}{16}t^9 + \ldots\right)dt =$$

$$= \left(t - \frac{1}{8}t^4 + \frac{3}{56}t^7 - \frac{1}{32}t^{10} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{3}{56}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 - \frac{1}{32}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \ldots.$$

Так как $\frac{3}{56}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 < 0,0001,$ то для вычисления суммы данного знакочередующегося ряда с точностью до 0,0001 достаточно взять два первых члена. Имеем

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0,33333 - 0,00154 = 0,33179 \approx 0,3318.$$

Задачи

С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы.

2.5.1. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx.$ 2.5.2. $\int\limits_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx.$

2.5.3. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$ 2.5.4. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

2.5.5. $\int\limits_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$ 2.5.6. $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{x}\cos^2 x\,dx.$

Вычислить с точностью до 10^{-4} интегралы.

2.5.7. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$ 2.5.8. $\int\limits_0^{\frac{1}{6}} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}.$

2.5.9. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}}.$ 2.5.10. $\int\limits_0^{1} e^{-x^2}dx.$

2.5.11. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$ 2.5.12. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 2x}{x}\,dx.$

2.5.13. Вычислить длину эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ с точностью до 0,001.

2.5.14. Вычислить длину эллипса $5x^2+9y^2=45$ с точностью до 0,001.

С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы.

2.5.15. $\int\limits_2^{4} e^{\frac{1}{x}}dx.$ 2.5.16. $\int\limits_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$

2.5.17. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}\,dx.$ 2.5.18. $\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx.$

2.5.19. $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$

2.5.20. $\int\limits_0^{0,5} xe^{-x}dx.$

2.5.21. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{1+x^2}dx.$

2.5.22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx.$

2.5.23. Найти с точностью до 0,01 длину дуги одной полуволны синусоиды $y = \sin x\,(0 \le x \le \pi)$.

2.5.24. Провод, подвешенный на двух столбах, расстояние между которыми $2l = 20$ м, имеет форму параболы. Вычислить с точностью до 1 см длину провода, если стрелка прогиба $h = 40$ см.

3 РЯДЫ ФУРЬЕ

3.1 Разложение функций в ряд Фурье на отрезке длины 2π

Рядом Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + ... + a_n\cos nx + b_n\sin nx + ..., \quad (3.1)$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad (3.2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ (n \in \mathbb{N}); \quad (3.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \ (n \in \mathbb{N}). \quad (3.4)$$

Условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы ее ряд Фурье сходился во всем промежутке разложения, определяются теоремой Дирихле.

Если функция $f(x)$ задается на отрезке $[-\pi; \pi]$, удовлетворяет на этом промежутке **условиям Дирихле**, т. е.

1) непрерывна за исключением только конечного числа точек разрыва I рода;

2) имеет конечное число экстремумов,

то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке $[-\pi;\pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ равна:

- $f(x)$ во всех точках непрерывности данной функции, лежащих внутри интервала $[-\pi;\pi]$;
- $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ во всех точках разрыва;
- $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ на концах промежутка.

Так как члены ряда (3.1) – непрерывные функции с периодом 2π, то исходя из сходимости ряда на отрезке $[-\pi;\pi]$ вытекает его сходимость на всей числовой оси, причем сумма этого ряда является периодической функцией с тем же периодом 2π. Тогда для того, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ сходился именно к этой функции на всей числовой оси, надо и ее считать периодической с периодом 2π.

В дальнейшем предполагаем, что рассматриваемые функции удовлетворяют условиям этой теоремы.

***Пример* 3.1.1.** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию периода 2π, заданную на промежутке $[-\pi;\pi]$ формулами:

$$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ при} -\pi<x<0, \\ -2 \text{ при } 0\le x<\pi. \end{cases}$$

Решение. График функции с ее периодическим продолжением приведен на рисунке 3.1. Данная функция удовлетворяет всем условиям Дирихле и поэтому может быть разложена в ряд Фурье.

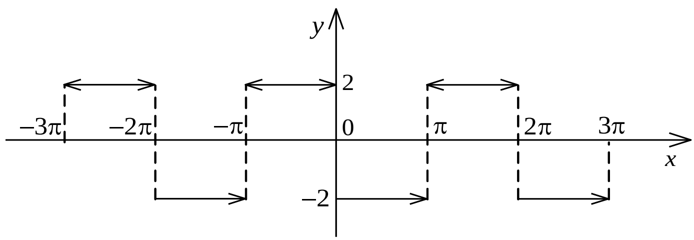

Рисунок 3.1

Находим коэффициенты ряда Фурье по формулам (3.2) – (3.4).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2)dx=\frac{2}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(0+\pi-\pi+0\right)=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2)\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2)\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(-\cos 0+\cos n\pi+\cos n\pi-\cos 0\right)=\frac{4}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\left(-1\right)^n-1\right)=\begin{cases}-\dfrac{8}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечетном,}\\ 0 & \text{при } n \text{ четном.}\end{cases}$$

Здесь учтено, что $\cos n\pi=\left(-1\right)^n$. Подставим полученные значения коэффициентов

$$f(x)=-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=-\frac{8}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках ее непрерывности. В точках разрыва $x=0+2n\pi$ равенство $f(x)=S\left(x\right)$, где $S(x)=-\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$, нарушается (сумма ряда $S\left(0\right)=\dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$, а $f(x)=-2$). В граничных точках $x=\pi+2n\pi$ $S\left(0\right)=\dfrac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\dfrac{-2+2}{2}=0$, а $f(x)$ в данных точках не задана.

***Пример* 3.1.2.** Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, $f(x)=1-x$, $\forall x\in\left(-\pi;\pi\right)$.

Решение. График функции приведен на рисунке 3.2. Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому она разлагается в ряд Фурье.

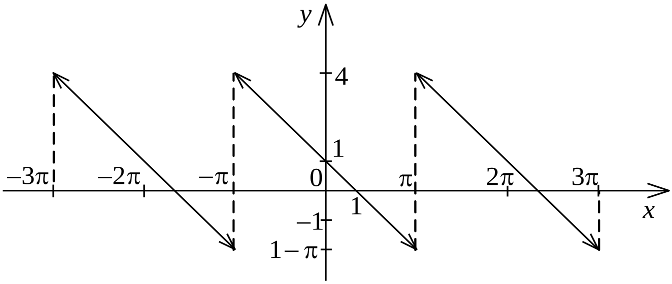

Рисунок 3.2

Найдем коэффициенты ряда Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi + \frac{\pi^2}{2}\right) = 2\,.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x)\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = 1-x & du = -dx \\ dv = \cos nx dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-x}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left(0 - \frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - \cos n\pi) = 0\,.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x)\sin nx dx = \begin{vmatrix} u = 1-x & du = -dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1-x}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left((\pi-1)\cos n\pi - (-\pi-1)\cos n\pi - \frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}(2\pi\cos n\pi - 0) = (-1)^n\frac{2}{n}\,.$$

Следовательно, искомое разложение запишется так:

$$f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}=1-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме концов промежутка $x=\pi+2n\pi$, где

$$S(0)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{(1+\pi)+(1-\pi)}{2}=1.$$

***Пример* 3.1.3.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$ на промежутке $(0;2\pi)$ с периодом 2π.

Решение. График функции изображен на рисунке 3.3.

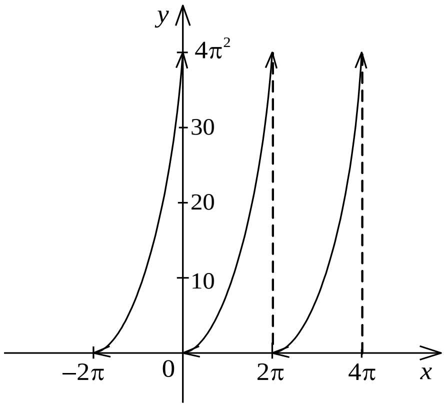

Рисунок 3.3

Данная функция непрерывна в указанном промежутке длины 2π, и поэтому может быть разложена в ряд Фурье. Все формулы для ряда Фурье получены для промежутка $(-\pi;\pi)$. Однако можно рассматривать и любой другой промежуток длиною 2π, т. к. для периодической функции периода $T=2\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx.$$

Поэтому находим коэффициенты на отрезке $[0;2\pi]$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{2x}{n}\sin nx dx \right) = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left(2\pi \cos 2\pi n - 0 - \frac{1}{n}\sin nx \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{2}{n^2\pi}\left(2\pi + 0\right) = \frac{4}{n^2} .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x \cos nx dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(4\pi^2 \cos 2n\pi - 0 - 2\int_0^{2\pi} x \cos nx dx \right) =$$

$$= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{n\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{n}\sin nx dx \right) =$$

$$-\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{n^3\pi}\cos nx \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n} .$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\big(\cos x - \pi \sin x + 0$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\pi \sin 2x + \text{K} + \frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx + \text{K} \big).$$

Поскольку $f(x)=x^2$ непрерывна во всех точках интервала $(0;2\pi)$, то полученный ряд сходится к $f(x)$ для всех x, удовлетворяющих условию $0<x<2\pi$, и к ее периодическому продолжению вне этого интервала. В точках разрыва $x=0+2n\pi$ сумма ряда

$$S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{4\pi^2+0}{2}=2\pi^2.$$

Задачи

В примерах 3.1.1–3.1.12 в указанном промежутке разложить в ряд Фурье следующие периодические функции с периодом 2π.

3.1.1. $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } -\pi\le x<0, \\ 0 \text{ при } 0\le x\le\pi. \end{cases}$

3.1.2. $f(x)=x+1$ при $-\pi\le x\le\pi$.

3.1.3. $f(x)=\begin{cases} -2x \text{ при } -\pi\le x\le 0, \\ 3x \text{ при } 0<x\le\pi. \end{cases}$

3.1.4. $f(x)=\begin{cases} -x \text{ при } -\pi\le x\le 0, \\ 0 \text{ при } 0<x<\pi. \end{cases}$

3.1.5. $f(x)=2x+3$ при $-\pi\le x\le\pi$.

3.1.6. $f(x)=2-3x$ при $-\pi\le x\le\pi$.

3.1.7. $f(x)=x+x^2$ при $-\pi\le x\le\pi$.

3.1.8. $f(x)=\begin{cases} x+\pi \text{ при } -\pi\le x<0, \\ \pi-x \text{ при } 0\le x<\pi. \end{cases}$

3.1.9. $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } -\pi\le x<0, \\ x \text{ при } 0\le x<\pi. \end{cases}$

3.1.10. $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } -\pi\le x<0, \\ \pi-x \text{ при } 0\le x<\pi. \end{cases}$

3.1.11. $f(x)=\begin{cases} 4 \text{ при } 0\le x<\pi, \\ -3 \text{ при } \pi\le x\le 2\pi. \end{cases}$

3.1.12. $f(x)=\pi-x$ при $0\le x\le 2\pi$.

3.2 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Если функция $f(x)$ четная, т. е. $f(-x)=f(x)$, задана на интервале $(-\pi;\pi)$, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad (3.5)$$

$$b_n=0.$$

Таким образом, четная функция разлагается в ряд Фурье по косинусам

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx+\ldots . \qquad (3.6)$$

Если функция $f(x)$ нечетная, т. е. $f(-x)=-f(x)$, задана на интервале $(-\pi;\pi)$, то

$$a_0=0,\ a_n=0,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx . \qquad (3.7)$$

Следовательно, нечетная функция разлагается в ряд Фурье по синусам

$$b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots+b_n\sin nx+\ldots . \qquad (3.8)$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

***Пример* 3.2.1.** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную в промежутке $(-\pi;\pi)$ уравнением $f(x)=x$.

Решение. График функции $f(x)$ приведен на рисунке 3.4. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и может быть разложена в ряд Фурье.

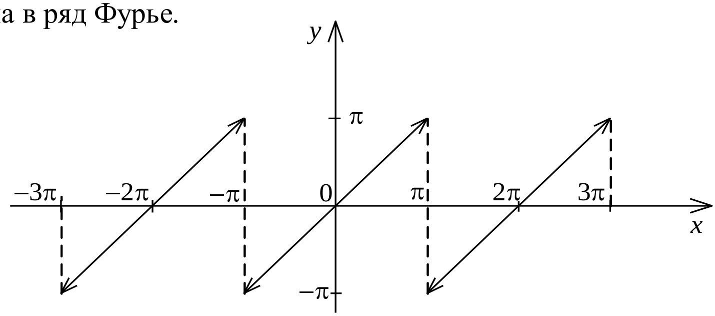

Рисунок 3.4

Данная функция нечетная, поэтому она разлагается в ряд Фурье по синусам:

$a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Следовательно, ряд Фурье данной функции запишется в виде

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots \right).$$

Это равенство имеет место в точках непрерывности функции $f(x)$, в точках разрыва $x = \pi + 2n\pi$ (концы интервалов) сумма ряда Фурье:

$$S(0) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

Пример **3.2.2.** Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π, заданную на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ уравнением $f(x) = |x|$.

Решение. График функции $f(x)$ приведен на рисунке 3.5. Данная функция удовлетворяет условиям Дирихле.

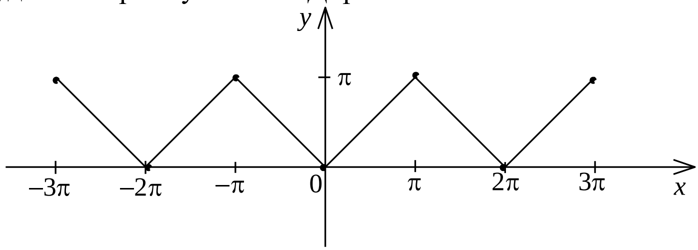

Рисунок 3.5

Функция $f(x) = |x|$ четная, поэтому $b_n = 0$, ряд Фурье будет состоять из косинусов. Для $x \in [0; \pi]$ функция $x = |x|$, поэтому получим

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos nx \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left(\left(-1\right)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}; \\ 0, & \text{если} \quad n - \text{четное}. \end{cases}$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 25x + \ldots \right).$$

Так как данная функция непрерывна на всей числовой оси, то ее ряд Фурье сходится к этой функции при любом x.

Задачи

Разложить в ряд Фурье на промежутке $\left(-\pi; \pi\right)$ следующие периодические функции с периодом 2π.

3.2.1. $f(x) = 2x$.

3.2.2. $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -\pi \le x < 0, \\ 1 \text{ при } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

3.2.3. $f(x) = -\frac{x}{2}$.

3.2.4. $f(x) = \left|\frac{x}{2}\right|$.

3.2.5. $f(x) = x^2$.

3.2.6. $f(x) = x^3$.

3.2.7. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

3.2.8. $f(x) = \cos ax$ (a – не целое число).

3.2.9. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ при } -\pi < x < \pi, \\ 1 \text{ при } x = \pi. \end{cases}$

3.3 Разложение в ряд Фурье функций, заданных на полупериоде

Если функция $f(x)$ задана только на полупериоде $(0;\pi)$, то ее можно продолжить на интервал $(-\pi;0)$. Обычно продолжают данную функцию на $(-\pi;0)$ четным или нечетным образом и соответственно ряд Фурье будет состоять только из косинусов или синусов.

***Пример* 3.3.1.** Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x+1$, заданную на промежутке $(0;\pi)$.

Решение. Продолжим данную функцию нечетным образом на интервал $(-\pi;0)$, т. е. рассмотрим функцию

$$F(x)=\begin{cases} x-1 & \text{при} \quad -\pi<x<0, \\ x+1 & \text{при} \quad 0<x<\pi. \end{cases}$$

График данной функции $F(x)$ с ее периодическим продолжением приведен на рисунке 3.6.

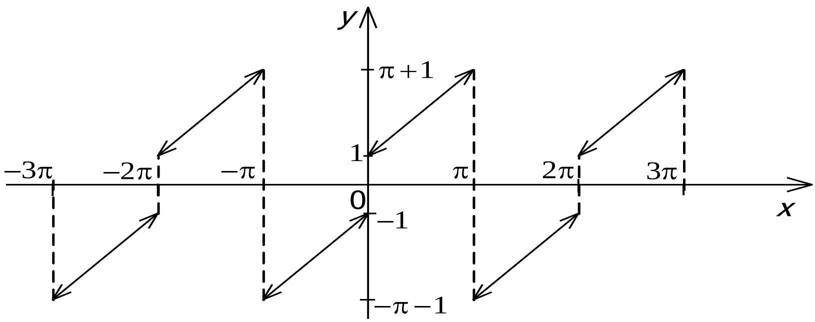

Рисунок 3.6

Функция удовлетворяет всем условиям Дирихле. Так как функция нечетная, то $a_0=0$, $a_n=0$ и она разлагается в ряд Фурье по синусам.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\sin nx dx=\left|\begin{matrix} u=x+1 & du=dx \\ dv=\sin nx dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x+1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi+1}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\cos 0+\right.$$

$$+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\Bigg) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}-\frac{\pi+1}{n}(-1)^n\right) = \frac{2}{\pi n}\Big(1-(-1)^n(\pi+1)\Big) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4+2\pi}{\pi n}, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}; \\ -\dfrac{2}{n}, & \text{если} \quad n - \text{четное}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F(x) = \frac{4+2\pi}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right) -$$

$$-2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x + \ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к $F(x)$ во всех точках непрерывности, а в точках разрыва $x = \pi n$, $S(x) = 0$.

***Пример* 3.3.2.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}$, заданную в промежутке $[0; \pi]$.

Решение. Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-\pi; 0]$ четным образом, т. е. рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{x}{4} & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4} & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ с ее периодическим продолжением приведен на рисунке 3.7.

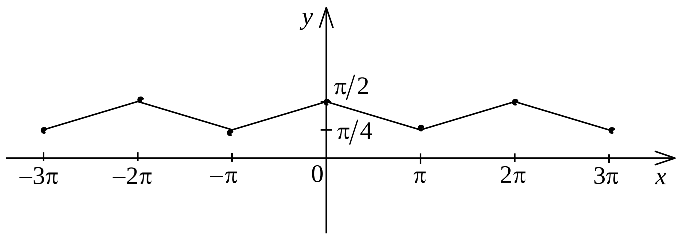

Рисунок 3.7

Полученная функция четная, $b_n = 0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi\,;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4} & du=-\dfrac{1}{4}dx\\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{4n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{2\pi n}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad n-\text{четное;}\\ \dfrac{1}{\pi n^2}, & \text{если} \quad n-\text{нечетное.}\end{cases}$$

Поэтому

$$F(x)=\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x\ldots\right).$$

Так как данная функция непрерывна на всей числовой прямой, то ее ряд Фурье сходится к этой функции при любом значении x.

Задачи

Разложить заданные функции в промежутке $[0;\pi]$.

3.3.1. $f(x)=\pi-2x$ по синусам.

3.3.2. $f(x)=x$ по синусам.

3.3.3. $f(x)=1$ по синусам.

3.3.4. $f(x)=\cos 2x$ по синусам.

3.3.5. $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x \text{ при } \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$

по синусам.

3.3.6. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{2} \text{ при } \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$

по косинусам.

3.3.7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3} \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0 \text{ при } \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3},\\ -\dfrac{\pi}{3} \text{ при } \dfrac{2\pi}{3}\le x<\pi\end{cases}$

а) по косинусам; б) по синусам.

3.3.8. $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2} \text{ при } \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$

по косинусам.

3.3.9. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}$ при $0<x<\pi$

по синусам.

3.4 Разложение в ряд Фурье функций на отрезке длины $2l$

Если периодическая функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l; l]$ с периодом $T = 2l$, то при выполнении на этом отрезке условий теоремы Дирихле она разлагается в ряд Фурье вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots,$$

где коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Если функция $f(x)$ – четная, то она разлагается в ряд Фурье по косинусам:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = 0.$$

В том случае, если $f(x)$ – нечетная, то она разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$a_0 = 0, \ a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

***Пример* 3.4.1.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ периода $T = 2l = 4$ на интервале $(-2; 2)$.

Решение. Функция $f(x)$ нечетная, следовательно, ее ряд Фурье будет содержать только синусы, $a_0 = 0$, $a_n = 0$,

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{-2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\left(-1\right)^{n+1}\frac{4}{n\pi}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\ldots\right).$$

Этот ряд сходится к $f(x)$ для $\forall x\in\left(-2;2\right)$, а в граничных точках интервалов $(-2+4k;2+4k)$, где $k\in\mathbf{Z}$,

$$S\left(x\right)=\frac{f(-2+0)+f\left(2-0\right)}{2}=\frac{-2+2}{2}=0.$$

***Пример* 3.4.2.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|-1$ при $-1\le x\le 1$ с периодом $2l=2$.

Решение. Функция $f(x)$ четная, следовательно, $b_n=0$ и

$$a_0=2\int_0^1\left(x-1\right)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1=2\left(\frac{1}{2}-1\right)=-1;$$

$$a_n=2\int_0^1\left(x-1\right)\cos n\pi x dx=\begin{vmatrix} u=x-1 & du=dx \\ dv=\cos n\pi x dx & v=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\end{vmatrix}=$$

$$=2\left(\frac{x-1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x dx\right)=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\left(-1\right)^n-1\right)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & \text{если } n-\text{нечетное;}\\ 0, & \text{если } n-\text{четное.}\end{cases}$$

Таким образом,

$$f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{1}{9}\cos 3\pi x+\frac{1}{25}\cos 5\pi x+\ldots\right).$$

Рассматриваемая функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому ее ряд Фурье сходится к этой функции при любом x.

***Пример* 3.4.3.** Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=3-x$, заданную в интервале $(0;3]$.

Решение. Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжаем ее на соседний интервал слева $[-3;0)$ нечетным образом. Тогда

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left|\begin{matrix}u=3-x & du=-dx\\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3(3-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3-\frac{3}{n\pi}\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{n\pi}\cos 0-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3\right)=\frac{6}{\pi n}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{3}+\ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x)$ $\forall x\in(0;3]$, в точке $x=0$ ряд сходится к $\dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\dfrac{-3+3}{2}=0$.

Задачи

Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2l$.

3.4.1. $f(x)=|x|-5,\ -2<x<2,\ l=2.$

3.4.2. $f(x)=2x,\ -1<x<1,\ l=1.$

3.4.3. $f(x)=\begin{cases}-2x, & -2<x<0,\\ 2, & x=0,\\ 4, & 0<x<2,\end{cases}\ l=2.$

3.4.4. $f(x)=5x-1,\ -5<x<5,\ l=5.$

3.4.5. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0,\\ 2, & 0\le x<2,\end{cases}\ l=2.$

3.4.6. $f(x)=1+x,\ -1<x<1,\ l=1.$

3.4.7. $f(x)=\begin{cases}-2\,, -4<x<0,\\ -\dfrac{1}{2}, \qquad x=0,\ l=4.\\ 1+x,\ 0<x<4,\end{cases}$ 3.4.9. $f(x)=\begin{cases}3\,, -3<x<0,\\ \dfrac{3}{2}, \qquad x=0,\ l=3.\\ -x,\ 0<x<3,\end{cases}$

3.4.8. $f(x)=4x-3,\ -5<x<5,\ l=5.$ 3.4.10. $f(x)=2x-3,\ -3<x<3,\ l=3.$

4 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1 Сходимость знакоположительных рядов

Исследовать на сходимость ряды:

В-1 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$; 2) $\dfrac{11}{10}+\left(\dfrac{11}{10}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2^5}+\left(\dfrac{11}{10}\right)^3\cdot\dfrac{1}{3^5}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}$.

В-2 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; 3) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\ldots$.

В-3 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{5^n}$; 3) $\dfrac{1}{9\ln 9}+\dfrac{1}{19\ln 19}+\dfrac{1}{29\ln 29}+\ldots$.

В-4 1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3\sqrt{3}}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{9\sqrt{3}}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^3 n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+1}$.

В-5 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^4-9}$; 2) $\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{7}\right)^3+\left(\dfrac{4}{9}\right)^4+\ldots$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{5^n}$.

В-6 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}}$; 2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\ldots$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$.

В-7 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n(2n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$; 3) $\dfrac{3}{2}+1+\left(\dfrac{7}{8}\right)^3+\left(\dfrac{9}{11}\right)^4+\ldots$.

В-8 1) $1+\dfrac{8}{2}+\dfrac{27}{6}+\dfrac{64}{24}+\dfrac{125}{120}+\dfrac{216}{720}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2n+4}$.

В-9 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$; 2) $\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\ldots$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

В-10 1) $\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5n+2}$.

4.2 Сходимость знакопеременных рядов

Выясните, какой из указанных рядов сходится абсолютно, какой – условно, какой расходится:

В-1 1) $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}-\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

В-2 1) $\sqrt{\frac{1}{101}}-\sqrt{\frac{2}{201}}+\sqrt{\frac{3}{301}}-\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

В-3 1) $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{1+(-3)^{2n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{n}}$.

В-4 1) $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3n^2+n}$.

В-5 1) $-1+\frac{2^2}{2!}-\frac{3^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}-\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{5}{n}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$.

В-6 1) $\frac{1}{2\ln^2 2}-\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}-\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

В-7 1) $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{3n-1}$.

В-8 1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$.

В-9 1) $-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-\ldots+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\frac{n}{2^n}+\ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

В-10 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(3n-1)^2}$.

4.3 Область сходимости степенного ряда

Найти область сходимости ряда.

В-1 1) $u_k=\frac{x^k}{5^k(k+1)}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2k}}{k}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k(5^k+1)}$.

В-2 1) $u_k=\frac{x^k}{2^k(k+1)}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k\cdot\sqrt{k+1}}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2k}}{k^2 3^k}$.

В-3 1) $u_k=\frac{3^k x^k}{\sqrt[3]{k+1}}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{\ln(k+1)}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(x-4)^{2k-1}}{2k-1}$.

В-4 1) $u_k=\frac{(k+1)^2 x^k}{2^k}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k^2+1}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k^2}}{k!}x^k$.

В-5 1) $u_k=\frac{(k+2)x^k}{(k+3)3^k}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}k^k x^k$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}k^3(x-4)^k$.

В-6 1) $u_k=\frac{(k+1)}{3^k}x^k$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3k}}{k(2^k+1)}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}x^k$.

В-7 1) $u_k=\frac{k^2}{k+1}x^k$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k^k}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-5)^k}{(k+4)\ln(k+4)}$.

В-8 1) $u_k=\frac{k}{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^k$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{(2k+1)3^k}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^5 x^{2k}}{2k+1}$.

В-9 1) $u_k=\frac{x^k}{3^k(k+1)}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2(x-3)^k}{(k^4+1)^2}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k(x+1)^{2k}}{k}$.

В-10 1) $u_k=\frac{7^k}{\sqrt{k+1}}x^k$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2k+1}}{3k+8}$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty}k!x^k$.

4.4 Ряды Тейлора и Маклорена

Разложить в степенной ряд следующие функции:

В-1 1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$; 2) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; 3) $f(x)=e^{-x^2}$.

В-2 1) $f(x)=\frac{1}{2}x\cdot\operatorname{arctg}x$; 2) $f(x)=\cos^2 2x$; 3) $f(x)=\cos 3x$.

В-3 1) $f(x)=x\ln\sqrt{1+x^2}$; 2) $f(x)=e^{-x^2}+1$; 3) $f(x)=\ln\left|1-x^2\right|$.

В-4 1) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$; 2) $f(x)=2^x\sin 2x$; 3) $f(x)=\operatorname{arctg} 3x$.

В-5 1) $f(x)=x\cos x+\sin x$; 2) $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$; 3) $f(x)=\sin x^2$.

В-6 1) $f(x)=e^x\left(1+x^2\right)$; 2) $f(x)=\arcsin 2x$; 3) $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$.

В-7 1) $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x^5}{1-x}$; 3) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

В-8 1) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$; 3) $f(x)=\cos x^2$.

В-9 1) $f(x)=x^2\cos x^2$; 2) $f(x)=\frac{x}{\left(x^2+x\right)^2}$; 3) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

В-10 1) $f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x}$; 2) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}$; 3) $f(x)=\ln\left|1-3x\right|$.

4.5 Применение рядов к приближенным вычислениям

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с точностью до 0,001:

В-1 1) e^{-2}; 2) $\sqrt[4]{17}$; 3) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

В-2 1) $\sin 10^\circ$; 2) $\sqrt{1,004}$; 3) $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

В-3 1) $\sqrt{e}$; 2) $\sqrt[5]{1,25}$; 3) $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

В-4 1) $\cos 18^\circ$; 2) $\sqrt[3]{30}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\sin x}{x^2} dx$.

В-5 1) $\cos 0{,}4$; 2) $\sqrt[3]{7}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} dx$.

В-6 1) $\operatorname{arctg} 0{,}1$; 2) $\sqrt{404}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^2 \cos 2x dx$.

В-7 1) $\operatorname{tg} 5^\circ$; 2) $\sqrt[5]{37}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx$.

В-8 1) $\ln 1{,}5$; 2) $\sqrt[3]{60}$; 3) $\int\limits_0^{1} \cos\sqrt{x} dx$.

В-9 1) $\sqrt[3]{e}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3} dx$.

В-10 1) $\cos 0{,}4$; 2) $\frac{1}{\sqrt{102}}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

4.6 Самостоятельная работа по рядам Фурье

Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье в данном интервале:

В-1 1) $f(x)=|x|$, $(-4;4)$; 2) $f(x)=\frac{\pi+x}{2}$, $(-\pi;\pi)$.

В-2 1) $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{при} \quad -\pi<x<0, \\ 1 & \text{при} \quad 0\le x<\pi; \end{cases}$ 2) $f(x)=\pi-2x$, $(0;\pi)$. Разложить по косинусам.

В-3 1) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\pi\le x<0, \\ x & \text{при} \quad 0\le x<\pi; \end{cases}$ 2) $f(x)=x-1$, $(-1;1)$.

В-4 1) $f(x)=\frac{x^2}{4}$, $(-\pi;\pi)$; 2) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -2\le x\le 0, \\ x & \text{при} \quad 0<x\le 2. \end{cases}$

В-5 1) $f(x)=1+|x|$, $(-1;1)$; 2) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $(-\pi;\pi)$.

В-6 1) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{при} \quad -\pi<x<0, \\ 1 & \text{при} \quad 0\le x<\pi; \end{cases}$ 2) $f(x)=x^2$, $(0;\pi)$. Разложить по синусам.

В-7 1) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad -1\le x<0,\\ 1 & \text{при} \quad 0\le x<1;\end{cases}$ 2) $f(x)=x$, $(0;\pi)$.
Разложить по косинусам.

В-8 1) $f(x)=\pi+x$, $(-\pi;\pi)$; 2) $f(x)=x^2+1$, $(-2;2)$.

В-9 1) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -\pi\le x\le 0,\\ \sin x & \text{при} \quad 0<x<\pi;\end{cases}$ 2) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$, $(0;\pi)$.
Разложить по синусам.

В-10 1) $f(x)=\dfrac{x}{2}$, $(-\pi;\pi)$; 2) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$, $(0;\pi)$.
Разложить по косинусам.

4.7 Ряды Фурье

В-1 1) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при} \quad -1\le x<0,\\ x & \text{при} \quad 0\le x\le 1;\end{cases}$ 2) $f(x)=3x$ при $-2<x<2$.

В-2 1) $f(x)=\dfrac{x^2}{9}$ при $-3\le x\le 3$; 2) $f(x)=3-x$ при $-2\le x<2$.

В-3 1) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -4\le x<0,\\ x & \text{при} \quad 0\le x<4;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad -1\le x<0,\\ 1 & \text{при} \quad 0\le x<1.\end{cases}$

В-4 1) $f(x)=x^2$ при $-1<x<1$; 2) $f(x)=1-x$ при $0\le x<1$
по косинусам.

В-5 1) $f(x)=1$ при $0<x<2$
по синусам; 2) $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при} \quad 0\le x<1,\\ x-2 & \text{при} \quad 1\le x<2\end{cases}$
а) по синусам; б) по косинусам.

5 ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

В первом номере каждого варианта разложить функцию в ряд и найти область сходимости ряда, во втором – вычислить значение выражения с точностью до 0,001, в третьем – найти решение дифференциального уравнения с помощью рядов:

В-1 1) $f(x)=xe^{-x}$; 2) $\sin 11^\circ$; 3) $y'-2y=0$; $y(0)=1$.

В-2 1) $f(x)=x\cos x$; 2) $\sqrt[3]{7}$; 3) $y''+4y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

В-3 1) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x}$; 2) $\int\limits_0^1 \cos 2x dx$; 3) $xy'' + y = 0;\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

В-4 1) $f(x)=\dfrac{\ln|1+2x|}{x}$; 2) $\cos 0{,}4$; 3) $y' = y - x^2;\ y(0)=0$.

В-5 1) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$; 2) $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}dx$; 3) $y'\cos x + y\sin x = 1;\ y(0)=-1$.

В-6 1) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$; 2) $\sqrt[5]{30}$; 3) $y' = y^2 + x^3;\ y(0)=\dfrac{1}{2}$.

В-7 1) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $y' + y = x + 1;\ y(0)=1$.

В-8 1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$; 2) $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$; 3) $4x^2y'' + y = 0;\ y(1)=1,\ y'(1)=\dfrac{1}{2}$.

В-9 1) $f(x)=xe^{-x}$; 2) $\ln 1{,}06$; 3) $y'' = 2yy';\ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

В-10 1) $f(x)=x\sqrt{1+x^3}$; 2) $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x}dx$; 3) $y'x\ln x - y = 0;\ y(1)=0$.

ОТВЕТЫ

В ответах для краткости введены следующие обозначения:
с – ряд сходится,
р – ряд расходится,
ас – ряд абсолютно сходится,
ус – ряд условно сходится.

1.1.1. $\dfrac{1}{2n-1}$. 1.1.2. $\dfrac{1}{n(n+1)}$. 1.1.3. $\dfrac{1}{2n}$. 1.1.4. $\dfrac{n}{3n-1}$.

1.1.5. $\dfrac{1}{n(n+3)}$. 1.1.6. $\dfrac{1}{n!}$. 1.1.7. $\dfrac{n}{3^n}$. 1.1.8. $(-1)^{n+1}$.

1.1.9. $\dfrac{n+3}{n\cdot 2^n}$. 1.1.10. $\dfrac{1}{10n+1}$. 1.1.11. $S=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right),\ S=\dfrac{1}{2}$.

1.1.12. $S=1-\dfrac{1}{(n+1)^2},\ S=1$. 1.1.13. нет. 1.1.14. вып.

1.1.15. нет 1.1.16. нет. 1.1.17. вып. 1.1.18. вып.

1.2.1. р.	1.2.2. р.	1.2.3. с.	1.2.4. с.
1.2.5. с.	1.2.6. р.	1.2.7. р.	1.2.8. с.
1.2.9. с.	1.2.10. с.	1.2.11. р.	1.2.12. с.
1.2.13. с.	1.2.14. р.	1.2.15. с.	1.2.16. с.
1.2.17. р.	1.2.18. с.	1.2.19. с.	1.2.20. р.
1.2.21. р.	1.2.22. р.	1.2.23. с.	1.2.24. с.
1.2.25. с.	1.2.26. р.		

1.3.1. ас.	1.3.2. р.	1.3.3. ас.	1.3.4. ус.
1.3.5. ас.	1.3.6. ас.	1.3.7. ас.	1.3.8. ас.
1.3.9. ус.	1.3.10. ас.	1.3.11. ас.	1.3.12. р.
1.3.13. р.	1.3.14. р.	1.3.15. ас.	1.3.16. ас.
1.3.17. ус.	1.3.18. р.	1.3.19. ас.	1.3.20. ас.

1.4.1. 0,0003. 1.4.2. 0,01.
1.4.3. а) 0,89; б) 0,10; в) 0,63; г) 0,83; д) 0,10; е) –0,41; ж) –0,14.
1.4.4. а) 999; б) 3; в) 6; г) 4. 1.4.5. а) $3\cdot 10^{-8}$; б) 0,1; в) $1{,}07\cdot 10^{-11}$.
1.4.6. 1.

2.1.1. $(-3;3]$. 2.1.2. $(-5;5)$. 2.1.3. $\{0\}$. 2.1.4. $\{0\}$. 2.1.5. $[-1;1)$.
2.1.6. $[-9;-7]$. 2.1.7. $[3;5]$. 2.1.8. $\left[-\sqrt{3}+4;\sqrt{3}+4\right]$. 2.1.9. $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.
2.1.10. $[1;3)$. 2.1.11. $(-1;1]$. 2.1.12. $(-1;1]$. 2.1.13. $(-\infty;+\infty)$.
2.1.14. $\{0\}$. 2.1.15. $[-3;7)$. 2.1.16. $[-6;-4]$. 2.1.17. $(-0{,}1;0{,}1)$.
2.1.18. $[-5;9)$. 2.1.19. $(-0{,}1;0{,}1)$. 2.1.20. $(-e;e]$. 2.1.21. $\{0\}$.
2.1.22. $(-\infty;+\infty)$. 2.1.23. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. 2.1.24. $(-\infty;+\infty)$. 2.1.25 $(1;5]$.
2.1.26 $[-4;4)$. 2.1.27 $(-2;2)$. 2.1.28. $[1;3]$. 2.1.29. $\left(-\sqrt[3]{10};\sqrt[3]{10}\right)$.
2.1.30. $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. 2.1.31. $\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$. 2.1.32 $[-1;1)$. 2.1.33 $(1;2]$.

2.2.1. $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1!(x+2)}{2^2\cdot 1!}-\frac{2!(x+2)^2}{2^3\cdot 2!}-\frac{3!(x+2)^3}{2^4\cdot 3!}-\ldots$.

2.2.2. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} - \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} + \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \ldots \right).$

2.2.3. $x^3 \ln x = (x-1) + \dfrac{5}{2}(x-1)^2 + \dfrac{11}{6}(x-1)^3 + \ldots$.

2.2.4. $\dfrac{1}{1-x} = -1 + (x-2) - (x-2)^2 + \ldots$.

2.2.5. $e^x = e^{-2} \cdot \left(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n!} \right).$

2.2.6. $\sqrt{x} = 2\left(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n! \cdot 2^{3n}} \cdot (x-4)^n \right).$

2.2.7. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n \ln^n 10}{n!}$.

2.2.8. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

2.2.9. $x + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{2!} + \ldots$.

2.2.10. $1 - \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \ldots$.

2.2.11. $\dfrac{2x^2}{2!} - \dfrac{2^3 x^4}{4!} + \dfrac{2^5 x^6}{6!} - \ldots$.

2.2.12. $2x - \dfrac{2^3 x^3}{3!} + \dfrac{2^5 x^5}{5!} - \ldots$.

2.2.13. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!}$.

2.2.14. $x - x^4 + x^7 - x^{10} + \ldots$.

2.2.15. $2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots \right).$

2.2.16. $1 + \dfrac{2}{1!}x + \dfrac{3}{2!}x^2 + \dfrac{4}{3!}x^3 + \ldots$.

2.2.17. $-3 + 10x - 21x^2 + 36x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}(n+1)(2n+3)x^n + \ldots$.

2.2.18. $x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{3}{40}x^5+\frac{7}{360}x^6+K$.

2.2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+2^n\right)\frac{x^n}{n}; \quad -\frac{1}{2}<x^2\le\frac{1}{2}$.

2.2.20. $1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+K+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k+1}+K, \quad (|x|<1)$.

2.2.21. $x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+K+\frac{x^{n+1}}{n}+K$.

2.2.22. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad (|x|<+\infty)$.

2.2.23. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad (|x|<+\infty)$.

2.2.24. $\frac{1}{2}x^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)x^6-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)x^8+K$

$K+(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{(-1)^k}{2k}\right)x^{2k}+K, \quad (|x|<1)$.

2.3.1. $y=1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}-\frac{(x-1)^4}{12}+K$.

2.3.2. $y=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+K$.

2.3.3. $y=1+x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+K$.

2.3.4. $y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!+}K$.

2.3.5. $y=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+K$.

2.3.6. $y=1+x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{672}+K$.

2.3.7. $y=2+x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}K$.

2.3.8. $y=x^2\cdot\left(1+1!x+2!x^2+3!x^3+K\right)$.

2.3.9. $y=c_0\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)+(c_1-c_0)x+x^2$.

2.3.10. $y=c_0+c_1x+x^2-c_1\frac{x^3}{3}+c_1\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots\right)$.

2.3.11. $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7-\frac{2}{33\cdot 63}x^{11}+\frac{13}{11\cdot 21\cdot 63\cdot 15}x^{15}-\ldots$.

2.3.12. $y=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\ldots$, $\quad(|x|<\frac{\pi}{2})$.

Замечание. Решение: $y=\sec x$.

2.3.13. $y=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\ldots$, $\quad(|x|<\frac{\pi}{2})$.

Замечание. Решение: $y=\mathrm{tg}x$.

2.3.14. $y=1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}-\frac{5(x-1)^4}{128}+\ldots$.

Замечание. Решение: $y=\sqrt{x}$.

2.3.15. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^4+\ldots$.

2.3.16. $y=x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots$.

2.3.17. $y=1+x^2$.

2.3.18. $y=x^2-\frac{x^4}{1!}+\frac{x^6}{2!}-\frac{x^8}{3!}+\frac{x^{10}}{4!}-\frac{x^{12}}{5!}\ldots$.

2.3.19. $y=1+x-\frac{x^2}{2}+\ldots$.

2.4.1. 0,95106. 2.4.2. 0,999848. 2.4.3. 0,9320.
2.4.4. 0,3679. 2.4.5. 0,2955. 2.4.6. 1,002.
2.4.7. 1,045. 2.4.8. 20,100. 2.4.9. 4,121.
2.4.10. 1,6094. 2.4.11. 4,1230. 2.4.12. 0,0997.
2.4.13. 0,0875. 2.4.14. 1,609438.
2.4.15. $\approx 1{,}0004$. ($\Delta = 1{,}6\cdot 10^{-7}$)
2.4.16. $\approx 0{,}9965$. ($\Delta = 6{,}17\cdot 10^{-6}$)
2.4.17. 2,0043. 2.4.18. 0,87606. 2.4.19. $\approx 0{,}997$.
2.4.20. $\approx 5{,}0658$.

2.5.1. $\approx 0{,}508$. 2.5.2. 0,500. 2.5.3. 0,201.

2.5.4. 0,946. 2.5.5. 0,071. 2.5.6. 0,506.
2.5.7. 0,4926. 2.5.8. 0,1664. 2.5.9. 0,0998.
2.5.10. 0,7468. 2.5.11. 0,4872. 2.5.12. 0,4931.
2.5.13. 25,527. 2.5.14. 16,537. 2.5.15. 2,835.
2.5.16. 8,041. 2.5.17. 0,507. 2.5.18. 1,057.
2.5.19. 0,337. 2.5.20. 0,090. 2.2.21. 0,10.
2.5.22. 0,758. 2.5.23. 3,82. 2.2.24. 20,02.

3.1.1.
$$-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+K\right)+\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-K\right).$$

3.1.2. $1+\frac{2}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-K\right).$

3.1.3. $\frac{5\pi}{4}-\frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+K\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin^2 x}{2}+K\right).$

3.1.4. $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

3.1.5. $3+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$

3.1.6. $2+6\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n}.$

3.1.7. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{2n}\right).$

3.1.8. $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+K\right).$

3.1.9. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+K\right)+$
$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi-2}{1}\sin x-\frac{\pi}{2}\frac{\sin 2x}{x}-\frac{\pi-2}{3}\frac{\sin 3x}{x}-K\right).$

3.1.10. $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3}+K\right)+\left(\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+K\right).$

3.1.11. $\frac{1}{2}+\frac{14}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+K\right).$

3.1.12. $2\left(\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\ldots\right).$

3.2.1. $4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}.$

3.2.2. $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

3.2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin nx}{n}.$

3.2.4. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$

3.2.5. $\dfrac{\pi^2}{3}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos nx}{n^2}.$

3.2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\dfrac{12}{n^3}-\dfrac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$

3.2.7. $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2nx}{2n}.$

3.2.8. $\dfrac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\dfrac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}.$

3.2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin nx}{n}.$

3.3.1. $f(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{n}.$

3.3.2. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).$

3.3.3. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}\left(\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\ldots\right).$

3.3.4. $f(x)=-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{2^2-1}+\dfrac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\dfrac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right).$

3.3.5. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1^2}-\dfrac{\sin 3x}{3^2}+\dfrac{\sin 5x}{5^2}-\ldots\right).$

3.3.6. $f(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{\pi}\left(\cos x-\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}-\ldots\right).$

3.3.7. а) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(6n-5)x}{6n-5}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(6n-1)x}{6n-1}\right);$

б) $f(x)=\sin 2x+\dfrac{1}{2}\sin 4x+\dfrac{1}{8}\sin 8x+\dfrac{1}{5}\sin 10x+\ldots$.

3.3.8. $f(x)=\dfrac{3\pi}{8}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi^2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx$.

3.3.9. $f(x)=\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\ldots$.

3.4.1. $f(x)=-4-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}.$

3.4.2. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin \pi nx.$

3.4.3. $f(x)=3-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi nx}{2}}{n}.$

3.4.4. $f(x)=-1+\dfrac{50}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{\pi nx}{5}.$

3.4.5. $f(x)=1+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}.$

3.4.6. $f(x)=1+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin \pi nx.$

3.4.7.

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{4}}{(2n-1)^2}+\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{4}}{2n-1}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi nx}{2}}{2n}.$$

3.4.8. $f(x)=-3+\dfrac{40}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{\pi nx}{5}.$

3.4.9.

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{(2n-1)^2}-\frac{9}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{3}}{2n-1}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi nx}{3}}{2n}.$$

3.4.10. $f(x)=-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{3}.$

Список литературы

1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

2 Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. школа, 2007. – Ч. 2. – 396 с.

3 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

4 **Гусак, А. А.** Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Изд-во БГУ, 1978. – Т. 2. – 344 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна
ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
СИМОНЕНКО Дмитрий Николаевич

Ряды
Учебно-методическое пособие

Редактор А.А. Павлюченкова
Технический редактор В.Н. Кучерова
Корректор Т.А. Пугач

Подписано в печать 28.01.2016 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 3,82. Тираж 1000 экз.
Зак № . Изд № 64.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель