МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра «Высшая математика»

Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, А. И. ПРОКОПЕНКО,
С. А. ДУДКО

РЯДЫ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

**Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы**

Гомель 2017

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра «Высшая математика»

Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, А. И. ПРОКОПЕНКО,
С. А. ДУДКО

РЯДЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Одобрено методической комиссией
электротехнического факультета
в качестве учебно-методического пособия
по выполнению расчетно-графической работы
курса "Высшая математика"

Гомель 2017

УДК 517.518.4 (075.8)
ББК 22.161.5
З-15

Р е ц е н з е н т – доцент кафедры высшей математики, канд. физ.-мат. наук *Т. И. Васильева* (БелГУТ).

Задорожнюк, Е. А.

З-15 Ряды в примерах и задачах : учеб.-метод. пособие по выполнению расчетно-графической работы курса “Высшая математика” / Е. А. Задорожнюк, А. И. Прокопенко, С. А. Дудко; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2017. – 38 с.
ISBN 978-985-554-647-5

Изложены краткие теоретические сведения, которые необходимы для выполнения расчетно-графической работы по разделу курса высшей математики “Ряды”. Разобрано большое количество типовых примеров. Приведены индивидуальные задания для данной расчетно-графической работы.

Предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 517.518.4 (075.8)
ББК 22.161.5

ISBN 978-985-554-647-5

1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1 Основные понятия

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ – бесконечная числовая последовательность. *Числовым рядом* называется выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1.1)$$

а числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*.

Ряд (1.1) называется *сходящимся*, если его n-я *частичная сумма* $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Число S в этом случае называется *суммой ряда*.

В противном случае ряд (1.1) называется *расходящимся*.

Основные свойства сходящихся числовых рядов

1. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m + \ldots$, то сходится и ряд $u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$, получаемый из данного ряда отбрасыванием m первых членов (m – любое натуральное число).

2. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, сумма которого равна S, то сходится и ряд $cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots$, причем сумма его равна cS.

3. Если сходятся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, суммы которых соответственно равны S и Q, то сходится и ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$, причем его сумма равна $S + Q$.

Необходимый признак сходимости ряда: если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Обратное утверждение не верно, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Достаточный признак расходимости ряда: если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

1.2 Знакоположительные ряды

Ряд называется *знакоположительным*, если все его члены положительны.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

1. Признак сравнения. Если члены знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1.2)$$

не превосходят соответствующих членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (1.3)$$

т.е. $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ то из сходимости ряда (1.3) следует сходимость ряда (1.2), а из расходимости ряда (1.2) следует расходимость ряда (1.3).

Замечание. Этот признак остается в силе, если неравенство $u_n \le v_n$ выполняется не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера n.

2. Признак сравнения в предельной форме. Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n},$$

то ряды (1.2) и (1.3) сходятся или расходятся одновременно.

Для сравнения часто используют ряды:

а) сумма членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots,$$

который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$.

б) *обобщенный гармонический ряд* (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,$$

сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \le 1$.

в) при $p = 1$ получаем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который называется *гармоническим*.

3. Признак Даламбера. Если для ряда (1.2) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

то при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ – расходится (при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным).

4. Радикальный признак Коши. Если для ряда (1.2) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

то при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ – расходится (при $l=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться).

5. Интегральный признак Коши. Пусть члены ряда (1.2) не возрастают, т.е.

$$u_1\ge u_2\ge u_3\ge\ldots\ge u_n\ge\ldots$$

и пусть $f(x)$ – такая непрерывная, положительная и невозрастающая функция для $1\le x<+\infty$, что

$$f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ldots,\ f(n)=u_n,\ldots.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1.2);

2) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд (1.2).

Пример 1.1. Исследовать на сходимость знакоположительный ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+4}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n\cdot n!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{3^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Решение. а) Рассмотрим неравенство $\dfrac{3}{n^2+4}<\dfrac{3}{n^2}$. Оно выполняется для всех натуральных чисел. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится (он является обобщенным гармоническим рядом с $p=2>1$), то по свойству 2 сходящихся числовых рядов сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^2}$. Тогда по признаку сравнения исследуемый ряд сходится.

б) Сравним исследуемый ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, воспользовавшись предельной формой признака сравнения.

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-3n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=1\neq 0,$$

то данный ряд расходится.

в) Воспользуемся признаком Даламбера.

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1}{4^{n+1}\cdot(n+1)!}:\frac{2n+1}{4^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)4^n\cdot n!}{4^{n+1}\cdot(n+1)!(2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4\cdot(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n^2+3n+1}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=0<1,$$

то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

г) Для данного ряда удобнее использовать радикальный признак Коши.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{1}{n+1}}\right)^n=\frac{1}{3}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=\frac{1}{3}e^{-1}=\frac{1}{3e}<1$, то по радикальному признаку Коши ряд сходится.

д) Для данного ряда воспользуемся интегральным признаком Коши. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Она непрерывная, положительная и невозрастающая при $x\in[1;+\infty)$. Так как несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln(x+1))\right)\Big|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln(b+1))-\ln(\ln(1+1))\right)=\infty$$

расходится, то по интегральному признаку Коши расходится и исследуемый ряд.

1.3 Знакопеременные ряды

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным*.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда: если для знакопеременного ряда сходится ряд, составленный из модулей его членов, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Такой знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Частным случаем знакопеременного ряда является *знакочередующийся ряд*, все члены которого поочередно меняют знак:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} u_n, \qquad (1.4)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (1.4) выполняются два условия:

1) $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд сходится.

Сумма его не превосходит первого члена, а остаток ряда $r_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+2} - \ldots)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|r_n\right| \leq u_{n+1}. \qquad (1.5)$$

Пример 1.2. Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+2}{n^2 - 2n + 3}$.

Решение. Так как ряд знакочередующийся, применим признак Лейбница. Проверяем 2 условия:

1) $\dfrac{3}{2} > \dfrac{4}{3} > \dfrac{5}{6} > \dfrac{6}{11} > \ldots$, т.е. члены ряда по модулю убывают;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n^2 - 2n + 3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}}{1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}} = 0$.

Так как выполняются оба условия признака Лейбница, то ряд сходится.

Выясним, сходится он абсолютно или условно. Для этого исследуем ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n^2 - 2n + 3}$.

Применим признак сравнения в предельной форме. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{n+2}{n^2 - 2n + 3}}{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)n}{n^2 - 2n + 3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 - 2n + 3} = 1 \neq 0$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$

расходится (гармонический), то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2-2n+3}$ расходится по предельному признаку сравнения. Значит, исследуемый знакочередующийся ряд сходится условно.

2 СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.1 Область сходимости степенного ряда

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-a\right)^n=a_0+a_1\left(x-a\right)+a_2\left(x-a\right)^2+\ldots+a_n\left(x-a\right)^n+\ldots, \qquad (2.1)$$

где a_n, a – действительные числа, называется *степенным рядом* по степеням $x-a,$ а числа a_n – коэффициентами степенного ряда.

При $a=0$ получаем степенной ряд по степеням x

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots. \qquad (2.2)$$

Множество всех значений аргумента $x,$ для которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости степенного ряда*.

Радиусом сходимости степенного ряда (2.1) называется такое положительное число $R,$ что ряд сходится при всех $x,$ удовлетворяющих условию $\left|x-a\right|<R$ и расходится при $\left|x-a\right|>R.$ *Интервалом сходимости* ряда (2.1) называется интервал $\left(a-R;a+R\right),$ где R – радиус сходимости. Для ряда (2.2) интервал сходимости $\left(-R;R\right).$

В концевых точках интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (2.3)$$

или

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|a_n\right|}}. \qquad (2.4)$$

Замечание 1. Если $R=\infty$, то ряд (2.1) сходится на всей числовой оси; если же $R=0$, то этот ряд сходится в единственной точке $x=a$.

Замечание 2. Если степенной ряд (2.1) содержит не все степени $x-a$, то есть задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

2.2 Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция $f(x)$, определенная в окрестности точки a и бесконечно дифференцируемая в этой точке, может быть разложена в этой окрестности в сходящийся к ней бесконечный степенной *ряд Тейлора*:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots, \qquad (2.5)$$

если в этой окрестности выполняется условие для остаточного члена $R_n(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0, \qquad (2.6)$$

где c заключено между a и x.

При $a=0$ получается *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (2.7)$$

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \quad x\in(-\infty;\infty); \qquad (2.8)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots, \quad x\in(-\infty;\infty); \qquad (2.9)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty); \tag{2.10}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], \text{ если } m \ge 0, \\ (-1; 1], \text{ если } -1 < m < 0, \\ (-1; 1), \text{ если } m \le -1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Ряд (2.11) называется *биномиальным*.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in (-1; 1); \tag{2.12}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \; x \in (-1; 1); \tag{2.13}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \; x \in [-1; 1]. \tag{2.14}$$

3 ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

3.1 Приближенные вычисления значений функций

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ с заданной степенью точности ε. Предположим, что функцию можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

в интервале $(a-R; a+R)$ и что $x_0 \in (a-R; a+R)$. Тогда

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0-a) + a_2(x_0-a)^2 + \ldots + a_n(x_0-a)^n + \ldots.$$

Взяв достаточное число первых членов ряда, получим приближенное равенство

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) = a_0 + a_1(x_0-a) + a_2(x_0-a)^2 + \ldots + a_n(x_0-a)^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с возрастанием n. Абсолютная погрешность этого равенства

$$\left|f\left(x_0\right)-S_n\left(x_0\right)\right|=\left|r_n\left(x_0\right)\right|,$$

где остаток ряда

$$r_n\left(x_0\right)=a_{n+1}\left(x_0-a\right)^{n+1}+a_{n+2}\left(x_0-a\right)^{n+2}+\ldots.$$

Таким образом, ошибку $\left|f\left(x_0\right)-S_n\left(x_0\right)\right|$ можно найти, оценив остаток $r_n\left(x_0\right)$ ряда.

Для знакочередующегося ряда, используя формулу (1.5), получаем, что

$$\left|r_n\left(x_0\right)\right|=\left|u_{n+1}\left(x_0\right)+u_{n+2}\left(x_0\right)+\ldots\right|<\left|u_{n+1}\left(x_0\right)\right|.$$

Для знакопеременного или знакоположительного ряда составляют ряд из модулей членов ряда и для него подбирают положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. В качестве оценки $\left|r_n\left(x_0\right)\right|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Пример 3.1. Разложить функцию $y=\ln\left(1+2x\right)$ в ряд по степеням x, определить область сходимости полученного ряда и вычислить значение функции с точностью до 0,01 при $x=0{,}15$.

Решение. Воспользуемся разложением (2.13):

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

Заменив x на $2x$, получим

$$\ln\left(1+2x\right)=2x-\frac{\left(2x\right)^2}{2}+\frac{\left(2x\right)^3}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(2x\right)^n}{n}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{2^n\cdot x^n}{n}.$$

Находим радиус сходимости полученного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot(n+1)}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, ряд сходится в интервале $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала.

При $x=-\frac{1}{2}$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Он расходится, так как является гармоническим, умноженным на -1.

При $x=\frac{1}{2}$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Это знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, область сходимости исходного ряда $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Вычислим значение функции $y=\ln(1+2x)$ при $x=0{,}15$ с точностью 0,01:

$$\ln(1+2\cdot 0{,}15)=2\cdot 0{,}15-\frac{(2\cdot 0{,}15)^2}{2}+\frac{(2\cdot 0{,}15)^3}{3}-\ldots.$$

Получили знакочередующийся ряд. Он сходится по признаку Лейбница. На основании замечания к признаку Лейбница остаток ряда по модулю не превосходит модуля первого отброшенного члена. Так как $\frac{(2\cdot 0{,}15)^2}{2}>0{,}01$, а $\frac{(2\cdot 0{,}15)^3}{3}<0{,}01$, то с точностью до 0,01 получаем

$$\ln(1+2\cdot 0{,}15)\approx 2\cdot 0{,}15-\frac{(2\cdot 0{,}15)^2}{2}\approx 0{,}3-0{,}045\approx 0{,}26.$$

Пример 3.2. Вычислить $\sqrt[4]{90}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Преобразуем

$$90 = 3^4 + 9 = 3^4\left(1 + \frac{9}{3^4}\right) = 3^4\left(1 + \frac{1}{9}\right).$$

Тогда

$$\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{3^4\left(1 + \frac{1}{9}\right)} = 3 \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{1}{9}} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Разложим $\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$ в биномиальный ряд, полагая в нем $x = \frac{1}{9}$, $m = \frac{1}{4}$:

$$\sqrt[4]{90} = 3\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 2\right)}{3!}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots\right).$$

Полученный ряд, начиная со второго члена, является знакочередующимся, который сходится по признаку Лейбница. Так как $\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2 > 0{,}001$, а $\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 2\right)}{3!}\left(\frac{1}{9}\right)^3 < 0{,}001$, то остаток ряда, начиная с четвертого члена, можно отбросить

$$\sqrt[4]{90} \approx 3\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\right) \approx 3\left(1 + \frac{1}{36} - \frac{1}{864}\right) \approx 3{,}078.$$

3.2 Приближенное вычисление определенных интегралов

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить с любой точностью.

Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример 3.3. Вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Решение. Воспользуемся разложением

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ x \in (-1;1).$$

Подставляем данный ряд в интеграл. Имеем

$$\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \int\limits_0^{0,1} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots}{x}dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,1} (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots)dx = \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \ldots \right)\Bigg|_0^{0,1} =$$

$$= 0,1 - \frac{0,1^2}{4} + \frac{0,1^3}{9} - \frac{0,1^4}{16} + \ldots\ .$$

Полученный ряд – знакочередующийся. Он сходится по признаку Лейбница. На основании оценки остатка знакочередующегося ряда остаток ряда по модулю не превосходит модуля первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{0,1^2}{4} > 0,0001,\ \text{а}\ \frac{0,1^3}{9} < 0,001,$$

то с точностью до 0,001 получим

$$\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx \approx 0,1 - \frac{0,1^2}{4} = 0,0975\,.$$

3.3 Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Способ последовательного дифференцирования

Этот способ состоит в том, что частное решение $y = y(x)$ при $x = x_0$ дифференциального уравнения любого порядка, разрешенного относительно старшей производной, ищется в виде разложения в степенной ряд Тейлора:

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

Коэффициенты этого ряда находятся из начальных условий (первые n коэффициентов, если уравнение n-го порядка) путем последовательного дифференцирования исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования всех остальных найденных значений производных. Найденные значения производных подставляют в искомый ряд. Для тех значений x, для которых этот ряд сходится, он представляет решение уравнения.

Пример 3.4. Методом последовательного дифференцирования найти четыре первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = e^{3x} + 2xy^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Будем искать решение уравнения в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots .$$

Из данного уравнения находим, что $y'(0) = e^{3\cdot 0} + 2\cdot 0\cdot 1^2 = 1.$

Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 3\cdot e^{3x} + 2y^2 + 4xyy',\ y''(0) = 3\cdot e^{3\cdot 0} + 2\cdot 1^2 + 4\cdot 0\cdot 1\cdot 1 = 5;$$

$$y''' = 9e^{3x} + 4yy' + 4yy' + 4x(y')^2 + 4xyy'' =$$

$$= 9e^{3x} + 8yy' + 4x(y')^2 + 4xyy'',$$

$$y'''(0) = 9\cdot e^{3\cdot 0} + 8\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 1^2 + 4\cdot 0\cdot 1\cdot 5 = 17.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд Тейлора, получаем

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{5}{2!}x^2 + \frac{17}{3!}x^3 + \ldots = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{17}{6}x^3 + \ldots .$$

Способ неопределенных коэффициентов

По этому способу частное решение дифференциального уравнения ищется в виде разложения в степенной ряд с неопределенными коэффициентами:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots.$$

Неопределенные коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ находят следующим образом. Дифференцируют данное разложение столько раз, каков порядок уравнения, и подставляют выражения для функции y и ее производных в дифференциальное уравнение. Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получают бесконечную систему алгебраических уравнений, из которых и находят неопределенные коэффициенты при заданных начальных условиях. В своей области сходимости полученный степенной ряд сходится к решению данного дифференциального уравнения.

Пример 3.5. Методом неопределенных коэффициентов найти решение уравнения

$$y'' - xy' + y = 2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Решение. Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \ldots.$$

Тогда

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \ldots,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \ldots.$$

Из начальных условий находим: $a_0 = 1,\ a_1 = 1.$ Подставляем полученные ряды в дифференциальное уравнение:

$$\left(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \ldots\right) -$$

$$-x\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \ldots\right) +$$

$$+\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \ldots\right) = 2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$
\begin{aligned}
x^0 &: \ 2a_2 + a_0 = 2,\\
x^1 &: \ 6a_3 - a_1 + a_1 = 0,\\
x^2 &: \ 12a_4 - 2a_2 + a_2 = 0,\\
x^3 &: \ 20a_5 - 3a_3 + a_3 = 0,\\
x^4 &: \ 30a_6 - 4a_4 + a_4 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Отсюда находим, что $a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = 0,\ a_4 = \dfrac{1}{24},\ a_5 = 0,\ a_6 = \dfrac{1}{240},\ldots$. Искомое решения имеет вид

$$
y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{240} + \ldots.
$$

4 РЯДЫ ФУРЬЕ

Рядом Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-l; l]$ называется ряд вида

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{4.1}
$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\\
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках, определяются следующей теоремой.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет двум условиям:

1) непрерывна за исключением конечного числа точек разрыва I рода;

2) имеет конечное число экстремумов,

то ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-l;l]$ и сумма $S(x)$ этого ряда равна:

- $f(x)$ во всех точках непрерывности данной функции, лежащих внутри отрезка $[-l;l]$;
- $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ во всех точках разрыва;
- $\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$ на концах отрезка.

Так как члены ряда (4.1) – непрерывные функции с периодом $2l$, то исходя из сходимости ряда на отрезке $[-l;l]$ вытекает его сходимость на всей числовой оси, причем сумма этого ряда является периодической функцией с тем же периодом $2l$. Тогда для того, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$ сходился именно к этой функции на всей числовой оси, надо и ее считать периодической с периодом $2l$.

Если функция $f(x)$ четная, то она разлагается в ряд Фурье по косинусам. При этом коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=0. \tag{4.3}$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то она разлагается в ряд Фурье по синусам. Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{4.4}$$

Если периодическая функция $f(x)$ задана на правом полупериоде $(0; l]$, то, продолжив её на левый полупериод $[-l; 0]$ четным образом, получаем разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам. Соответственно, продолжив функцию на левый полупериод $[-l; 0]$ нечетным образом, получаем ряд Фурье этой функции по синусам.

Пример 4.1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на отрезке $[-1; 1]$.

$$f(x)=\begin{cases} 2, & -1\le x<0, \\ 1-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 1. \end{cases}$$

Построить графики функций $f(x)$ и суммы ряда Фурье $S(x)$.

Решение. На рисунке 4.1 изображен график данной функции с ее периодическим продолжением.

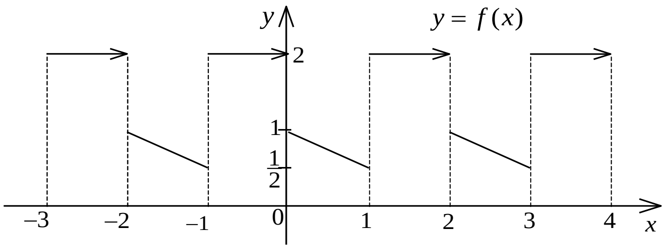

Рисунок 4.1

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и поэтому может быть разложена в ряд Фурье. При $l=1$ ряд Фурье для данной функции будет иметь вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\pi nx+b_n\sin\pi nx\right).$$

При вычислении коэффициентов ряда Фурье используем формулы (4.2).

$$a_0=\int_{-1}^{0}2dx+\int_{0}^{1}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx=2x\Big|_{-1}^{0}+\left(x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}.$$

$$a_n=\int_{-1}^{0}2\cos\pi nx dx+\int_{0}^{1}\left(1-\frac{x}{2}\right)\cos\pi nx dx=\begin{bmatrix}u=1-\dfrac{x}{2} & dv=\cos\pi nx dx\\ du=\dfrac{-dx}{2} & v=\dfrac{\sin\pi nx}{\pi n}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{0}+\left(1-\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Bigg|_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\cdot\left(\frac{-dx}{2}\right)=\frac{2}{\pi n}\big(\sin 0-\sin(-\pi n)\big)+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\left(\frac{\sin\pi n}{2}-\sin 0\right)+\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{-\cos\pi nx}{\pi n}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{-1}{2\pi^2 n^2}(\cos\pi n-\cos 0)=$$

$$=\frac{-1}{2\pi^2 n^2}\big((-1)^n-1\big)=\frac{1-(-1)^n}{2\pi^2 n^2}.$$

$$b_n=\int_{-1}^{0}2\sin\pi nx dx+\int_{0}^{1}\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\pi nx dx=\begin{bmatrix}u=1-\dfrac{x}{2} & dv=\sin\pi nx dx\\ du=\dfrac{-dx}{2} & v=\dfrac{-\cos\pi nx}{\pi n}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{-2}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_{-1}^{0}-\left(1-\frac{x}{2}\right)\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\Bigg|_{0}^{1}-\frac{1}{2\pi n}\int_{0}^{1}\cos\pi nx dx=\frac{-2}{\pi n}\big(\cos 0-\cos(-\pi n)\big)-$$

$$-\frac{1}{\pi n}\left(\frac{\cos\pi n}{2}-\cos 0\right)-\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{-2}{\pi n}\big(1-(-1)^n\big)-\frac{1}{\pi n}\left(\frac{(-1)^n}{2}-1\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 n^2}(\sin\pi n-\sin 0)=\frac{-1}{\pi n}\left(1-\frac{3}{2}(-1)^n\right)=\frac{3\cdot(-1)^n-2}{2\pi n}.$$

Таким образом, получаем ряд

$$f(x)=\frac{11}{8}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n-2}{n}\sin\pi nx.$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В точках разрыва $x=2n$ ($n\in\mathbb{Z}$) сумма полученного ряда равна

$\dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\dfrac{2+1}{2}=1{,}5$. В граничных точках $x=2n+1$ ($n\in\mathbb{Z}$) сумма ряда равна $\dfrac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\dfrac{2+0{,}5}{2}=1{,}25$.

График суммы ряда $S(x)$ приведен на рисунке 4.2.

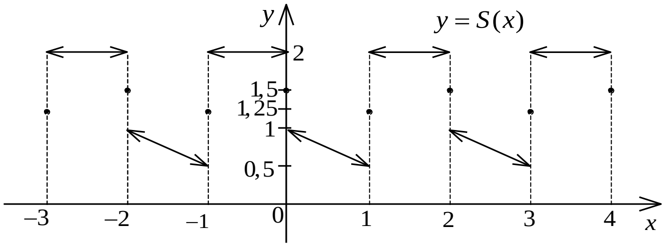

Рисунок 4.2

Пример 4.2. Функция $f(x)=2x+1$ задана на полупериоде $(0;\,2]$. Требуется:

а) продолжив функцию $f(x)$ четным образом на полупериод $[-2;\,0)$, получить ее разложение в ряд Фурье по косинусам;

б) продолжив функцию $f(x)$ нечетным образом на полупериод $[-2;\,0)$, получить ее разложение в ряд Фурье по синусам.

Решение. а) Продолжим функцию $f(x)$ на полупериод $[-2;\,0)$ четным образом, т. е. рассмотрим функцию

$$F(x)=\begin{cases}-2x+1, & -2\le x<0,\\ 2x+1, & 0<x\le 2.\end{cases}$$

График данной функции с ее периодическим продолжением изображен на рисунке 4.3.

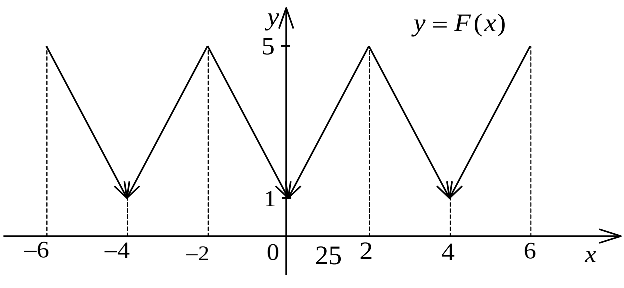

Рисунок 4.3

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Так как функция четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

Коэффициенты ряда вычисляем по формулам (4.3):

$$a_0=\int_0^2(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_0^2=6;$$

$$a_n=\int_0^2(2x+1)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\begin{bmatrix} u=2x+1 & dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx \\ du=2dx & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{bmatrix}=\frac{2}{\pi n}(2x+1)\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2-$$

$$-\frac{4}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{10}{\pi n}\sin\pi n-\frac{2}{\pi n}\sin 0-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_0^2=0-0+$$

$$+\frac{8}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n-\cos 0)=\frac{8}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Таким образом, ряд Фурье по косинусам имеет вид

$$3+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

Полученный ряд Фурье сходится к $F(x)$ во всех точках непрерывности, а в точках разрыва $x=4n$ ($n\in\mathbb{Z}$) сумма ряда равна

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1+1}{2}=1.$$

График суммы ряда приведен на рисунке 4.4.

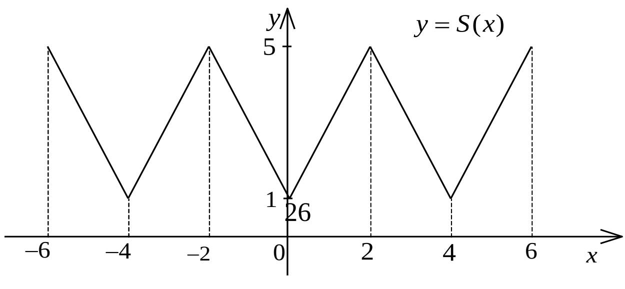

Рисунок 4.4

б) Продолжим функцию $f(x)$ на полупериод $[-2;\,0)$ нечетным образом, т. е. рассмотрим функцию

$$F(x)=\begin{cases}2x-1, & -2\le x<0,\\ 2x+1, & 0<x\le 2.\end{cases}$$

График данной функции с ее периодическим продолжением изображен на рисунке 4.5.

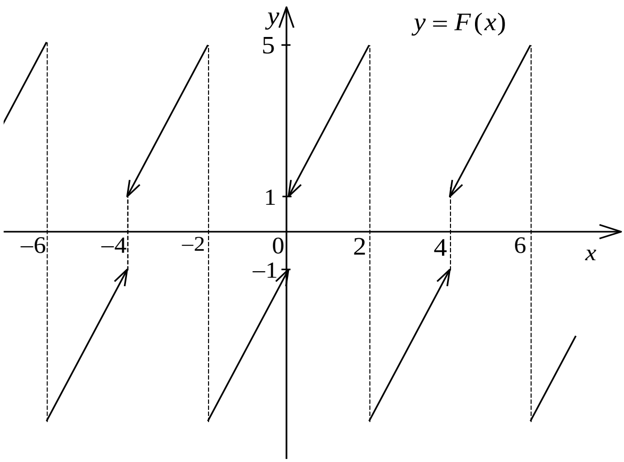

Рисунок 4.5

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Так как функция нечетная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{2}\,.$$

Вычисляем коэффициенты ряда

$$b_n=\int_0^2(2x+1)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\begin{bmatrix} u=2x+1 & dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx \\ du=2dx & v=\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{bmatrix}=\left(-\frac{2(2x+1)}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_0^2+$$

$$+\frac{4}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=-\frac{10}{\pi n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi n}\cos 0+\frac{4}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{10}{\pi n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n}+$$

$$+\frac{8}{\pi^2n^2}\cdot(\sin\pi n-\sin 0)=\frac{2}{\pi n}\left(1-5(-1)^n\right)+\frac{8}{\pi^2n^2}\cdot(0-0)=\frac{2}{\pi n}\left(1-5(-1)^n\right).$$

Таким образом, ряд Фурье по синусам имеет вид

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-5(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

Полученный ряд Фурье сходится к $F(x)$ во всех точках непрерывности, а в точках разрыва $x=2n$ ($n\in\mathbb{Z}$) сумма ряда $S(x)$ равна 0.

График суммы ряда приведен на рисунке 4.6.

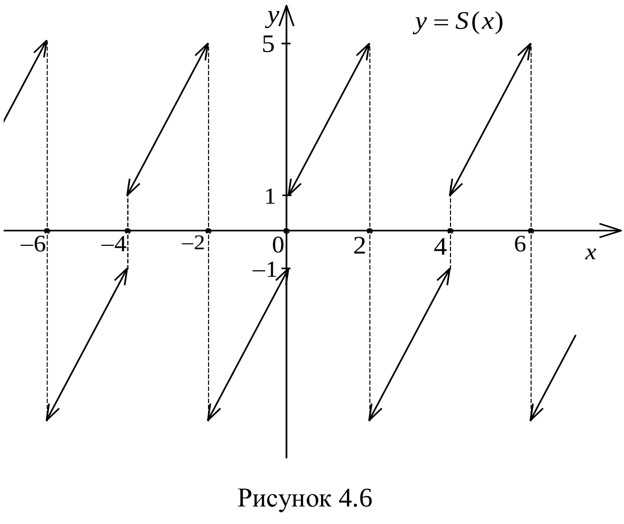

Рисунок 4.6

5 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ “РЯДЫ”

Задача 1

а) Исследовать на сходимость знакоположительный ряд.

б) Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд.

В1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

В2. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$.

В3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{n}}$.

В4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

В5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$.

В6. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^7 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[4]{n}}$.

В7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)}{3^n}$.

В8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n\cdot(n+1)}$.

В9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(3n-2)!}$.

В10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n!\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$.

В11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot(\ln n)^2}$.

В12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

В13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\ln n}$.

В14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n)^2}$.

В15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{12^n}$.

В16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

В17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{9n-1}$.

В18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

В19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^3+4}$.

В20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{7^n}$.

В21. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{n^2}$.

В22. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{3n(3n-1)}$.

В23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n\cdot(3n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{8^n}$.

В24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

В25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$.

В26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{9^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$.

В27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{3n^4+5n-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$.

В28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-3}{n^2-1}$.

В29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-2}{n!\cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[5]{(n+1)^3}}$.

В30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4n}{5n+1}\right)^n$.

Задача 2

Разложить функцию $y=f(x)$ в ряд по степеням x и определить область сходимости полученного ряда. Вычислить значение функции $y=f(x)$ при заданном значении x с точностью ε.

В1. $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x}$; $x=0,3$; $\varepsilon=10^{-3}$.

В2. $f(x)=e^{-x^2}$; $x=0,63$; $\varepsilon=10^{-3}$.

В3. $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{x}$; $x=0,23$; $\varepsilon=10^{-4}$.

В4. $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$; $x=0,27$; $\varepsilon=10^{-4}$.

В5. $f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$; $x=0,18$; $\varepsilon=10^{-3}$.

В6. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $x=36^{\circ}$; $\varepsilon=10^{-4}$.

В7. $f(x)=x\cos x+\sin x$; $x=6^{\circ}$; $\varepsilon=10^{-5}$.

В8. $f(x)=\sin^2 x$; $x=18^{\circ}$; $\varepsilon=10^{-4}$.

В9. $f(x)=\sin 2x+x\cos 2x$; $x=18^{\circ}$; $\varepsilon=10^{-3}$.

В10. $f(x)=\sin 2x$; $x=18^{\circ}$; $\varepsilon=10^{-3}$.

В11. $f(x)=\cos^2 x$; $x=0,54$; $\varepsilon=10^{-4}$.

В12. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$; $x=0,18$; $\varepsilon=10^{-4}$.

В13. $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$; $x=0,17$; $\varepsilon=10^{-3}$.

B14. $f(x)=(x-\operatorname{tg}x)\cos x;\ x=18^\circ;\ \varepsilon=10^{-3}.$

B15. $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x};\ x=0{,}3;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B16. $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2};\ x=0{,}51;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B17. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3};\ x=0{,}45;\ \varepsilon=10^{-3}.$

B18. $f(x)=\dfrac{1}{1+x};\ x=0{,}06;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B19. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ x=0{,}7;\ \varepsilon=10^{-3}.$

B20. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4};\ x=0{,}37;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B21. $f(x)=\sqrt{1+x^2};\ x=0{,}43;\ \varepsilon=10^{-3}.$

B22. $f(x)=\sqrt{1+x^3};\ x=0{,}27;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B23. $f(x)=\sqrt[3]{1+x};\ x=0{,}33;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B24. $f(x)=\sqrt{1+x};\ x=0{,}12;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B25. $f(x)=\dfrac{1}{1+x};\ x=0{,}021;\ \varepsilon=10^{-4}.$

B26. $f(x)=\dfrac{1}{1+4x};\ x=0{,}13;\ \varepsilon=10^{-2}.$

B27. $f(x)=\dfrac{1}{1+2x};\ x=0{,}4;\ \varepsilon=10^{-3}.$

B28. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}};\ x=0{,}3;\ \varepsilon=10^{-3}.$

B29. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ x=0{,}3;\ \varepsilon=10^{-3}.$

B30. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ x=0{,}05;\ \varepsilon=10^{-5}.$

Задача 3

Используя соответствующее разложение, вычислить с указанной степенью точности значение функции:

B1. $3^{-\frac{5}{3}}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B2. $e^{-0,2}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B3. $\sqrt[5]{250}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B4. $\frac{1}{e}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B5. $\sqrt{1,3}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B6. $\sqrt[3]{128}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B7. $\sqrt[3]{80}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B8. $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B9. $\sqrt[5]{34}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B10. $\sqrt[6]{738}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B11. $\cos 10^{\circ}$, $\varepsilon=10^{-5}$.

B12. $\sqrt[3]{30}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B13. $\sqrt{404}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B14. $\sqrt[4]{17}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B15. $\sqrt[10]{1027}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B16. $\sqrt[10]{1080}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B17. $\ln 1,08$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B18. $\sqrt{27}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B19. $\sin 9^{\circ}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B20. $\sqrt[3]{129}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B21. $\sqrt[4]{300}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B22. $\ln 1,2$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B23. $\sqrt{55}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B24. $\mathrm{arctg}\frac{1}{4}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B25. $\sqrt[4]{19}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B26. $\sin 10^{\circ}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B27. $\sin 3^{\circ}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B28. $\cos 50^\circ$, $\varepsilon = 10^{-3}$.
B29. $\sin 27^\circ$, $\varepsilon = 10^{-3}$.
B30. $\sin 0{,}3$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Задача 4

Вычислить приближенное значение интеграла с заданной точностью с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

B1. $\int\limits_0^{1/3} (1+x^4)^{-0{,}5}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

B2. $\int\limits_0^{0{,}25} (1+x^3)^{1/3}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

B3. $\int\limits_0^{0{,}25} (1+x^3)^{0{,}5}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

B4. $\int\limits_0^{0{,}5} (1+x^3)^{-0{,}5}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

B5. $\int\limits_0^{1/3} (1+x^4)^{0{,}5}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

B6. $\int\limits_0^{0{,}5} (25+x^2)^{-0{,}5}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

B7. $\int\limits_0^{1/6} (1+x^2)^{-0{,}2}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

B8. $\int\limits_0^{1} e^{-0{,}5x^2}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

B9. $\int\limits_0^{0{,}25} e^{-x^2}\, dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

B10. $\int_0^1 e^{-0,25x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B11. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B12. $\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B13. $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B14. $\int_0^{0,2} \ln(1+x^3)dx$, $\varepsilon=10^{-7}$.

B15. $\int_0^1 \frac{\sin\frac{x}{4}}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B16. $\int_0^{0,5} x\ln(1+x^2)dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B17. $\int_0^1 \sqrt{x}\cos x dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B18. $\int_0^1 \sin x^3 dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B19. $\int_0^{0,5} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B20. $\int_0^{0,25} \frac{\sin 2x}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

B21. $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B22. $\int_0^1 \sin x^2 dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

B23. $\int_0^1 \cos x^2 dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

В24. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

В25. $\int_0^1 \cos\sqrt{x} dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

В26. $\int_0^1 x^2 \sin x dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

В27. $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

В28. $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3} dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

В29. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $\varepsilon=10^{-4}$.

В30. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

Задача 5

Найти четыре первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

В1. $y'=x^2-y^2,\ y(0)=\frac{1}{2}.$

В2. $y'=2y^2+ye^x,\ y(0)=\frac{1}{3}.$

В3. $y''-x^2y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

В4. $4x^2y''+y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=\frac{1}{2}.$

В5. $(1-x)y''+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

В6. $(1-x)y'+y=x+1,\ y(0)=0.$

В7. $y'=x^2+2y^2,\ y(0)=\frac{1}{5}.$

В8. $y'=x^2+y^2,\ y(0)=\frac{1}{2}.$

В9. $y'=x^3+y^2,\ y(0)=1.$

В10. $y'=2\cos x-xy^2,\ y(0)=1.$

В11. $y'=x+y,\ y(0)=1.$

В12. $y'-xy=e^y,\ y(0)=0.$

В13. $y'=x^2y^2-1,\ y(0)=1.$

В14. $y'=x+x^2+y^2,\ y(0)=1.$

В15. $y'=2\cos x-x^2,\ y(0)=1.$

В16. $y'=e^x-y^2,\ y(0)=0.$

В17. $y'=2\cos^2 x-x^2y^2,\ y(0)=1.$

В18. $y'=e^{3x}+2xy^2,\ y(0)=1.$

В19. $y'=x+y+y^2,\ y(0)=1.$

В20. $y'=x^2+y^2,\ y(0)=1.$

В21. $y'=1+x-\frac{y^3}{6},\ y(0)=1.$

В22. $y'-y=e^x,\ y(0)=4.$

В23. $y'=x+e^y,\ y(0)=0.$

В24. $y'-y\cos x=2\cos y,\ y(0)=0.$

В25. $y'=e^{\sin x}+x,\ y(0)=0.$

В26. $y'=-xy+2e^y,\ y(0)=0.$

В27. $y'=xy^2+1,\ y(0)=1.$

В28. $y'=x^2+y^2,\ y(0)=2.$

В29. $y'=\cos x+y^2,\ y(0)=1.$

В30. $y'=x+x^2+y^2,\ y(0)=2.$

Задача 6

Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2\pi$) функцию, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$. Построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$.

B1. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & -\pi\le x\le 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 1-4x, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B3. $f(x)=\begin{cases} -x+\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B4. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ x+2, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B5. $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B6. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 4-2x, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B7. $f(x)=\begin{cases} x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B8. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 3-x, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B9. $f(x)=\begin{cases} 6x-2, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B10. $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B11. $f(x)=\begin{cases} 3-2x, & -\pi\le x\le 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B12. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 3x-1, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B13. $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{4}, & -\pi\le x\le 0,\\ 2, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B14. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B15. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B16. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ x-1, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B17. $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & -\pi\le x\le 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

B18. $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{x}{2}+1, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$

B20. $f(x)=\begin{cases} 7-3x, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

В21. $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

В22. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 4x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

В23. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

В24. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 4-9x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

В25. $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi\le x\le 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

В26. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

В27. $f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

В28. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{x}{5}-2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

В29. $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

В30. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -\pi\le x<0,\\ 3-8x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

Задача 7

Функция $f(x)$ задана на полупериоде $(0;l]$. Требуется:

а) продолжив функцию $f(x)$ четным образом на полупериод $[-l;0]$, получить ее разложение в ряд Фурье по косинусам;

б) продолжив функцию $f(x)$ нечетным образом на полупериод $[-l;0]$, получить ее разложение в ряд Фурье по синусам.

Построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$.

В1. $f(x)=x-1,\quad l=3.$

В2. $f(x)=x+3,\quad l=2.$

В3. $f(x)=x+\dfrac{1}{2},\quad l=3.$

В4. $f(x)=x-\dfrac{1}{4},\quad l=2.$

В5. $f(x)=x-5,\quad l=2.$

В6 . $f(x)=x+2,\quad l=4.$

В7. $f(x)=x+\dfrac{1}{3},\quad l=4.$

В8. $f(x)=x-\dfrac{1}{5},\quad l=3.$

В9. $f(x)=x-6,\quad l=2.$

В10. $f(x)=x+7,\quad l=4.$

В11. $f(x)=x+\frac{1}{4},\quad l=2.$

В12. $f(x)=x-\frac{1}{6},\quad l=3.$

В13. $f(x)=x-3,\quad l=2.$

В14. $f(x)=x+4,\quad l=4.$

В15. $f(x)=x+\frac{1}{6},\quad l=2.$

В16. $f(x)=x-\frac{1}{3},\quad l=3.$

В17. $f(x)=x-2,\quad l=2.$

В18. $f(x)=x+6,\quad l=4.$

В19. $f(x)=x+\frac{1}{5},\quad l=4.$

В20. $f(x)=x-\frac{1}{2},\quad l=3.$

В21. $f(x)=x-7,\quad l=2.$

В22. $f(x)=x+8,\quad l=2.$

В23. $f(x)=x+\frac{1}{8},\quad l=4.$

В24. $f(x)=x-\frac{1}{7},\quad l=2.$

В25. $f(x)=x-4,\quad l=4.$

В26. $f(x)=x+5,\quad l=2.$

В27. $f(x)=x+\frac{1}{7},\quad l=1.$

В28. $f(x)=x-\frac{1}{9},\quad l=1.$

В29. $f(x)=x-8,\quad l=3.$

В30. $f(x)=x+4,\quad l=2.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

2 Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. школа, 2007. – Ч. 2. – 396 с.

3 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

4 **Гусак, А. А.** Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – Т. 2. – 344 с.

5 **Прокопенко, А. И.** Ряды : учеб.-метод. пособие / А. И. Прокопенко, Е. А. Задорожнюк, Д. Н. Симоненко; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2016. – 83 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна
ДУДКО Сергей Алексеевич

Ряды в примерах и задачах

Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы

Технический редактор В.Н. Кучерова
Корректор Т.А. Пугач

Подписано в печать 28.06.2017 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 2,08. Тираж 400 экз.
Зак № . Изд № 134.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель