МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

Е. Е. ГРИБОВСКАЯ, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
И. П. ШАБАЛИНА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2020

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

Е. Е. ГРИБОВСКАЯ, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,

И. П. ШАБАЛИНА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано учебно-методическим объединением по естественно-научному образованию в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по техническим специальностям

Гомель 2020

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6
Г82

Р е ц е н з е н т ы: д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и геометрии *А. Н. Скиба*, зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики, канд. техн. наук, доцент *Л. Н. Марченко* (ГГУ им. Ф. Скорины)

Грибовская, Е. Е.

Г82 Дифференциальные уравнения : учеб.-метод. пособие / Е. Е. Грибовская, Е. А. Задорожнюк, И. П. Шабалина ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2020. – 121 с.

ISBN 978-985-554-923-0

Содержит индивидуальные задания для расчетно-графической работы по теме «Дифференциальные уравнения». Перед каждой задачей приводятся краткие теоретические сведения. Разобрано большое количество примеров с подробными пояснениями из типового варианта по указанной тематике.

Предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 517. 91(075.8)
ББК 22.161.6

ISBN 978-985-554-923-0

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1 Общие понятия

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производную $y'(x)$:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

здесь F – непрерывно дифференцируемая функция, определенная на некотором множестве.

Уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

где $f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной* y'.

Соотношение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{1.3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые функции двух переменных, называется *дифференциальным уравнением первого порядка в дифференциальной форме.*

Решением дифференциального уравнения первого порядка в области D называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество в этой области.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка (1.2) в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$, такого, что $(x_0, y_0)\in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y=\varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением называется всякое решение дифференциального уравнения, полученное из общего решения при конкретном значении $C = C_0$.

Уравнение $\Phi(x, y, C)=0$ или $\Phi(x, y)=0$ (Φ – непрерывно дифференцируемая функция), определяющее общее или частное решение уравнений (1.1)–(1.3) как неявную функцию, называется *общим* или соответственно *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Задача Коши для дифференциального уравнения состоит в следующем: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0 \text{ или } y(x_0)=y_0.$$

Пример 1.1. Проверить, что функция $y=x(e^x-1)$ есть решение дифференциального уравнения $xy'-(x+1)y=x^2$.

Решение. Имеем:

$$y=x(e^x-1),\ y'=e^x-1+xe^x.$$

Подставив выражения для y и y' в заданное уравнение, получим

$$x(e^x-1+xe^x)-(x+1)x(e^x-1)=x^2$$

или

$$xe^x-x+x^2e^x-x^2e^x+x^2-xe^x+x=x^2,$$

т. е. $x^2\equiv x^2$.

Полученное тождество доказывает, что данная функция является решением дифференциального уравнения.

Пример 1.2. Показать, что функция $y=Cx+3$ есть общее решение дифференциального уравнения $xy'-y+3=0$. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=5$.

Решение. Покажем, что $y=Cx+3$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C. Для этого находим $y'=C$. Подставив выражения для y и y' в дифференциальное уравнение, получим

$$xC-(Cx+3)+3=Cx-Cx-3+3=0.$$

Нетрудно убедиться, что функция $y=Cx+3$ удовлетворяет и второму условию из определения общего решения дифференциального уравнения.

Таким образом, функция $y=Cx+3$ является общим решением данного дифференциального уравнения. Положив $x=1, y=5$, получим $5=C+3$, откуда $C=2$. Итак, искомое частное решение есть $y=2x+3$.

1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Если дифференциальное уравнение (1.2) приводится к виду

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y), \tag{1.4}$$

а дифференциальное уравнение (1.3) к виду

$$P_1(x)P_2(y)dx+Q_1(x)Q_2(y)dy=0, \tag{1.5}$$

то они называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

После разделения переменных они принимают вид

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx \tag{1.6}$$

или соответственно

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy=0. \tag{1.7}$$

Интегрируя обе части этих уравнений, получаем их общие интегралы.

Замечание. Уравнениям (1.4), (1.5) могут удовлетворять решения, потерянные при делении на $f_2(y)\neq 0, Q_1(x)\cdot P_2(y)\neq 0.$ Если эти решения не содержатся в найденном общем интеграле, то они являются особыми решениями.

Пример 1.3. Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $(y^2-1)(x^2-1)\neq 0$, получим

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0.$$

После интегрирования находим:

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\frac{1}{2}\ln|C_1|.$$

Постоянную интегрирования C удобнее записать в виде $\frac{1}{2}\ln|C_1|$, где $C_1\neq 0$. Отсюда $(x^2-1)(y^2-1)=\pm C_1$.

Полагая, что $C=\pm C_1$, получаем общий интеграл уравнения $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

При делении на $(y^2-1)(x^2-1)\neq 0$ мы могли потерять решения $y=\pm 1,\ x=\pm 1,$ но они содержатся в общем интеграле при C = 0. Таким образом, особых решений нет.

Пример 1.4. Решить уравнение $x+xy+yy'(1+x)=0$.

Решение. Выразим y':

$$y'=-\frac{x+xy}{y(1+x)}=-\frac{x(1+y)}{y(1+x)}=-\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1+y}{y}.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными вида (1.4). Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1+y}{y},\ \frac{ydy}{1+y}=-\frac{xdx}{1+x}.$$

Интегрируем: $\int\frac{ydy}{1+y}=-\int\frac{xdx}{1+x}$,

$$\int\frac{(y+1-1)dy}{1+y}=-\int\frac{(x+1-1)dx}{1+x},$$

$$\int\left(1-\frac{1}{1+y}\right)dy=-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx,\ y-\ln|1+y|=-x+\ln|1+x|+C,$$

$$y+x-\ln|1+y|-\ln|1+x|=C.$$

Получили $y+x-\ln|(1+y)\cdot(1+x)|=C$ – общий интеграл уравнения.

При делении на выражение $(1+y)\cdot(1+x)$ мы могли потерять решения.

Легко проверить, что $y=-1$ является особым решением, а $x=-1$ не является.

Пример 1.5. Найти частное решение уравнения $y\operatorname{tg}x\,dx+dy=0$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$.

Решение. После разделения переменных получаем:

$$\operatorname{tg}x\,dx+\frac{dy}{y}=0,\ y\neq 0.$$

Проинтегрируем:

$$\int\operatorname{tg}x\,dx+\int\frac{dy}{y}=\ln|C_1|,$$

$$-\ln|\cos x|+\ln|y|=\ln|C_1|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{\cos x}\right|=\ln|C_1|,\ \ y=C_1\cos x.$$

Мы получили общее решение.

При делении на y мы могли потерять решение $y=0$, но оно содержится в общем, если подставить дополнительное значение $C_1=0$. Таким образом, особых решений данное уравнение не имеет.

Подставив в общее решение начальные данные $x=\frac{\pi}{3}$, $y=4$, получим $4=C_1\cos\frac{\pi}{3}$, откуда $C_1=8$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y=8\cos x$.

Пример 1.6. Решить уравнение $yy'=\frac{1+2x}{y}$.

Решение. Разделим переменные:

$$y^2dy=(1+2x)dx.$$

Проинтегрируем:

$$\int y^2 dy = \int (1+2x)dx + C_1,\ \frac{y^3}{3} = x + x^2 + C_1,$$

Получим общее решение $y = \sqrt[3]{3x + 3x^2 + C}$, здесь $C = 3C_1$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения:

1.2.1. $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$.

1.2.2. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.

1.2.3. $xyy' + x^2 - 1 = 0$.

1.2.4. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$.

1.2.5. $yy' = \dfrac{1+2x}{y}$.

1.2.6. $(1+x)dx + (1-y)xdy = 0$.

Найти частные решения уравнений:

1.2.7. $(1+y^2)dx = xydy;\ \ y(2) = 1$.

1.2.8. $(1+x^2)dy + ydx = 0;\ \ y(1) = 1$.

1.2.9. $y = y'\ln y;\ \ y(2) = 1$.

1.2.10. $ydy = xdx;\ \ y(-2) = 4$.

1.2.11. $3x\sqrt[3]{y}dx + (1-x^2)dy = 0;\ \ y(0) = 0$.

1.2.12. $\sin^2 x \cdot \cos^2 ydx - \cos^2 xdy = 0;\ \ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

1.3 Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется *однородной измерения* n относительно переменных x и y, если при любом $k > 0$ справедливо тождество $f(kx, ky) \equiv k^n f(x, y)$. Если n – целое число, то однородность функции $f(x, y)$ определяется при любом $k \neq 0$.

Уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным* относительно x и y, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y, т. е. $f(kx, ky) = f(x, y)$. Однородное уравнение можно привести к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

а также к виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения n.

Однородное уравнение решается подстановкой $\frac{y}{x} = u$ или $y = ux$.

Пример 1.7. Определить, являются ли данные уравнения однородными:

а) $y' = \frac{x - y}{x + y}$;

б) $y' = \frac{x - y}{1 + y}$.

Решение. а) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$, $f(kx, ky) = \frac{kx - ky}{kx + ky} = \frac{k(x - y)}{k(x + y)} =$

$= \frac{x - y}{x + y} = f(x, y)$. Следовательно, данное уравнение является однородным.

б) $f(kx, ky) = \frac{kx - ky}{1 + ky} = \frac{k(x - y)}{1 + ky} \neq f(x, y)$. Таким образом, данное уравнение не является однородным.

Пример 1.8. Определить, являются ли данные уравнения однородными:

а) $x^2dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$;

б) $x^3dx + (y^3 + 2x^2)dy = 0$.

Решение. а) Уравнение $x^2dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$ является однородным, так как функции $P(x, y) = x^2$ и $Q(x, y) = x^2 + 2xy$ являются однородными измерения 2:

$$P(kx, ky) = k^2x^2 = k^2P(x, y)\,;\; Q(kx, ky) = k^2(x^2 + 2xy) = k^2Q(x, y)\,.$$

б) Уравнение $x^3dx + (y^3 + 2x^2)dy = 0$ не является однородным, так как

$$P(x, y) = x^3,\; P(kx, ky) = k^3x^3 = k^3P(x, y)\,,\; Q(x, y) = y^3 + 2x^2,$$

$$Q(kx, ky) = k^3y^3 + 2k^2x^2 \neq k^3Q(x, y)\,.$$

Пример 1.9. Решить уравнение $y' = \dfrac{x + 2y}{x}$.

Решение. Так как функция $\dfrac{x + 2y}{x}$ является однородной нулевого измерения, то данное дифференциальное уравнение является однородным. Полагая $\dfrac{y}{x} = u,\; y = ux$, получим $y' = u'x + u$. Подставляя значения y и y' в уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u'x + u = \frac{x + 2ux}{x},\; u'x + u = 1 + 2u,\; u'x = 1 + u\,.$$

Решая его, находим

$$\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{x},\quad \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{1+u} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|1+u| = \ln|x| + \ln|C|,\; 1+u = Cx.$$

Заменяя $u = \dfrac{y}{x}$, получим $1 + \dfrac{y}{x} = Cx$, откуда $y = x(Cx - 1)$ – общее решение данного уравнения.

Пример 1.10. Проинтегрировать уравнение

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0\,.$$

Решение. В этом уравнении функции $P(x, y) = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ и $Q(x, y) = -x$ являются однородными первого порядка. Значит, это однородное уравнение. Преобразуем его

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0.$$

Делаем подстановку $y=ux$. Тогда $y'=u'x+u$.

Имеем

$$ux+\sqrt{x^2+u^2x^2}-x(u'x+u)=0,$$

$$ux+\sqrt{x^2\ 1+u^2}-x^2u'-xu=0,$$

$$x\sqrt{1+u^2}-x^2u'=0.$$

Разделив это уравнение на $x^2\neq 0$, получим $u'=\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{x}$.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{1+u^2}}{x},\ \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u+\sqrt{1+u^2}|=\ln|x|+\ln C,\ u+\sqrt{1+u^2}=Cx.$$

Подставив в полученное выражение $u=\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx,$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=Cx,$$

$$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=Cx,$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$$

В процессе решения мы могли потерять решение $x=0$. Проверкой убеждаемся, что $x=0$ также является решением исходного уравнения. Получили следующий ответ: $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$, $x=0$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений:

1.3.1. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

1.3.2. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.

1.3.3. $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

1.3.4. $2x^2dy=(x^2+y^2)dx$.

1.3.5. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

1.3.6. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$.

1.3.7. $yy'=2y-x$.

1.3.8. $y^2-4xy+4x^2y'=0$.

1.3.9. $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y$.

1.3.10. $(xy+y^2)dx-(2x^2+xy)dy=0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1.3.11. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},\ \ y(1)=1$.

1.3.12. $xy'\cos\dfrac{y}{x}=y\cos\dfrac{y}{x}-x,\ \ y(1)=0$.

1.3.13. $(2x-3y)dx+xdy=0,\ \ y(1)=-1.$

1.3.14. $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0,\ \ y(1)=1.$

Замечание. К однородным уравнениям приводятся уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

с помощью замены $\begin{cases} x=x_1+\alpha, \\ y=y_1+\beta. \end{cases}$

Здесь α и β являются решением системы

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ ax+by+c=0. \end{cases}$$

Если $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, то данная система имеет единственное решение.

Если $\Delta=0$, то замена $z=a_1x+b_1y$ преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1.11. Данное уравнение свести к однородному:

$$y'=\frac{2x+3y-5}{x+4y}.$$

Решение. Решая систему $\begin{cases} 2x+3y-5=0; \\ x+4y=0, \end{cases}$ получим $\alpha=4,\ \beta=-1$.

Делаем замену $\begin{cases} x=x_1+4; \\ y=y_1-1, \end{cases}$ $y'=y_1'$.

Получаем однородное уравнение $y_1'=\dfrac{2x_1+3y_1}{x_1+4y_1}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений:

1.3.15. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy.$

1.3.16. $x-y-1+(y-x+2)y'=0.$

1.3.17. $(x+4y)y'=2x+3y-5.$

1.4 Линейные уравнения

Уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

называется *линейным*. Если $Q(x)\neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным* или *линейным с правой частью*. Если же

$Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным* или *линейным уравнением без правой части*. Оно является в этом случае также уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 1.12. а) Уравнение $xy' + y - x^3 = 0$ – линейное неоднородное, так как y и y' входят в него в первой степени и $Q(x) = x^3 \neq 0$;

б) $y' + y^2 + x = 0$ не является линейным уравнением, так как y входит во второй степени;

в) уравнение $yy' + xy = 2e^x$ содержит произведение yy' и поэтому не является линейным;

г) $2y' + xy = 0$ – линейное однородное уравнение.

Линейные неоднородные уравнения можно решать с помощью подстановки $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции, которые определяются в процессе решения уравнения (*метод Бернулли*).

Пример 1.13. Найти общее решение уравнения

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$$

Решение. Решение данного линейного уравнения будем искать в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - 2xuv = 2xe^{x^2}.$$

Группируем второе слагаемое с третьим (или первое с третьим) и выносим общий множитель за скобки.

$$u'v + u(v' - 2xv) = 2xe^{x^2}. \tag{1.8}$$

Одну из функций $u = u(x)$ или $v = v(x)$ (в нашем случае функцию $v = v(x)$) подбираем таким образом, чтобы выражение в скобках в уравнении (1.8) было равно 0. Для этого решаем уравнение с разделяющимися переменными $v' - 2xv = 0$.

Ищем одно из частных решений, когда $C = 0$.

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \ \frac{dv}{dx} = 2xv, \ \frac{dv}{v} = 2xdx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int 2x dx, \ \ln|v| = x^2, \ v = e^{x^2}.$$

Подставляем найденную функцию $v = e^{x^2}$ в уравнение (1.8): $u'e^{x^2} = 2xe^{x^2}$.

Ищем общее решение $u = u(x)$ этого дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} e^{x^2} = 2xe^{x^2}, \ \frac{du}{dx} = 2x, \ du = 2x dx,$$

$$\int du = \int 2x dx, \ u = x^2 + C.$$

Находим общее решение исходного уравнения $y = uv = (x^2 + C)e^{x^2}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения указанных уравнений:

1.4.1. $xy' + 2y = x^2$.

1.4.2. $y' - 7y = 8e^{3x}$.

1.4.3. $y' - \frac{y}{x} = 3x$.

1.4.4. $y' + y = \cos x$.

1.4.5. $(x^3 + y)dx - xdy = 0$.

1.4.6. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$.

1.4.7. $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$.

1.4.8. $y'(x + y^2) = y$.

1.4.9. $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

1.4.10. $xy' - y = x^2 \cos x$.

1.4.11. $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1.4.12. $y'\sin x - y\cos x = 1;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

1.4.13. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x};\ y(0) = 1$.

1.4.14. $y' + x^2 y = x^2;\ y(2) = 1$.

1.4.15. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2};\ y(1) = 0$.

Линейные уравнения можно также решать и методом вариации произвольной постоянной. Вначале ищется общее решение соответствующего однородного уравнения, полученного из данного отбрасыванием правой части, а затем общее решение данного неоднородного уравнения ищется в таком же виде, как и решение однородного уравнения, только произвольная постоянная C варьируется, т. е. считается функцией от x.

Пример 1.14. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением. Решаем соответствующее однородное уравнение $y' + \frac{y}{x} = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Находим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|,\ C \neq 0,\ y = \frac{C}{x}.$$

Теперь будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде $y = \frac{C(x)}{x}$, где C является функцией от x. Находим

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2},$$

тогда

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x^2;\ C'(x)x = x^4,\ C'(x) = x^3.$$

Отсюда $C(x)=\frac{x^4}{4}+C_1$. Следовательно, общее решение уравнения

$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4}+C_1\right)=\frac{x^3}{4}+\frac{C_1}{x}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Данные уравнения решить методом вариации произвольной постоянной:

1.4.16. $xy'-2y=4x$.

1.4.17. $xy'+y=1$.

1.4.18. $y'+2y=e^{-2x}$.

1.4.19. $xy'+y=\ln x+1$.

1.5 Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n,\ \ n\in\mathbb{R},\ n\neq 0,\ n\neq 1,$$

называется *уравнением Бернулли*. Если $n=0$, то получим линейное уравнение, при $n=1$ уравнение будет с разделяющимися переменными. Уравнение Бернулли решается с помощью подстановки $y=uv$ аналогично линейному. Заметим, что при $n>0$ уравнение Бернулли всегда имеет решение $y=0$.

Пример 1.15. Решить уравнение $xy'-4y=x^2y^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Подставляем $y=uv,\ y'=u'v+uv'$ в уравнение:

$$xu'v+xuv'-4uv=x^2(uv)^{\frac{1}{2}}.$$

Группируем первое и третье слагаемые и выносим общий множитель:

$$u(xv'-4v)+xu'v=x^2(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}).$$

Пусть $xv'-4v=0$ или $\frac{dv}{v}=4\frac{dx}{x}$. Интегрируем полученное уравнение

$$\ln|v| = 4\ln|x|;\;\; v = x^4.$$

Находим u:

$$xu'x^4 = x^2(ux^4)^{\frac{1}{2}};\;\; xu' = u^{\frac{1}{2}};\;\; \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{x};\;\; 2u^{\frac{1}{2}} = \ln|Cx|;\; C \neq 0;$$

$$u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln|Cx|;\quad u = \frac{1}{4}\ln^2|Cx|.$$

Тогда $y = x^4\frac{1}{4}\ln^2|Cx| = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|,\; C \neq 0$ – общее решение.

Пример 1.16. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$.

Решение. Замена $y = uv$. Тогда

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2u^4v^4,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2u^4v^4.$$

Сначала решаем уравнение $v' + \frac{v}{x} = 0$.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0,\;\; \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},\;\; \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},\;\; \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x},\;\; \ln|v| = -\ln|x|,\;\; v = \frac{1}{x}.$$

Теперь решаем уравнение $u'v = x^2u^4v^4$:

$$u'\frac{1}{x} = x^2u^4\frac{1}{x^4},\;\; \frac{du}{dx}\frac{1}{x} = \frac{u^4}{x^2},\;\; \frac{du}{u^4} = \frac{dx}{x},\;\; \int\frac{du}{u^4} = \int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{3u^3} = \ln|x| + \ln C,\; C \neq 0,\;\; \frac{1}{u^3} = -3\ln|Cx|,$$

$$u^3 = -\frac{1}{3\ln|Cx|},\;\; u = -\frac{1}{\sqrt[3]{3\ln|Cx|}}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = -\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{3\ln|Cx|}},\; C \neq 0.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения следующих уравнений:

1.5.1. $y' + 2y = y^2 e^x$.

1.5.2. $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$.

1.5.3. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

1.5.4. $xy' + y = -xy^2$.

1.5.5. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

1.6 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, т. е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du,$ где

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \; Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теорема. Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – функции, непрерывные в односвязной области D плоскости xy, имеющие в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы дифференциальное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D было выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае $u(x, y) = C$ есть общий интеграл данного уравнения.

Пример 1.17. Решить уравнение $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy=0$.

Решение. В этом уравнении $P(x,\,y)=xy^2+\dfrac{x}{y^2}$, $Q(x,\,y)=x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}$.

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy-\dfrac{2x}{y^3}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то данное уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x,\,y)$ из условий:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,\,y)=xy^2+\dfrac{x}{y^2};\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\,y)=x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}.\end{cases}\tag{1.9}$$

Интегрируя по x первое равенство из (1.9), получаем

$$u=\int\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx=\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2}{2y^2}+C(y),$$

где $C(y)$ – произвольная функция от y. При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от y.

Находим $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и учитываем второе равенство из (1.9):

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y-\frac{x^2}{y^3}+C'(y)=x^2y-\frac{x^2}{y^3},$$

т. е. $C'(y)=0$. Отсюда $C(y)=C_1$.

Итак, $u(x,\,y)=\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{x^2}{2y^2}+C_1$, $\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{x^2}{2y^2}+C_1=C_2$,

а общий интеграл уравнения имеет вид

$$\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2}{2y^2}=C,\ \text{где}\ C=C_2-C_1.$$

Пояснение. Дифференцирование в левой части первого равенства (1.9) $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ описывает дифференцирование по переменной x при фиксированной переменной y (считаем y константой). Поэтому все функции u, удовлетворяющие уравнению $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, задаются формулой $u = \int P(x, y)dx + C(y)$, где C – произвольная непрерывно дифференцируемая функция (произвольная постоянная относительно y).

Пример 1.18. Решить уравнение $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Решение. Находим $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$P = 2xy,\ \frac{\partial P}{\partial y} = (2xy)'_y = 2x;$$

$$Q = x^2 - y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = (x^2 - y^2)'_x = 2x.$$

Так как условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется, то данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Интегрируя по x равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$, считая при этом y постоянным, находим

$$u(x, y) = \int 2xydx = x^2 y + C(y),$$

где $C(y)$ – пока неизвестная функция от y. Подставляя найденную функцию $u(x, y)$ в равенство $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$, получаем $C(y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + C'(y) = x^2 - y^2,\ C'(y) = -y^2,\ C(y) = -\int y^2 dy = -\frac{y^3}{3} + C_1.$$

Теперь можно записать общий интеграл:

$$u(x,y)=x^2y+C(y)=x^2y-\frac{y^3}{3}+C_1;$$

$$x^2y-\frac{y^3}{3}+C_1=C_2,\ x^2y-\frac{y^3}{3}=C\text{, где } C=C_2-C_1.$$

Замечание. Функция $u(x,y)$ может быть определена с помощью криволинейного интеграла

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$

или
$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy,$$

где $(x_0;y_0)$ – любая точка плоскости, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны.

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения:

1.6.1. $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$.

1.6.2. $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$.

1.6.3. $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$.

1.6.4. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.

1.6.5. $(y+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy=0$.

1.6.6. $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0,\ y(0)=0$.

1.6.7. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$.

1.6.8. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$.

1.6.9. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$.

1.6.10. $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

1.7 Задачи различных типов

Определить, к какому виду относятся следующие уравнения:

1.7.1. $(y^2-1)+(2xy+3y)y'=0$.

1.7.2. $y'=\dfrac{y^2}{2xy+3}$.

1.7.3. $y'-ye^x=3$.

1.7.4. $(2x+3y)dx+(x-5y)dy=0$.

1.7.5. $3xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

1.7.6. $xy'+2y-e^x=0$.

1.7.7. $y'=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

1.7.8. $y'=\dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

1.7.9. $y'=\dfrac{y^3+1}{\sin x}$.

1.7.10. $y'=2xe^x y+y^3$.

1.7.11. $(x^2+2xy+2y^2)dy+3xydx=(2x^2-y^2)dx$.

1.7.12. $y'=\cos x-y\,\mathrm{tg}\,x$.

1.7.13. $y'=\dfrac{x^2+8xy}{x^2-y^2}$.

1.7.14. $y'=\dfrac{x^2+1}{y^2+1}$.

1.7.15. $x(\ln x-\ln y)dy-2ydx=0$.

1.7.16. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{3\sqrt{y}}{\cos x}$.

1.7.17. $\sin xdx+2ye^x dy=0$.

1.7.18. $\dfrac{xy'-y}{x}=3\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.

1.7.19. $y - y'e^x = y^2 \operatorname{tg} x$.

1.7.20. $(xy + 2y^2)dx + \dfrac{x}{y}dy = 0$.

1.7.21. $(x - \cos y)dx + (x \sin y + \cos y)dy = 0$.

1.7.22. $(x^2 + y - ye^x)dx + (x + 2y - e^x)dy = 0$.

Решить уравнения:

1.7.23. $(y - \sqrt{xy})dx = xdy$.

1.7.24. $xy' = y(\ln y - \ln x + 5)$.

1.7.25. $y' \sin x - y = \sin x \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

1.7.26. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0$.

1.7.27. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$.

1.7.28. $xy' - y = x \cos^2 \dfrac{y}{x}$, $y(4) = \pi$.

1.7.29. $y' - 6y = 2xe^{6x}$, $y(1) = e^6$.

1.7.30. $(2xy^3 + 4y)dx + (3x^2 y^2 + 4x)dy = 0$.

1.7.31. $(y^2 - e^x \cos y)dx + (2xy + e^x \sin y)dy = 0$.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1 Общие понятия

Дифференциальное уравнение n*-го порядка* имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Решением такого уравнения называется любая функция, которая обращает это уравнение в тождество. *Задача Коши* для этого уравнения состоит в отыскании решения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{2.2}$$

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ называется *общим решением данного дифференциального уравнения*, если соответствующим выбором значений произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно удовлетворить любой задаче Коши, поставленной для данного уравнения. Всякое решение, полученное из общего при некоторых значениях произвольных постоянных, называется *частным*. Если общее или частное решение получено в неявном виде, то оно называется *общим* или соответственно *частным интегралом*.

Пример 2.1. Показать, что функция $y = \ln x - x^2$ является решением уравнения $xy'' + y' + 4x = 0$.

Решение. Находим первую и вторую производные функции $y = \ln x - x^2$.

$$y' = \frac{1}{x} - 2x, \quad y'' = -\frac{1}{x^2} - 2.$$

Подставив их в уравнение, получим

$$x\left(-\frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(\frac{1}{x} - 2x\right) + 4x = -\frac{1}{x} - 2x + \frac{1}{x} - 2x + 4x \equiv 0.$$

Пример 2.2. Показать, что соотношение $y + y^2 - x = 0$ является интегралом уравнения $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$.

Решение. Дифференцируя соотношение $y + y^2 - x = 0$, получим $y' + 2yy' - 1 = 0$, откуда $y' = \dfrac{1}{1+2y} = (1+2y)^{-1}$.

Дифференцируя еще раз, получим

$$y'' = -(1+2y)^{-2} \cdot 2y'.$$

Заменяя y' его значением, находим

$$y'' = -(1+2y)^{-2} \cdot 2(1+2y)^{-1} = -2(1+2y)^{-3}.$$

Снова дифференцируем

$$y''' = 6(1+2y)^{-4} \cdot 2y' = 12(1+2y)^{-5}.$$

Подставляя y', y'', y''' в данное уравнение, получим

$$(1+2y)^{-1} \cdot 12(1+2y)^{-5} - 3(-2(1+2y)^{-3})^2 = 0$$

или

$$12(1+2y)^{-6} - 12(1+2y)^{-6} = 0,$$

т. е. получаем тождество $0 \equiv 0$, которое и доказывает, $y + y^2 - x = 0$ является интегралом данного уравнения.

Пример 2.3. Показать, что $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3$ является общим решением уравнения $y'''-2y''+y'=0$.

Решение. Дифференцируя данную функцию три раза, получаем

$$y'=C_2e^x+(C_1+C_2x)e^x=(C_1+C_2+C_2x)e^x,$$

$$y''=C_2e^x+(C_1+C_2+C_2x)e^x=(C_1+2C_2+C_2x)e^x,$$

$$y'''=(C_1+3C_2+C_2x)e^x.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, имеем

$$(C_1+3C_2+C_2x)e^x-2(C_1+2C_2+C_2x)e^x+(C_1+C_2+C_2x)e^x=0$$

или $0\cdot e^x\equiv 0$,

Полученное тождество $0\equiv 0$ и доказывает, что $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3$ является общим решением уравнения $y'''-2y''+y'=0$.

Задачи для самостоятельной работы

Показать, что данные функции являются решениями соответствующих уравнений:

2.1.1. $y=xe^{-x}$, $y''+2y'+y=0$.

2.1.2. $y=\cos 2x+2\sin 2x-1$, $4y'''+y'=0$.

2.1.3. $x=y+\ln y$, $yy''+(y')^3-(y')^2=0$.

2.1.4. $y=x^3+x+5$, $xy'''-y''=0$.

2.1.5. $y^3-y=3x$, $2y(y')^3+y''=0$.

2.1.6. $y=x^2\ln x$, $xy''=2$.

Показать, что данные функции являются общими решениями соответствующих уравнений:

2.1.7. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$, $y''+2y'+y=0$.

2.1.8. $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$, $y''(e^x+1)+y'=0$.

2.1.9. $y=(C_1x+C_2)^2$, $2yy''=(y')^2$.

2.1.10. $y=C_1-C_2\cos x-x$, $y''\operatorname{tg} x-y'=1$.

2.2 Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение такого уравнения получается путем n-кратного интегрирования.

Пример 2.4. Найти общее решение уравнения $y'' = \ln x$ и выделить из него частное, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$.

Решение. Интегрируя это уравнение дважды, получим общее решение

$$y' = \int \ln x dx + C_1 = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C_1;$$

$$y = \int (x\ln x - x + C_1)dx + C_2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1x + C_2.$$

Подставив сюда значение $x = 1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -1 + C_1 = -1; \\ -\dfrac{3}{4} + C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем $C_1 = 0, C_2 = \frac{3}{4}$. Подставляя C_1 и C_2 в общее решение, получаем частное решение

$$y = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения следующих уравнений:

2.2.1. $y'' = -\frac{1}{x^3}$.

2.2.2. $y'' = \sin 3x$.

2.2.3. $y'' = x \ln x$.

2.2.4. $y'' = 2x + 3$.

2.2.5. $y'' = e^{2x}$.

2.2.6. $y'' = 2\cos 5x$.

Найти частные решения уравнений:

2.2.7. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

2.2.8. $y''' = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.2.9. $y'' = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0, y'(1) = -1$.

2.2.10. $y''' = \frac{6}{x^3}$, $y(1) = 2, y'(1) = 4, y''(1) = -3$.

Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$

Уравнение не содержит явно искомую функцию y. Оно допускает понижение порядка с помощью замены переменной

$$y' = z(x),$$

откуда

$$y'' = z'(x),$$

и получается уравнение первого порядка $F(x, z, z') = 0$.

Пример 2.5. Решить уравнение $y'' + \frac{y'}{x} + 1 = 0.$

Решение. Полагая $y' = z, y'' = z'$, получаем линейное уравнение $z' + \frac{z}{x} = -1.$ Вводим замену $z = uv$, тогда $z' = u'v + uv'.$ Подставляем в уравнение и получаем $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -1.$

Группируем слагаемые $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -1.$ Далее

$$v' + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln v = -\ln x, \quad \ln v = \ln x^{-1}, \quad v = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Подставляем полученное частное решение в уравнение, получаем

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -1, \quad du = -xdx, \quad u = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Возвращаемся к замене

$$z = uv = \left(-\frac{x^2}{2} + C_1\right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}.$$

Заменяя z на y', получаем уравнение $y' = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}$, откуда

$$y = \int\left(-\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}\right)dx = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

Получено общее решение $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения:

2.2.11. $xy'' + 2y' = 0$.

2.2.12. $x^2 y'' + xy' = 1$.

2.2.13. $y'' + (y')^2 = 1$.

2.2.14. $y''(e^2 + 1) + y' = 0$.

2.2.15. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

2.2.16. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

2.2.17. $y''(1 + \ln x) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln x, \; y(1) = \frac{1}{2}, \; y'(1) = 1$.

2.2.18. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \ y(2) = \dfrac{16}{5}, y'(2) = 4$.

2.2.19. $y'' - 2x(y')^2 = 0, \ y(1) = 0, y'(1) = -1$.

2.2.20. $(x-1)y'' - 2y' = 2, \ y(2) = -1, y'(2) = 2$.

2.2.21. $y''(x^2+1) - 2xy' = 0, \ y(0) = 1, y'(0) = 3$.

2.2.22. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0, \ y(2) = 2, y'(2) = 1$.

Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$

Уравнение не содержит явно независимую переменную x. В этом случае порядок уравнения можно понизить с помощью замены переменной

$$y' = p(y),$$

где новая переменная p рассматривается как функция от y. Дифференцируя по x, находим

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} p.$$

Подставляя y' и y'' в данное уравнение, получим уравнение первого порядка относительно p.

Пример 2.6. Решить уравнение $yy'' = (y')^2$.

Решение. Подставив в уравнение $y' = p, \ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2, \ p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

Отсюда или $p = 0$, или $y\dfrac{dp}{dy} - p = 0$. Решая последнее уравнение, находим $p = C_1 y$, т. е. $y' = C_1 y$. Интегрируя еще раз, получим общее решение $y = C_2 e^{C_1 x}$. Из равенства $p = 0$ найдем еще одно решение $y = C$ (оно также получается из первого решения при $C_1 = 0$).

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения:

2.2.23. $2y^3 y'' + 1 = 0$.

2.2.24. $yy'' + (y')^2 = 1$.

2.2.25. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

2.2.26. $2y''\sqrt{y} - y' = 0$.

2.2.27. $2yy'' - (y')^2 = 2,\ y(1) = y'(1) = 2$.

2.2.28. $y''y^3 = 1,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

2.3 Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (2.3)$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные, $a_0 \neq 0$, *называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Общее решение будет иметь вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ – частные решения уравнения (2.3), являющиеся линейно независимыми функциями. Функции $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ называются линейно независимыми, если равенство $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$.

Для нахождения этих линейно независимых частных решений, а следовательно, и общего решения уравнения (2.3) составляется *характеристическое уравнение* (y'' заменяем на k^2, y' на k, y на 1)

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 . \qquad (2.4)$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая. Дискриминант $D>0,\ D=0,\ D<0$. В зависимости от этого, общее решение $\bar{y}$ уравнения (2.3) находится по таблице 2.1.

Таблица 2.1

Корни характеристического уравнения	Вид общего решения ЛОДУ (2.3)
1. $D>0$, корни k_1 и k_2 действительные и различные	$\bar{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$
2. $D=0$, корни $k_1=k_2$ действительные и равные	$\bar{y}=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}$
3. $D<0$, корни $\alpha\pm\beta i$ комплексные	$\bar{y}=e^{бx}(C_1\cos вx+C_2\sin вx)$

Пример 2.7. Найти общее решение уравнения $2y''+5y'-7y=0.$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$y''\to k^2,\ y'\to k,\ y\to 1,$$

$$2k^2+5k-7=0,$$

$$D=5^2-4\cdot 2\cdot(-7)=81,$$

$$k_1=\frac{-5+9}{4}=1,\ \ k_2=\frac{-5-9}{4}=-\frac{7}{2}.$$

Корни характеристического уравнения действительны и различны, поэтому общее решение дифференциального уравнения согласно таблице 2.1, п. 1 имеет вид

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-\frac{7}{2}x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 2.8. Найти общее решение уравнения $4y''-12y'+9y=0.$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$y''\to k^2,\ y'\to k,\ y\to 1,$$

$$4k^2-12k+9=0,$$

$$D=144-144=0.$$

Корни $k_1 = k_2 = \dfrac{3}{2}$ действительные и равные, поэтому общее решение дифференциального уравнения согласно таблице 2.1, п. 2 имеет вид

$$\bar{y} = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{\frac{3}{2}x}.$$

Пример 2.9. Найти общее решение уравнения $y'' + y' + y = 0$.

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$y'' \to k^2,\ y' \to k,\ y \to 1,$$

$$k^2 + k + 1 = 0,$$

$$D = 1 - 4 = -3.$$

Его корни $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ комплексные, поэтому общее решение дифференциального уравнения согласно таблице 2.1, п. 3 имеет вид

$$\bar{y} = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Пример 2.10. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 4,\ y'(0) = 10$.

Решение. Составим характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения: $k^2 - 4k + 3 = 0$, его корни $k_1 = 1,\ k_2 = 3$. Общее решение уравнения $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

Для определения частного решения в равенства $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$; $\bar{y}' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$ подставим начальные условия. Получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2, \\ 10 = C_1 + 3C_2, \end{cases}$$

из которой находим $C_1 = 1,\ C_2 = 3$. Подставим эти значения в общее решение и получим частное $\bar{y} = e^x + 3e^{3x}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений:

2.3.1. $y'' + 3y' - 4y = 0$.

2.3.2. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

2.3.3. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

2.3.4. $y'' + 4y' = 0$.

2.3.5. $y'' - 4y = 0$.

2.3.6. $y'' + 4y = 0$.

2.3.7. $3y'' + 5y' - 2y = 0$.

2.3.8. $y'' - y' - 6y = 0$.

2.3.9. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

2.3.10. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

2.3.11. $5y'' + 13y' - 6y = 0$.

2.3.12. $y'' + 3y' = 0$.

2.3.13. $y'' + 9y = 0$.

2.3.14. $y'' - 9y = 0$.

Найти частные решения уравнений:

2.3.15. $y'' + y' - 6y = 0$ при $y(0) = 2,\ y'(0) = 9$.

2.3.16. $y'' - 8y' + 16y = 0$ при $y(0) = -3,\ y'(0) = -4$.

2.3.17. $y'' - y = 0$ при $y(0) = 3,\ y'(0) = -4$.

2.3.18. $y'' + 4y = 0$ при $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$.

Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, если известны корни характеристических уравнений, и написать их общие решения:

2.3.19. $k_1 = -2,\ k_2 = 4$.

2.3.20. $k_1 = k_2 = 5$.

2.3.21. $k_1 = 3 + 5i,\ k_2 = 3 - 5i$.

2.3.22. $k_1 = 3,\ k_2 = -3$.

2.3.23. $k_1 = k_2 = 2$.

2.3.24. $k_1 = -2 + 4i, k_2 = -2 - 4i$.

2.4 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим *линейное неоднородное уравнение*

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{2.5}$$

с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2 и с непрерывной правой частью $f(x)$. Уравнение с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю,

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{2.6}$$

называется *линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению* (2.5).

Общее решение линейного неоднородного уравнения (2.5) можно записать в виде суммы

$$y = \bar{y} + y^*, \tag{2.7}$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (2.6), а y^* – частное решение неоднородного уравнения (2.5). Нахождение $\bar{y}$ было рассмотрено в подразделе 2.3.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения y^* методом неопределенных коэффициентов (другой способ – метод вариации произвольных постоянных – будет рассмотрен в следующем разделе). Этот способ применим, если правая часть $f(x)$ имеет вид, представленный в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Вид правой части $f(x)$	Вид частного решения y^*
1. $f(x) = e^{\text{б}x} P_n(x)$	$y^* = x^r R_n(x) e^{\text{б}x}$
2. $f(x) = e^{\text{б}x}(P_n(x)\cos \text{в}x + Q_m(x)\sin \text{в}x)$	$f(x) = x^r e^{\text{б}x}(S_l(x)\cos \text{в}x + M_l(x)\sin \text{в}x)$

Здесь $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно с действительными коэффициентами; $R_n(x)$, $S_l(x)$, $M_l(x)$ – многочлены степени n и l соответственно ($l = \max\{n, m\}$), но с неопределенными коэффициентами; r – кратность, с которой число α (п. 1) или $\alpha \pm \beta i$ (п. 2) является корнем характеристического уравнения (2.4).

Замечания.

1 Многочлены $R_n(x), S_l(x), M_l(x)$ должны быть полными, т. е. содержать все степени x.

2 Если в состав $f(x)$ входит только одна функция $\sin\beta x$ или $\cos\beta x$, то в y^* должны содержаться обе функции.

3 Для нахождения неопределенных коэффициентов многочленов $R_n(x), S_l(x), M_l(x)$ частное решение y^* и его производные $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ подставляют в уравнение (2.5), затем приравнивают коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях.

Рассмотрим вид частного решения y^* для отдельных случаев функции из таблицы 2.2:

1) $f(x) = P_n(x)$; здесь $\alpha = 0$ и частное решение ищется в виде

$$y^* = x^r(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n), \tag{2.8}$$

где r – кратность, с которой нуль входит в число корней характеристического уравнения;

2) $f(x) = ce^{\alpha x}$, тогда частное решение нужно искать в виде

$$y^* = x^r Ae^{\alpha x}, \tag{2.9}$$

где r – кратность, с которой число α входит в число корней характеристического уравнения, A – неопределенный коэффициент;

3) $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ и частное решение ищется в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n), \tag{2.10}$$

где r – кратность, с которой число α является корнем характеристического уравнения;

4) $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$; здесь $\alpha = 0$, поэтому частное решение ищется в виде

$$y^* = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \tag{2.11}$$

где r – кратность, с которой числа $\pm\beta i$ являются корнями характеристического уравнения.

Пример 2.11. Найти общее решение уравнения $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Решение. Согласно формуле (2.7) общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего ему однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $2y'' - y' - y = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$2k^2 - k - 1 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -1/2.$$

Тогда согласно таблице 2.1, п. 1 общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Рассмотрим правую часть исходного дифференциального уравнения $f(x) = 4xe^{2x}$. Так как выражение $4x$ является многочленом первой степени и $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$ и частное решение согласно таблице 2.2, п. 1 будем искать в виде $y^* = (Ax + B)e^{2x}$. Здесь A и B неизвестные коэффициенты.

Найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$:

$$y^{*\,\prime} = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = (2Ax + 2B + A)e^{2x},$$

$$y^{*\,\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + 2B + A)e^{2x} = (4Ax + 4B + 4A)e^{2x}.$$

Подставляем y^*, $y^{*\,\prime}$, $y^{*\,\prime\prime}$ в исходное уравнение

$$2(4Ax + 4B + 4A)e^{2x} - (2Ax + 2B + A)e^{2x} - (Ax + B)e^{2x} = 4xe^{2x}.$$

Разделим обе части полученного равенства на e^{2x} и раскроем скобки:

$$8Ax + 8B + 8A - 2Ax - 2B - A - Ax - B = 4x$$

или

$$5Ax+7A+5B=4x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества

$$\begin{aligned} x\ &: 5A=4 \\ x^0 &: 7A+5B=0 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A=4/5; \\ B=-28/25. \end{cases}$$

Получаем частное решение $y^*=\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}$. Тогда общее решение исходного уравнения $y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}+\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}$.

Пример 2.12. Найти общее решение уравнения $y''+3y'-4y=(x+1)e^x$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$y''\to k^2,\ y'\to k,\ y\to 1$$

$$k^2+3k-4=0,\ k_1=1,\ k_2=-4.$$

Тогда согласно таблице 2.1, п. 1 общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-4x}.$$

Правая часть уравнения $f(x)=(x+1)e^x$. Здесь $\alpha=1$ является простым (однократным) корнем характеристического уравнения, поэтому $r=1$ и общий вид частного решения согласно таблице 2, п. 1 будет $y^*=(Ax+B)xe^x$ или $y^*=(Ax^2+Bx)e^x$.

Дифференцируем y^* дважды, получаем

$$y^{*\prime}=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x=(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x,$$

$$y^{*\prime\prime}=(2Ax+2A+B)e^x+(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x=$$

$$=(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x.$$

Подставляем в исходное уравнение

$$(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x+3(Ax^2+(2A+B)x+B)e^x-$$

$$-4(Ax^2+Bx)e^x=(x+1)e^x.$$

Сокращаем на e^x:

$$Ax^2+(4A+B)x+2A+2B+3Ax^2+3(2A+B)x+B)-4(Ax^2+Bx)=x+1.$$

Приравняем коэффициенты:

$$x^1: 4A+B+6A+3B-4B=1$$

$$x^0: 2A+2B+3B=1.$$

Получаем систему уравнений, решая которую находим коэффициенты $\begin{cases}10A=1;\\2A+5B=1;\end{cases}$ $\begin{cases}A=1/10;\\B=4/25.\end{cases}$

Тогда $y^*=\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25}x\right)e^x$. Получили решение данного уравнения

$$y=C_1e^x+C_2e^{-4x}+\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25}x\right)e^x.$$

Пример 2.13. Найти общее решение уравнения

$$y''+4y'+4y=\cos x+(2x+3)\sin x.$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+4k+4=0,\ k_1=k_2=-2.$$

Тогда согласно таблице 2.1, п. 2 общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$\bar{y}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}.$$

Правая часть уравнения $f(x)=\cos x+(2x+3)\sin x$ имеет вид п. 2 из таблицы 2.2. Здесь $P_n(x)=1$, т. е. $n=0$, $Q_m(x)=2x+3$, т. е. $m=1$, поэтому $l=\max\{0,1\}=1$. Числа $\alpha\pm\beta i=0\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому $r=0$ и общий вид частного решения согласно таблице 2.2, п. 2 будет

$$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x,$$

здесь $S_l(x)=Ax+B,\ M_l(x)=Cx+D;$ A, B, C, D – неопределенные коэффициенты. Найдем их, для этого дифференцируем y^* дважды, получаем

$$\left(y^*\right)'=A\cos x-(Ax+B)\sin x+C\sin x+(Cx+D)\cos x=$$

$$=(A+D)\cos x+(-B+C)\sin x+C\,x\sin x-Ax\sin x,$$

$$y^{*\,\prime\prime}=-(A+D)\sin x+(-B+C)\cos x+C\cos x-Cx\sin x-A\sin x-Ax\cos x=$$

$$=-(2A+D)\sin x+(-B+2C)\cos x-Cx\sin x-Ax\cos x.$$

Подставляем в исходное уравнение $y^*, (y^*)', (y^*)''$:

$$-(2A+D)\sin x+(-B+2C)\cos x-Cx\sin x-Ax\cos x+$$
$$+4((A+D)\cos x+(-B+C)\sin x+Cx\cos x-Ax\sin x)+$$
$$+4((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)=(2x+3)\sin x+\cos x.$$

Приравниваем коэффициенты при одноименных тригонометрических функциях в правой и левой частях равенства

$$\cos x:\ -B+2C+4A+4D+4B=1,$$
$$\sin x:-2A-D-4B+4C+4D=3,$$
$$x\cos x:-A+4C+4A=0,$$
$$x\sin x:-C-4A+4C=2.$$

Получаем систему

$$\begin{cases}-B+2C+4A+4D+4B=1,\\ -2A-D-4B+4C+4D=3,\\ -A+4C+4A=0,\\ -C-4A+4C=2.\end{cases}$$

Решая ее, находим: $\begin{cases}A=-8/25;\\ B=-1/125;\\ C=6/25;\\ D=57/125.\end{cases}$

Тогда частное решение:

$$y^*=\left(-\frac{8}{25}x-\frac{1}{125}\right)\cos x+\left(\frac{6}{25}x+\frac{57}{125}\right)\sin x,$$

и общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\left(\frac{6}{25}x+\frac{57}{125}\right)\sin x-\left(\frac{8}{25}x+\frac{1}{125}\right)\cos x.$$

Пример 2.14. Найти общее решение уравнения $y''+25y=\cos 5x$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2+25=0,\ k_1=5i,\ k_2=-5i.$$

Тогда согласно таблице 2.1, п. 3 общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\bar{y}=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x\ .$$

Правая часть уравнения $f(x)=\cos 5x$. Здесь $n=0$, $m=0$, $l=\max\{n,\ m\}=0$, $\alpha\pm\beta i=0\pm 5i=\pm 5i$. Так как пара $\pm 5i$ встречается среди корней характеристического уравнения один раз ($r=1$), то общий вид частного решения согласно таблице 2.2, п. 2 будет

$$y^*=xe^{0\cdot x}(A\cos 5x+B\sin 5x)\quad \text{или}$$

$$y^*=x(A\cos 5x+B\sin 5x).$$

Дифференцируем y^* дважды:

$${y^*}'=A\cos 5x+B\sin 5x+x(-5A\sin 5x+5B\cos 5x)\ .$$

$${y^*}''=-5A\sin 5x+5B\cos 5x+(-5A\sin 5x+5B\cos 5x)+$$

$$+x(-25A\cos 5x-25B\sin 5x)=$$

$$=-10A\sin 5x+10B\cos 5x+x(-25A\cos 5x-25B\sin 5x).$$

Подставляем y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение:

$$-10A\sin 5x+10B\cos 5x+(-25A\cos 5x-25B\sin 5x)x+$$

$$+25(A\cos 5x+B\sin 5x)x=\cos 5x.$$

Приравниваем коэффициенты при одноименных функциях:

$$\cos 5x: 10B=1,$$

$$\sin 5x: -10A=0.$$

Отсюда находим $\begin{cases} A=0; \\ B=1/10. \end{cases}$

Тогда частное и общее решения имеют соответственно вид:

$$y^*=\frac{1}{10}x\sin 5x,\ \ y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x+\frac{1}{10}x\sin 5x.$$

Пример 2.15. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям $y''-2y'+2y=2x,\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2-2k+2=0$$

имеет корни $k_{1,2}=1\pm i.$ Тогда согласно таблице 2.1, п. 3 общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\bar{y}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)\,.$$

Правая часть уравнения имеет вид $f(x)=2x$, $n=1$, число $\alpha=0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r=0$ и общий вид частного решения согласно таблице 2.2, п. 1 будет $y^*=x^0(Ax+B)e^{0\cdot x}$ или $y^*=Ax+B$, тогда $y^{*\,\prime}=A,\ \ y^{*\,\prime\prime}=0\,.$

Подставляем в исходное уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$0-2A+2(Ax+B)=2x$$

или

$$2A+2Ax+2B=2x;$$

$$\begin{aligned} x\ \ &: 2A=2,\\ x^0 &: -2A+2B=0. \end{aligned}\ \Rightarrow \begin{cases} A=1,\\ B=1. \end{cases}$$

Имеем $y^*=x+1$ и общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x+1.$$

Найдем постоянные C_1 и C_2. Для этого полученное общее решение продифференцируем:

$$y'=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x(-C_1\sin x+C_2\cos x)+1,$$

а затем в y и y' подставим $x=0,\ y=0,\ y'=1$ из начальных условий $y(0)=0,\ y'(0)=1.$ В результате получим систему относительно неизвестных C_1 и C_2:

$$\begin{aligned} y(0)&=C_1+1=0,\\ y'(0)&=C_1+C_2+1=1. \end{aligned}$$

Решаем систему

$$\begin{cases} C_1+1=0,\\ C_1+C_2+1=1, \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} C_1=-1,\\ C_2=1. \end{cases}$$

Подставляем найденные значения в общее решение уравнения и получаем искомое частное решение дифференциального уравнения

$$y = e^x(-\cos x + \sin x) + x + 1.$$

Замечание. Если правая часть уравнения (2.5) есть сумма функций вида, представленного в таблице 2.2, то для нахождения частного решения этого уравнения нужно использовать теорему о наложении решений: надо найти частные решения y_1^* и y_2^*, соответствующие функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, тогда их сумма $y^* = y_1^* + y_2^*$ будет являться частным решением исходного дифференциального уравнения.

Пример 2.16. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям $y'' - y = x^2 + 2xe^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0$$

имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -1$. Тогда согласно таблице 2.1, п. 1 общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Правая часть уравнения $f(x) = x^2 + 2xe^{-x}$ представляет собой сумму функций $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2xe^{-x}$.

Найдем частное решение y_1^*, которое соответствует $f_1(x)$. Согласно таблице 2.2, п. 1 будем искать частное решение в виде $y_1^* = x^0(Ax^2 + Bx + C)e^{0\cdot x}$ или $y_1^* = Ax^2 + Bx + C$, тогда ${y_1^*}' = 2Ax + B$, ${y_1^*}'' = 2A$. Подставляем y_1^* и ее производные в уравнение $y'' - y = x^2$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2,$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} -A = 1, \\ -B = 0, \\ 2A - C = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 0, \\ C = -2. \end{cases}$$

Имеем $y_1^* = -x^2 - 2.$

Найдем теперь частное решение y_2^*, которое соответствует $f_2(x)$. Согласно таблице 2.2, п. 1 будем искать частное решение в виде $y_2^* = x(Dx+E)e^{-x}$ или $y_2^* = (Dx^2+Ex)e^{-x}$, тогда

$$y_2^{*\,\prime} = (2Dx+E)e^{-x} - (Dx^2+Ex)e^{-x},$$

$$y_2^{*\,\prime\prime} = 2De^{-x} - (2Dx+E)e^{-x} - (2Dx+E)e^{-x} + (Dx^2+Ex)e^{-x} =$$

$$= e^{-x}(2D - 2Dx - E - 2Dx - E + Dx^2 + Ex).$$

Подставляем y_2^* и ее производные в уравнение $y'' - y = 2xe^{-x}$ и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$e^{-x}(2D - 2Dx - E - 2Dx - E + Dx^2 + Ex) - (Dx^2 + Ex)e^{-x} = 2xe^{-x}.$$

Разделим обе части полученного равенства на e^{-x} и приведем подобные:

$$\begin{array}{c|l} x & \left\{\begin{array}{l} -4D = 2, \\ 2D - 2E = 0. \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} D = -\dfrac{1}{2}, \\ E = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Имеем $y_2^* = -\left(\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x\right)e^{-x}$. Запишем теперь общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 - 2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)e^{-x}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений:

2.4.1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

2.4.2. $y'' - y = 2e^x$.

2.4.3. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

2.4.4. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.

2.4.5. $y'' + 4y = 8\sin 2x$.

2.4.6. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x$.

2.4.7. $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$.

2.4.8. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$.

2.4.9. $y'' + y = 4x\cos x$.

2.4.10. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$.

2.4.11. $y'' + y = 4xe^{x}$.

2.4.12. $y'' + y = 4\sin x$.

2.4.13. $y'' + y' = 4x^2e^{x}$.

2.4.14. $y'' - 6y' + 9y = 25e^{x}\sin x$.

2.4.15. $y'' + 8y' = 8x$.

2.4.16. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.

2.4.17. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x$.

2.4.18. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.

2.4.19. $y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$.

2.4.20. $y'' - 4y = e^{2x}\sin x$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

2.4.21. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

2.4.22. $y'' - 2y' = e^{x}(x^2 + x - 3)$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 2$.

2.4.23. $y'' + y = -\sin 2x$; $y(\pi) = 1$; $y'(\pi) = 1$.

2.4.24. $y'' - y' = 2 - 2x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

2.4.25. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Указать вид частного решения уравнений:

2.4.26. $y'' + 2y' + 5y = x^2e^{-x}$.

2.4.27. $y'' - 2y' - 8y = xe^{4x}$.

2.4.28. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x^2)e^{4x}$.

2.4.29. $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}\sin 2x$.

2.4.30. $y'' - 2y' = x^3 + 1$.

2.4.31. $y'' + 3y' = x^2 + xe^{-3x}\sin x$.

2.4.32. $y'' - y = x^2 e^x$.

2.4.33. $y'' + 9y = x\sin 3x$.

2.4.34. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \sin 2x$.

2.4.35. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

2.4.36. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

2.4.37. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$.

2.4.38. $y'' + 9y = e^{3x}\sin x$.

2.4.39. $y'' - 7y' + 6y = (x-1)\cos x + 2\sin x$.

2.4.40. $y'' + 4y = e^{2x} + \sin 2x$.

2.5 Метод вариации произвольных постоянных

Если известно общее решение

$$\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{2.12}$$

линейного однородного уравнения (2.6), соответствующего неоднородному уравнению (2.5), то для определения общего решения y уравнения (2.5) можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Сущность этого метода состоит в том, что общее решение линейного неоднородного уравнения (2.5) ищется в форме (2.12), причем C_1 и C_2 рассматриваются как некоторые пока неизвестные функции от x:

$$y = C_1(x)\cdot y_1(x) + C_2(x)\cdot y_2(x).$$

Производные от функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0; \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = f(x). \end{cases} \tag{2.13}$$

Этот метод можно применить для любого вида функции $f(x)$, но если $f(x)$ имеет вид, как в таблице 2.2, то проще применить метод неопределенных коэффициентов.

Пример 2.17. Найти общий интеграл уравнения $y'' + y = \mathrm{ctg}\,x$.

Решение. Правая часть $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$ этого дифференциального уравнения не является функцией вида, представленного в таблице 2.2, поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Для нахождения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0; \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \mathrm{ctg}\,x. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Крамера, найдем

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \mathrm{ctg}\,x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\cos x;$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \mathrm{ctg}\,x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\cos x \cdot \mathrm{ctg}\,x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

Интегрируя полученные равенства, получим

$$C_1(x) = -\int \cos x dx = -\sin x + C_1;$$

$$C_2(x)=\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{dx}{\sin x}-\int\sin x dx=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+C_2\,.$$

Подставляем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в y и получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y=(-\sin x+C_1)\cos x+\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+C_2\right)\sin x=C_1\cos x+$$

$$+C_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Пример 2.18. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+2y'+y=\dfrac{1}{xe^x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+2k+1=0$ имеет корни $k_1=k_2=-1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}\,.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^*=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)xe^{-x}\,.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)xe^{-x}=0; \\ -C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)(e^{-x}-xe^{-x})=\dfrac{1}{xe^x}. \end{cases}$$

Решая систему методом Крамера, получим

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \dfrac{1}{xe^{-x}} & e^{-x}-xe^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{vmatrix}}=\frac{-e^{-2x}}{e^{-2x}-xe^{-2x}+xe^{-2x}}=\frac{-e^{-2x}}{e^{-2x}}=-1\,,$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{1}{xe^{x}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{1}{xe^{2x}}}{e^{-2x}}=\frac{1}{x}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x)=\int(-1)dx=-x+C_1;$$

$$C_2(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_2.$$

Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$, получим общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y=(-x+C_1)e^{-x}+(\ln|x|+C_2)e^{-x}x=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}\ln|x|.$$

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения:

2.5.1. $y''+y=\operatorname{tg}x$.

2.5.2. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}$.

2.5.3. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

2.5.4. $y''-2y=\dfrac{2}{x^3}(x^2-1)$.

2.5.5. $y''+4y'+4y=e^{-x}\ln x$.

2.5.6. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

2.5.7. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^{x}+1}$.

2.5.8. $y''+4y=2\operatorname{tg}x$.

2.5.9. $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

2.5.10. $y''+4y=\operatorname{ctg}2x$.

2.6 Линейные дифференциальные уравненения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2.14)$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Алгебраическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \qquad (2.15)$$

называется *характеристическим* для уравнения (2.14).

Корней характеристического уравнения с учетом их кратностей будет ровно *n* штук. Частные решения $y_1, y_2, ..., y_n$ уравнения (2.14) зависят от вида корней характеристического уравнения (таблица 2.3).

Таблица 2.3

Характер корня характеристического уравнения	Частные решения уравнения (2.14)
1. k – простой вещественный корень	e^{kx}
2. k – вещественный корень кратности r	e^{kx}, xe^{kx}, $x^2 e^{kx}$,…, $x^{r-1} e^{kx}$
3. $б \pm вi$ – простые комплексные сопряженные корни	$e^{бx} \cos вx$, $e^{бx} \sin вx$
4. $б \pm вi$ – комплексные сопряженные корни кратности r	$e^{бx} \cos вx, xe^{бx} \cos вx, \ldots, x^{r-1} e^{бx} \cos вx;$ $e^{бx} \sin вx, xe^{бx} \sin вx, \ldots, x^{r-1} e^{бx} \sin вx$

Общее решение уравнения (2.14) имеет вид

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n , \qquad (2.16)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – *n* частных решений этого уравнения, указанных в таблице 2.3.

Пример 2.19. Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 4y''' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^5 + 4k^3 = 0$, его корни с соответствующей кратностью: $k_1 = k_2 = k_3 = 0; r = 3; k_{4,5} = \pm 2i; r_{4,5} = 1$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x .$$

Пример 2.20. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 - 2k = 0$, его корни $k_1 = 0;\ k_2 = 2;\ k_3 = -1;\ r = 1;$ следовательно, общее решение имеет вид

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} .$$

Пример 2.21. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' + 10y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 2;\ y'(0) = 1;$ $y''(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 + 2k^2 + 10k = 0$ имеет простые корни $k_1 = 0;\ k_{2,\,3} = -1 \pm 3i$. Общее решение

$$\bar{y} = C_1 + e^{-x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x) .$$

Чтобы найти частное решение, найдем производные:

$$\bar{y}' = -e^{-x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + 3C_2 \sin 3x - 3C_3 \cos 3x) ;$$

$$\bar{y}'' = e^{-x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x + 3C_2 \sin 3x -$$
$$-3C_3 \cos 3x + 3C_2 \sin 3x - 3C_3 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x - 9C_3 \sin 3x).$$

Подставим начальные условия в $y,\ y',\ y''$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ -C_2 + 3C_3 = 1; \\ C_2 - 3C_3 - 3C_3 - 9C_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ C_2 - 3C_3 = -1; \\ 8C_2 + 6C_3 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = 2{,}3;\ C_2 = -0{,}3;\ C_3 = \dfrac{7}{30}$.

Частное решение имеет вид

$$\bar{y} = 2{,}3 + e^{-x}(-0{,}3\cos 3x + \frac{7}{30}\sin 3x) .$$

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (2.17)$$

называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*. Решение такого уравнения находится по той же схеме, как и для уравнения второго порядка: $y = \bar{y} + y^*$.

Пример 2.22. Найти общее решение уравнения $y''' + 4y' = 8e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 + 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0, k_{2,3} = \pm 2i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$.

Частное решение ищем в виде $y^* = Ae^{2x}$. Тогда

$$y^{*\prime} = 2Ae^{2x};\ y^{*\prime\prime} = 4Ae^{2x};\ y^{*\prime\prime\prime} = 8Ae^{2x}.$$

Подставим производные в уравнение

$$8Ae^{2x} + 8Ae^{2x} = 8Ae^{2x},\ A = 0,5.$$

Следовательно, $y^* = 0,5e^{2x}$ – частное решение.

Получаем решение уравнения

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + 0,5e^{2x}.$$

Пример 2.23. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_{2,3} = \pm i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y^* = Ax^2 + Bx + C$.

Находим производные:

$$y^{*\prime} = 2Ax + B;\ y^{*\prime\prime} = 2A;\ y^{*\prime\prime\prime} = 0.$$

Подставляем их в уравнение

$$-2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C = x^2 + x.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} -A = 1; \\ 2A - B = 1; \\ -2A + B - C = 0. \end{cases}$$

Получаем

$$A = -1;\ B = -3;\ C = -1.$$

Тогда частное решение уравнения $y^* = -x^2 - 3x - 1$, а общее –

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1.$$

Пример 2.24. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 4y' = 24x^2 - 12$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1;\ \ y'(0) = 4;\ \ y''(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = -2$, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)$.

Находим производные:

$$\left(y^*\right)' = 3Ax^2 + 2Bx + C;\ \ \left(y^*\right)'' = 6Ax + 2B;\ \ \left(y^*\right)''' = 6A$$

и подставляем их в уравнение

$$6A - 12Ax^2 - 8Bx - 4C = 24x^2 - 12.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} -12A = 24; \\ 8B = 0; \\ 6A - 4C = -12. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = -2;\ B = 0;\ C = 0$ и получаем $y^* = -2x^3;\ y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} - 2x^3$.

Найдем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Продифференцируем два раза общее решение неоднородного уравнения:

$$y' = 2C_2e^{2x} - 2C_3e^{-2x} - 6x^2;$$
$$y'' = 4C_2e^{2x} + 4C_3e^{-2x} - 12x.$$

Подставив начальные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1; \\ 2C_2 - 2C_3 = 4; \\ 4C_2 + 4C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 1; C_2 = 1; C_3 = -1$.

Следовательно, $y = 1 + e^{2x} - e^{-2x} - 2x^3$ – искомое частное решение.

Пример 2.25. Установить вид частного решения уравнения $y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 \cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = i; k_3 = k_4 = -i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $\bar{y} = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = x^2 \ \ (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x \ \ .$$

Пример 2.26. Установить вид частного решения уравнения $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = x^2e^{-2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + 4k^3 + 4k^2 = 0;$ $k^2(k+2)^2 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 0; k_3 = k_4 = -2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{y} = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x} + C_4xe^{-2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения уравнений:

2.6.1. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

2.6.2. $y''' + 2y'' + y' = 0$.

2.6.3. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

2.6.4. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

2.6.5. $y^{(4)} - y'' = 0$.

2.6.6. $y''' - 8y = 0$.

2.6.7. $y^{(4)} + y''' - 6y'' = 0$.

2.6.8. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

2.6.9. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$.

2.6.10. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$.

2.6.11. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

2.6.12. $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

2.6.13. $y^{(4)} - y = 1$.

2.6.14. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$.

2.6.15. $y''' - y = \sin x$.

2.6.16. $y^{(4)} - 2y'' + y = \cos x$.

2.6.17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x$.

2.6.18. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

2.6.19. $y^{(4)} - y = 5e^x \sin x$.

2.6.20. $y^{(5)} + y''' = x^2 - 1$.

2.6.21. $y^{(4)} - y = 5e^x \sin x$.

2.6.22. $y^{(5)} + 4y''' = e^x + 3\sin 2x$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

2.6.23. $y''' - y' = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = -1;\ y''(0) = 1$.

2.6.24. $y^{(4)} - y = 8e^{2x};\ y(0) = -1;\ y'(0) = 0;\ \ y''(0) = 1;\ y'''(0) = 0$.

2.6.25. $y''' - y = 2x;\ y(0) = y'(0) = 0;\ y''(0) = 2$.

2.6.26. $y''' - y' = -2x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ y''(0) = 2$.

2.6.27. $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x);\ \ y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = -1$.

2.6.28. $y''' - 3y' = 3(2 - x^2);\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

2.6.29. $y''' + 2y'' + 2y' + y = x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

2.6.30. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 1$.

3 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Нормальная система дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные функции независимой переменной t, называются *нормальной системой*.

Задача нахождения решения $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$ называется *задачей Коши*.

Совокупность n функций $x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),\ i = \overline{1,n}$, определенных в некоторой области D и имеющих частные производные по t, называются *общим решением системы* (3.1) в области D, в каждой точке которой решение задачи Коши существует и единственно, если выполняются условия:

1) система уравнений (3.1) разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т.е. $C_i = \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,n}$;

2) совокупность функций $x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),\ i = \overline{1,n}$ является решением системы (3.1) при всех значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$, получаемых из $C_i = \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,n}$ в случае, когда точка $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

В общем случае для решения нормальных систем уравнений используют *метод последовательного исключения неизвестных* и *метод интегрируемых комбинаций*.

1) Метод последовательного исключения неизвестных состоит в том, что из системы (3.1) исключают (n–1) функцию. Для этого составляют новые уравнения, которые затем дифференцируют. В результате получают одно уравнение более высокого порядка с одной неизвестной функцией. Найдя ее, определяют затем все остальные.

2) Метод интегрируемых комбинаций позволяет после некоторых

преобразований получить легко интегрируемые уравнения, с помощью которых можно найти затем решение системы. Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений (3.1) и интегрирующееся проще, чем входящие в нее уравнения. Нахождение нескольких интегрируемых комбинаций позволяет уменьшить число неизвестных функций исходной системы.

В некоторых случаях нормальная система может быть сведена к одному уравнению n-го порядка.

Пример 3.1. Решить систему уравнений методом исключения неизвестных:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Найти частное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 3;\ y(0) = 1$.

Решение. Продифференцируем первое уравнение системы по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}. \qquad (3.2)$$

Подставим в (3.2) значение $\dfrac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4y. \qquad (3.3)$$

Теперь из первого уравнения выразим y:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x. \qquad (3.4)$$

Подставим его в (3.3):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 3x + 4\left(\frac{dx}{dt} - 2x\right).$$

Отсюда

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Получилось однородное линейное уравнение второго порядка. Находим его общее решение $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$. Отсюда дифференцированием получаем

$$\frac{dx}{dt} = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t}.$$

Подставляем значения x и $\frac{dx}{dt}$ в (3.4):

$$y = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}; \\ y = C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Найдем теперь частное решение системы, для чего подставим в общее решение значение $t = 0$. Получим

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2; \\ 1 = -C_1 + 3C_2, \end{cases}$$

откуда находим $C_1 = 2; C_2 = 1$. Подставляя значения произвольных постоянных в общее решение, получим частное решение

$$\begin{cases} x = \ \ 2e^t + e^{5t}; \\ y = -2e^t + 3e^{5t}. \end{cases}$$

Пример 3.2. Решить систему уравнений методом интегрируемых комбинаций:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Решение. Складываем почленно данные уравнения и получаем одну интегрируемую комбинацию:

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y \text{ или } \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

$$\ln|x+y| = t + \ln C_1,\ C_1 \neq 0$$

$$x+y=C_1e^t\,.$$

Почленно вычитаем из первого уравнения системы второе, получим вторую интегрируемую комбинацию:

$$\frac{d(x-y)}{dt}=-(x-y)\ \text{ или }\ \frac{d(x-y)}{x-y}=-dt,$$

$$\ln|x-y|=-t+\ln C_2,\ C_2\neq 0$$

$$x-y=C_2e^{-t}\,.$$

Итак, мы нашли два уравнения:

$$x+y=C_1e^t\ \text{ и }\ x-y=C_2e^{-t}\,,$$

из которых может быть определено решение исходной системы:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\ \ C_1e^t+C_2e^{-t}\ \ , \\ y=\dfrac{1}{2}\ \ C_1e^t-C_2e^{-t}\ \ . \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти общие решения систем:

3.1.1. $\begin{cases} x'=4x-2y; \\ y'=3x-y. \end{cases}$

3.1.2. $\begin{cases} x'=7x+3y; \\ y'=6x+4y. \end{cases}$

3.1.3. $\begin{cases} x'=y-1; \\ y'=x-1. \end{cases}$

3.1.4. $\begin{cases} x'=y; \\ y'=-x. \end{cases}$

3.1.5. $\begin{cases} x'=2x+y; \\ y'=4y-x. \end{cases}$

3.1.6. $\begin{cases} x'=x+y; \\ y'=3y-2x. \end{cases}$

3.1.7. $\begin{cases} tx'=x; \\ tyy'=t^2+x^2. \end{cases}$

Найти частные решения:

3.1.8. $\begin{cases} x'=x-y; \\ y'=y-4x; \end{cases}$ $x(0)=2,\ y(0)=0.$

3.1.9. $\begin{cases} x' = 3x + 5y; \\ y' = -2x - 8y; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 5.$

3.2 Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y; \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение системы будем искать в виде

$$x = \alpha e^{\lambda t};\ \ y = \beta e^{\lambda t}. \tag{3.6}$$

Подставив значения x и y в систему (3.5), получим

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0; \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Чтобы эта система имела ненулевое решение, ее определитель должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.8}$$

Из этого характеристического уравнения находим два корня: λ_1 и λ_2. В случае, когда эти корни вещественны и различны, подставим их в (3.7) и для λ_1 находим решение α_1 и β_1, а для λ_2 – решение α_2

и β_2. Получаем два частных решения:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}; \\ y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t}; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}; \\ y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Общее решение системы (3.6) запишется в виде

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2; \\ y = C_1y_1 + C_2y_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}; \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Пример 3.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Замечание. Эта система решена методом исключения неизвестных в подразделе 3.1.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0;\ \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5$. Подставляя $\lambda_1 = 1$ в систему (3.7), получим

$$\begin{cases} (2-1)\alpha + \beta = 0; \\ 3\alpha + (4-1)\beta = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha + \beta = 0; \\ 3\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Одному из неизвестных даем произвольное значение, например, $\alpha = 1$, тогда $\beta = -1$. Итак, мы получили первую пару значений: $\alpha_1 = 1;\ \beta_1 = -1$. Ей соответствует частное решение системы $x_1 = e^t;\ y_1 = -e^t$. Аналогично для $\lambda_2 = 5$ найдем $\alpha_2 = 1;\ \beta_2 = 3$. Этой паре значений соответствует частное решение $x_2 = e^{5t};\ y_2 = 3e^{5t}$. Общее решение запишется в виде

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}; \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы

Решить следующие системы уравнений:

3.2.1. $\begin{cases} x' = 4x + 3y; \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

3.2.2. $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

3.2.3. $\begin{cases} x' = x + 3y; \\ y' = 6x + 4y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 6, \;\; y(0) = 1.$

3.2.4. $\begin{cases} x' = x - 2y; \\ y' = 4x + 7y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \;\; y(0) = 3.$

4 ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ИЛИ СИСТЕМАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 4.1. [5] Автомобиль массой m кг в момент включения двигателя шел со скоростью 20 м/с. Через 25 с скорость автомобиля уменьшилась до 5 м/с. Принимая, что сопротивление движения пропорционально его скорости, найти уравнение скорости и определить, через сколько секунд от начала движения без работы двигателя его скорость окажется равной 1,25 м/с?

Решение. По второму закону Ньютона $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$. Из условия имеем, что $F = -kv$, где $k-$ коэффициент пропорциональности. Так как сила сопротивления движению автомобиля имеет направление, противоположное направлению его скорости, то взят знак минус перед kv. Следовательно, $m\dfrac{dv}{dt} = -kv$. Отсюда,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt;\ \int\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt; \ln v = \ln e^{-\frac{kt}{m}} + \ln C \ \text{ или } \ v = Ce^{-\frac{kt}{m}}.$$

Для нахождения k и C воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ и $v = 20$ получаем $C = 20$; при $t = 25$ и $v = 5$, имеем $5 = 20e^{-\frac{25k}{m}}$. Преобразуем:

$$e^{-\frac{25k}{m}} = \frac{1}{4};\ e^{-\frac{25k}{m}} = \frac{1}{4};\ e^{-\frac{25k}{m}} = 2^{-2};\ e^{-\frac{k}{m}} = e^{-\frac{2}{25}};\ e^{-\frac{k}{m}} = 2^{-\frac{2t}{25}}.$$

Следовательно, $v = 20\cdot 2^{-\frac{2t}{25}}$. Мы получили уравнение скорости движения автомобиля без работы двигателя. Для определения времени, при котором скорость автомобиля станет равной 1,25 м/с, подставим в уравнение скорости $v = 1,25$ и найдем $t: 2^{-\frac{2}{25}} = \dfrac{1,25}{20};\ 2^{-0,08t} = 2^{-4}; -0,08t = -4;\ t = 50\ c.$

Пример 4.2. [5] Электровоз движется по горизонтальному железнодорожному пути со скоростью 72 км/ч. Машинист включает тормоз. Найти время от момента включения тормоза до полной остановки электровоза и расстояние, пройденное за это время, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 веса электровоза.

Решение. Пусть m – масса электровоза. Тогда сила тяжести электровоза

$$P = mg, \tag{4.1}$$

где g – ускорение силы тяжести. Расстояние, пройденное центром тяжести электровоза после начала торможения, есть неизвестная функция времени $s = f(t)$.

Скорость движения электровоза $v = \frac{ds}{dt}$, а ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{4.2}$$

На основании второго закона Ньютона

$$ma = -0,2P. \tag{4.3}$$

Минус указывает, что сила торможения направлена против движения электровоза. Подставляя (4.1) и (4.2) в уравнение (4.3), получаем

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = -0,2mg, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -0,2g.$$

После первого интегрирования уравнения получаем

$$\frac{ds}{dt} = v = -0,2g\int dt + C_1 = -0,2gt + C_1.$$

Так как начальная скорость (при $t = 0$) электровоза

$$v_0 = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с},$$

то $20 = -0,2g \cdot 0 + C_1$, отсюда $C_1 = 20$.

Получили уравнение скорости

$$\frac{ds}{dt} = v = -0,2gt + 20. \tag{4.4}$$

Так как в момент остановки электровоза его скорость равна 0, находим искомое время

$$t = \frac{20}{0,2g} = \frac{20}{0,2 \cdot 9,81} \approx 10,2 \text{ с.}$$

Интегрируем уравнение скорости (4.4):

$$s = \int (-0,2gt + 20)dt + C_1 = -0,1gt^2 + 20t + C_2 .$$

Используем начальное условие $s(0) = 0$:

$$0 = -0,1g \cdot 0^2 + 20 \cdot 0 + C_2 ,$$

получаем $C_2 = 0$.

Итак, уравнение пройденного электровозом пути будет

$$s = -0,1gt^2 + 20t .$$

За время $t = 10,2$ с электровоз пройдет расстояние

$$s = -0,1 \cdot 9,81 \cdot 10,2^2 + 20 \cdot 10,2 \approx 102 \text{ м.}$$

Таким образом, электровоз остановится через $10,2$ с, пройдя после начала торможения расстояние 102 м.

Пример 4.3. [5] Найти уравнение кривой железнодорожного пути, переходящей плавно от прямого направления к круговому, если длина переходной кривой *l*, а радиус кругового пути *r*.

Решение. Кривизна переходной кривой $\frac{1}{R}$ равномерно изменяется от нуля до $\frac{1}{r}$ (рисунок 4.1).

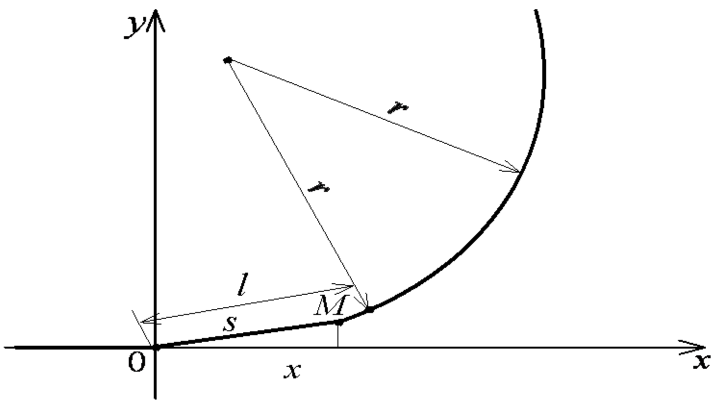

Рисунок 4.1

Следовательно, $\frac{1}{R} = ks$, где k – коэффициент пропорциональности, s – длина дуги от начала переходной кривой до текущей точки $M\ (x, y)$.

Коэффициент k определяется из условия: при $s = l$ $\frac{1}{R} = \frac{1}{r}$, откуда $\frac{1}{r} = kl$ и $k = \frac{1}{rl}$. Итак, $\frac{1}{R} = \frac{s}{rl}$.

Переходная кривая по всей длине l незначительно отклоняется от оси абсцисс, и величину s можно заменить абсциссой x точки M.

Следовательно, угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx}$ в точке M будет очень мал, и поэтому в дифференциальной формуле кривизны $\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ величиной y'^2 можно пренебречь.

Таким образом, полагаем $s = x$ и $\frac{1}{R} = y''$.

Упрощенное дифференциальное уравнение переходной кривой

$$y'' = \frac{x}{rl}.$$

Общее решение этого уравнения

$$y = \frac{x^3}{6rl} + C_1 x + C_2.$$

Начальные условия: при $x = 0$ $y = 0$ и $y' = 0$, откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Подставляя эти значения в общее решение, находим искомое уравнение переходной кривой

$$y = \frac{x^3}{6rl}.$$

Пример 4.4. Найти кривую, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

Решение. Обозначим через $P(x_1, y_1)$ точку касания (рисунок 4.2).

Составим уравнение касательной:

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1).$$

Пусть A точка пересечения касательной с осью ординат, тогда $y_A - y_1 = y_1'(0 - x_1)$ или $y_A = y_1 - y_1'x_1$.

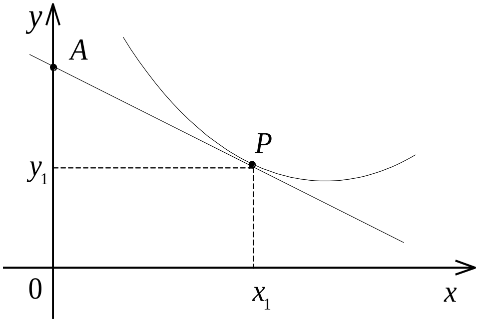

Рисунок 4.2

Так как точка P произвольная, то можно записать $y_A = y - y'x$. Тогда, согласно условию задачи, имеем

$$(y - y'x)^2 = xy\,,$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{xy}\,.$$

Получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Сделаем замену $y = ux$. Тогда $y' = u'x + u$. Получим

$$u'x + u = u \mp \sqrt{u},$$

$$u'x = \mp\sqrt{u};$$

$$\frac{du}{dx}x = \mp\sqrt{u},$$

$$\mp\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln x = \ln C \pm 2\sqrt{u}; \quad C \neq 0; \; x = Ce^{\pm 2\sqrt{u}}.$$

Возвращаемся к переменной y:

$$x = Ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}.$$

Пример 4.5. В сосуд, содержащий 10 л воды, со скоростью 2 л в минуту непрерывно поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступивший в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 10 минут?

Решение. За независимую переменную примем время $t,$ за искомую функцию $y\;\;t$ – количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, как изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t.$ В сосуд поступает 2 л раствора в одну минуту, а в Δt минут – $2\Delta t$ литров, в которых содержится $0,3\cdot 2\Delta t=0,6\Delta t$ кг соли. С другой стороны, за тот же промежуток времени Δt из сосуда вытекает $2\Delta t$ литров раствора. В момент t во всем сосуде (10 л) содержится $y\;\;t$ кг соли, следовательно, в $2\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0,2\Delta t\cdot y(t)$ кг соли, если бы содержание соли в сосуде оставалось неизменным за время $\Delta t.$ Но поскольку за указанное время оно меняется на величину, бесконечно малую при $\Delta t\to 0,$ то в вытекающих $2\Delta t$ л содержится $0,2\Delta t\;\;y(t)+\alpha$ кг соли, где $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0.$

Следовательно, в растворе, поступающем за промежуток времени $\Delta t,$ содержится $0,6\Delta t$ кг соли, а в вытекающем – $0,2\Delta t\cdot\;\;y(t)+\alpha$ кг. Приращение количества соли за это время равно разности найденных выражений, т. е.

$$y\;\;t+\Delta t\;\;-y(t)=0,6\Delta t-0,2\Delta t\cdot\;\;y(t)+\alpha\;\;,$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0.$ Разделим обе части полученного уравнения на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0,$ получим

$$y'\;\;t\;\;=0,6-0,2y(t).$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое можно записать так:

$$\frac{dy}{0,6-0,2y}=dt.$$

Интегрируя его, получим $y=3-Ce^{-0,2t}.$

Значение произвольной постоянной определим из начального условия $y=0$ при $t=0$ (в начальный момент в сосуде соли не было).

Подставив в общее решение значения $t=0$ и $y=0$, найдем: $0=3-C, C=3$.

Итак, изменение количества соли в сосуде определяется формулой $y=3-3e^{-0,2t}$.

При $t=10$ получаем

$$y(10)=3-3e^{-0,2\cdot 10}=3-3e^{-2}\approx 2,6 \text{ (кг)}.$$

Пример 4.6. В некоторой химической реакции вещество Z разлагается на два вещества X и Y, причем скорость образования каждого из них пропорциональна наличному количеству z вещества Z. Найти законы изменения количества x и y веществ X и Y в зависимости от времени t, если в начале процесса $z=z_0$, $x=0$, $y=0$, а по истечении одного часа $z=\frac{1}{2}z_0$, $x=\frac{z_0}{8}$, $y=\frac{3z_0}{8}$.

Решение. Если через x и y обозначены количества веществ X и Y соответственно, то производная $\frac{dx}{dt}$ выражает скорость образования вещества X, производная $\frac{dy}{dt}$ – скорость образования вещества Y. В каждый момент времени t количество z разложившегося вещества Z определяется формулой $z=z_0-x-y$, где z_0 – первоначальное количество вещества Z. Согласно условию задачи получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=k\;\; z_0-x-y\;\;, \\ \dfrac{dy}{dt}=l\;\; z_0-x-y\;\;, \end{cases}$$

где k и l – коэффициенты пропорциональности.

Эту систему можно свести к одному дифференциальному уравнению первого порядка. В самом деле, разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого уравнения, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{l}{k}.$$

Решая это уравнение, будем иметь

$$y=\frac{l}{k}x+C_1.$$

Используя начальные условия $x=0, y=0$ при $t=0$, находим, что $C_1=0$, поэтому $y=\frac{l}{k}x$. Подставляя полученное выражение для y в первое из уравнений исходной системы, получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt}+(k+l)x=kz_0,$$

общее решение которого

$$x=\frac{kz_0}{k+l}+C_2e^{-(k+l)t}.$$

Так как $x=0$ при $t=0$, то $C_2=-\frac{kz_0}{k+l}$ и $x=\frac{kz_0}{k+l}\left(1-e^{-(k+l)t}\right)$.

Подставляя полученное выражение для x в равенство $y=\frac{l}{k}x$, находим, что

$$y=\frac{lz_0}{k+l}\left(1-e^{-(k+l)t}\right).$$

Определим теперь значения коэффициентов k и l. Так как $x=\frac{z_0}{8}$ и $y=\frac{3z_0}{8}$ при $t=1$, то подстановка этих значений в выражения для x и y приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{k}{k+l}\left(1-e^{-(k+l)}\right)=\dfrac{1}{8};\\[2mm] \dfrac{l}{k+l}\left(1-e^{-(k+l)}\right)=\dfrac{3}{8}.\end{cases}$$

Сложив почленно эти уравнения, получим

$$1-e^{-(k+l)}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$e^{-\ k+l}\ = 2^{-2} \text{ и } k+l=\ln 2.$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, найдем $l=3k$.

Следовательно, $k=\dfrac{1}{4}\ln 2,\ l=\dfrac{3}{4}\ln 2.$

Таким образом, искомое решение определяется формулами:

$$x=\frac{z_0}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right);\ y=\frac{3z_0}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right).$$

Задачи для самостоятельной работы

Составить дифференциальные уравнения из условий следующих задач и решить их.

4.1. Найти кривую, проходящую через точку $M\ \ 1,3\ $ и для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

4.2. Найти такую кривую, проходящую через точку $M\ \ 0,3\ $, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, уменьшенной на две единицы.

4.3. Через сосуд емкостью a литров, наполненный водным раствором соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени вливается b литров чистой воды и вытекает такое же количество раствора. Найти закон, по которому изменяется содержание соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд.

4.4. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки $1{,}5$ м/с, скорость ее через 4 с 1 м/с. Когда скорость уменьшится до $0{,}01$ м/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

4.5. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 5 л в минуту. Поступающая в бак вода перемешивается с имеющимся раствором, и смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в баке через 1 час?

5 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На практике очень часто встречается ситуация, когда проинтегрировать дифференциальное уравнение известными методами невозможно. В этом случае используют приближенные методы. Заметим, что приближенные методы позволяют найти лишь частное решение такого уравнения при заданных начальных условиях.

Приближенные методы решения дифференциальных уравнений можно разделить на две группы:

1) аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;

2) численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

В дальнейшем предполагаем, что для рассматриваемых уравнений выполнены условия существования и единственности решения.

Рассмотрим один аналитический метод приближенного решения дифференциальных уравнений – с помощью рядов, и два численных – метод Эйлера и метод Рунге – Кутта.

5.1 Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Метод последовательного дифференцирования

Этот метод состоит в том, что частное решение дифференциального уравнения ищется в виде разложения в степенной ряд Тейлора:

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \ .$$

Коэффициенты этого ряда отыскиваются путем последовательного дифференцирования данного дифференциального уравнения.

Пример 5.1. Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения $y' = 2xy^2$, $y(1) = 1$.

Решение. Ищем решение уравнения в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$:

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots \ .$$

Первый коэффициент ряда известен из начального условия. Подставляя в дифференциальное уравнение $x = 1$, находим $y'(1) = 2 \cdot 1 \cdot 1^2 = 2$. Для отыскания y'' дифференцируем обе части дифференциального уравнения: $y'' = 2y^2 + 4xyy'$. При $x = 1$ получаем $y''(1) = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 10$. Подставим значения производных в степенной ряд, получим приближенное решение дифференциального уравнения в виде частичной суммы ряда:

$$y \approx 1 + 2\left(x-1\right) + 5\left(x-1\right)^2 .$$

Метод неопределенных коэффициентов

По этому методу частное решение дифференциального уравнения ищется в виде разложения в степенной ряд с неопределенными коэффициентами:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \ .$$

Коэффициенты находят подстановкой ряда в дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $x - x_0$ в обеих частях полученного равенства.

Пример 5.2. Проинтегрировать уравнение $y'' - xy = 0$.

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \ .$$

Дифференцируем этот ряд:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots;$$

$$y'' = 2\cdot 1\cdot a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots\ .$$

Подставляя y и y'' в исходное уравнение, получаем

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots - x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots) \equiv 0.$$

Соберем члены с одинаковыми степенями x:

$$2a_2 + (3\cdot 2a_3 - a_0)x + (4\cdot 3a_4 - a_1)x^2 + \ldots$$

$$+ (n(n-1)a_n - a_{n-3}) + \ldots \equiv 0.$$

Приравниваем нулю все коэффициенты полученного ряда:

$$a_2 = 0, 3\cdot 2a_3 - a_0 = 0, \ldots, n(n-1)a_n - a_{n-3} = 0, \ldots\ .$$

Последовательно находим все коэффициенты искомого разложения (a_0 и a_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных интегрирования):

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{a_0}{3\cdot 2}, a_4 = \frac{a_1}{4\cdot 3},\ a_5 = \frac{a_2}{5\cdot 4} = 0, a_6 = \frac{a_3}{6\cdot 5} = \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}, \ldots$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$y = a_0 + a_1x + \frac{a_0}{3\cdot 2}x^3 + \frac{a_1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \ldots =$$

$$= a_0\left(1 + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \ldots\right).$$

Задачи для самостоятельной работы

В следующих уравнениях найти первые четыре члена разложения в ряд решения дифференциального уравнения:

5.1.1. $y' = xy + e^y$; $y(0) = 0$.

5.1.2. $y' = x^2 + y^3$; $y(1) = 1$.

5.1.3. $y'' = xy' - y + e^x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

5.1.4. $y'' = xy^2 - y'$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.

5.2 Метод Эйлера

Пусть требуется решить задачу Коши: найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{5.1}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

При численном решении уравнения (5.1) задача ставится так: в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ найти приближения y_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ для значений точного решения $y(x_i)$.

Разность $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ во многих случаях принимают постоянной, равной h и называют шагом сетки, тогда

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, ..., n). \tag{5.2}$$

Метод Эйлера для решения указанной задачи Коши основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y),$$

где $\Delta y = y(x+h) - y(x)$, $\Delta x = (x+h) - x = h.$

Приближенные значения y_i в точках $x_i = x_0 + ih$ вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, ..., n). \tag{5.3}$$

При этом искомая интегральная кривая $y = y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2...$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ (рисунок 5.1).

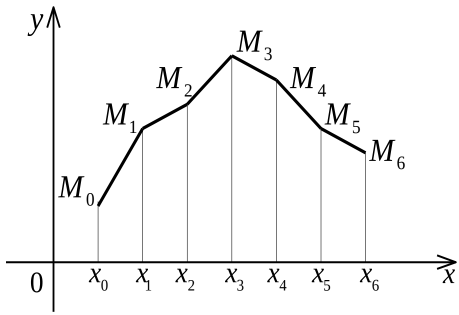

Рисунок 5.1

Каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемое ломаной Эйлера, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (5.1), которая проходит через точку M_i.

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений, а также на обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков.

Пример 5.3. Применяя метод Эйлера, составить на отрезке $[0; 0,5]$ таблицу значений решения уравнения $y' = y + x^2$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, выбрав шаг $h = 0,1$.

Решение. По формуле (5.2) находим точки $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; $x_3 = 0,3$; $x_4 = 0,4$; $x_5 = 0,5$. Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, находим в соответствии с формулой (5.3). Результаты вычислений отражены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

k	x_i	y_i	x_i^2	$f(x_i, y_i) = y_i + x_i^2$	$hf(x_i, y_i)$	$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
0	0	1	0	1	0,1	1,1
1	0,1	1,1	0,01	1,11	0,111	1,211
2	0,2	1,211	0,04	1,251	0,1251	1,3361
3	0,3	1,3361	0,09	1,4261	0,1426	1,4787
4	0,4	1,4787	0,16	1,6387	0,1639	1,6426
5	0,5	1,6426				

Задачи для самостоятельной работы

Приняв $h = 0,1$, методом Эйлера решить указанную задачу Коши для каждого из уравнений на отрезке $[0; 1]$:

5.2.1. $y' = x + y^2$; $y(0) = 2$.

5.2.2. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 1$.

5.2.3. $y' = 2x + y^2$; $y(0) = 1$.

5.2.4. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 1$.

5.3 Метод Рунге – Кутта

Метод Рунге – Кутта – один из наиболее употребительных методов повышенной точности.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{5.4}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{5.5}$$

Обозначим через y_i приближенное значение искомого решения в точке x_i. По методу Рунге – Кутта вычисление приближенного значения y_{i+1} в следующей точке $x_{i+1} = x_i + h$ производится по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i\,, \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right), \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i)\,, \\ K_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right), \\ K_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right), \\ K_4^{(i)} &= hf\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Вычисления удобно располагать в таблице 5.2.

Таблица 5.2

I	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$

	$x_0+\dfrac{h}{2}$ $x_0+\dfrac{h}{2}$ x_0+h	$y_0+\dfrac{K_1^{(0)}}{2}$ $y_0+\dfrac{K_2^{(0)}}{2}$ $y_0+K_3^{(0)}$	$K_2^{(0)}$ $K_3^{(0)}$ $K_4^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$ $2K_3^{(0)}$ $K_4^{(0)}$
				$\dfrac{1}{6}\sum=\Delta y_0$
1	x_1	$y_1=y_0+\Delta y_0$		

Метод Рунге – Кутта применим также к системам дифференциальных уравнений первого порядка, а также к обыкновенным дифференциальным уравнениям высших порядков.

Пример 5.4. Найти решение задачи Коши $y'=y-x^2,\quad y\ 1\ =0$ методом Рунге – Кутта, выбрав шаг $h=0{,}1.$

Решение. Поскольку в данном случае $f\ x,y\ =y-x^2$ и в силу условия $x_0=1,\quad y_0=0,$ то $f\ x_0,y_0\ =y_0-x_0^2=0-1=-1.$ По формулам (4.7) находим:

$$K_1^{(0)}=hf\ x_0,y_0\ =0{,}1(-1)=-0{,}1;$$

$$K_2^{(0)}=0{,}1f\ 1{,}05;-0{,}05\ =0{,}1\Big[\ -0{,}05\ -\ 1{,}05\ ^2\Big]=0{,}1152;$$

$$K_3^{(0)}=0{,}1f\ 1{,}05;-0{,}0576\ =0{,}1\Big[\ -0{,}0576\ -\ 1{,}05\ ^2\Big]=-0{,}1160;$$

$$K_4^{(0)}=0{,}1f\ 1{,}1;-0{,}1160\ =0{,}1\Big[\ -0{,}1160\ -\ 1{,}1\ ^2\Big]=-0{,}1326.$$

По формуле (5.6) вычислим

$$\Delta y_0=\frac{1}{6}\Big[\ -0{,}1\ +2\ -0{,}1152\ +2\ -0{,}1160\ +\ -0{,}1326\ \Big]=-0{,}1158.$$

Значение y_1 вычислим по формуле $y_1=y_0+\Delta y_0$ (см. формулу (5.6) при $i=0$): $y_1=0+\ -0{,}1158\ =-0{,}1158.$ Таким образом, получено приближенное значение $y_1=-0{,}1158$ при $x_1=1{,}1.$

Аналогично вычисляются дальнейшие приближения.

Результаты вычислений приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3

I	X	y	$K = hf(x, y)$	Δy
0	1 1,05 1,05 1,1	0 –0,05 –0,0576 –0,1160	–0,1 –0,1152 –0,1160 –0,1326	–0,1 –0,2304 –0,232 –0,1326
				$\frac{1}{6}(-0,695) = -0,1158$

Окончание таблицы 5.3

I	X	y	$K = hf(x, y)$	Δy
1	1,1 1,15 1,15 1,2	–0,1158 –0,1821 –0,1910 –0,2672	–0,1326 –0,1505 –0,1514 –0,1707	–0,1326 –0,301 –0,3028 –0,1707
				$\frac{1}{6}(-0,9071) = -0,1511$
2	1,2 1,25 1,25 1,3	–0,2659 –0,3512 –0,3616 –0,4583	–0,1706 –0,1914 –0,1924 –0,2148	–0,1706 –0,3828 –0,3848 –0,2148
				$\frac{1}{6}(-1,153) = -0,1922$
3	1,3 1,35 1,35 1,4	–0,4584 –0,5858 –0,5778 –0,6984	–0,2148 –0,2388 –0,2400 –0,2658	–0,2148 –0,4776 –0,4800 –0,2658
				$\frac{1}{6}(-1,4382) = -0,2397$
4	1,4 1,45 1,45 1,5	–0,6981 –0,8310 –0,8448 –0,9928	–0,2658 –0,2934 –0,2947 –0,3243	–0,2658 –0,5868 –0,5894 –0,3243
				$\frac{1}{6}(-1,7663) = -0,2944$
5	1,5	–0,9925		

Итак, получена таблица 5.4 приближенных значений решения задачи Коши на отрезке [1; 1,5].

Таблица 5.4

x_i	1	1,1	1,2	1.3	1,4	1,5
y_i	0	–0,1158	–0,2659	–0,4584	–0,6981	–0,9925

Пример 5.5. Проинтегрировать уравнение $x^2y' - xy = 1$ при начальном условии $y(1) = 0$ в промежутке $1; 2$ с шагом $h = 0,2$ методами Эйлера и Рунге – Кутта. Сравнить полученные решения с точным решением уравнения, изобразив графики трех решений.

Решение. Разрешим данное уравнение относительно производной. Имеем $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. Здесь $f(x; y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. Решим данное уравнение методом Эйлера. По формуле (5.2) находим точки $x_0 = 1;$ $x_1 = 1,2;$ $x_2 = 1,4;$ $x_3 = 1,6;$ $x_4 = 1,8;$ $x_5 = 2.$ Значения искомой функции $y = y(x),$ удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, находим в соответствии с формулой (5.3). Результаты вычислений отражены в таблице 5.5.

Таблица 5.5

k	x_i	y_i	x_i^2	$f(x_i, y_i) = \dfrac{y_i}{x_i} + \dfrac{1}{x_i^2}$	$hf(x_i, y_i)$	$y_{i+1} =$ $= y_i + hf\ \ x_i, y_i$
0	1	0	1	1	0,2	0,2
1	1,2	0,2	1,44	0,8611	0,1722	0,3722
2	1,4	0,3722	1,96	0,7761	0,1552	0,5274
3	1,6	0,5274	2,56	0,7203	0,1441	0,6715
4	1,8	0,6715	3,24	0,6817	0,1363	0,8078
5	2	0,8078				

Теперь решим данное уравнение методом Рунге – Кутта. Находим числа:

$$K_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,2 \cdot \left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1^2} \right) = 0,2;$$

$$K_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2} \right) = 0,2 \cdot \left(\frac{0,1}{1,1} + \frac{1}{1,1^2} \right) \approx 0,1835;$$

$$K_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2} \right) \approx 0,2 \cdot \left(\frac{0,0917}{1,1} + \frac{1}{1,1^2} \right) \approx 0,182;$$

$$K_4^{(0)} = hf\ \ x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}\ \ \approx 0,2 \cdot \left(\frac{0,182}{1,2} + \frac{1}{1,2^2} \right) \approx 0,1692.$$

Следовательно, $\Delta y_0 = \frac{1}{6}\cdot\left(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)}\right) \approx 0{,}183$, тогда $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0{,}183 = 0{,}183$.

Аналогичным образом находим

$$K_1^{(1)} = hf(x_1, y_1) = 0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}183}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}2^2}\right) \approx 0{,}1694;$$

$$K_2^{(1)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}\right) = 0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}2677}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2}\right) \approx 0{,}1595;$$

$$K_3^{(1)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}\right) \approx 0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}2628}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2}\right) \approx 0{,}1588;$$

$$K_4^{(1)} = hf\left(x_1 + h, y_1 + K_3^{(1)}\right) \approx 0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}3418}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}4^2}\right) \approx 0{,}1509.$$

Следовательно, $\Delta y_1 = \frac{1}{6}\cdot\left(K_1^{(1)} + 2K_2^{(1)} + 2K_3^{(1)} + K_4^{(1)}\right) \approx 0{,}1595$, тогда $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0{,}183 + 0{,}1595 = 0{,}3425$.

Аналогично вычисляются дальнейшие приближения.

Результаты вычислений приведены в таблице 5.6.

Таблица 5.6

I	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
0	1 1,1 1,1 1,2	0 0,1 0,0917 0,182	0,2 0,1835 0,182 0,1692	0,2 0,367 0,364 0,1692
				$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\cdot 1{,}1002 = 0{,}1834$
1	1,2 1,3 1,3 1,4	0,1834 0,2681 0,2632 0,3422	0,1695 0,1596 0,1588 0,1509	0,1695 0,3192 0,3176 0,1509
				$\Delta y_1 = \frac{1}{6}\cdot 0{,}9572 = 0{,}1595$

Окончание таблицы 5.6

I	x	y	$K = hf(x, y)$	Δy
2	1,4 1,5 1,5 1,6	0,3429 0,418 0,4148 0,4867	0,1510 0,1446 0,1442 0,1390	0,1510 0,2892 0,2884 0,1390
				$\Delta y_2 = \frac{1}{6} \cdot 0,8676 = 0,1446$
3	1,6 1,7 1,7 1,8	0,4871 0,5566 0,5544 0,6215	0,1390 0,1347 0,1344 0,1308	0,1390 0,2694 0,2688 0,1308
				$\Delta y_3 = \frac{1}{6} \cdot 0,808 = 0,1347$
4	1,8 1,9 1,9 2	0,6218 0,6872 0,6856 0,7494	0,1308 0,1277 0,1276 0,1249	0,1308 0,2554 0,2552 0,1249
				$\Delta y_2 = \frac{1}{6} \cdot 0,7663 = 1,1277$
5	2	0,7495		

Теперь найдем точное решение задачи Коши. Сначала найдем общее решение уравнения

$$x^2 y' - xy = 1 \text{ или } y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Решение данного линейного уравнения будем искать в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Получаем уравнение

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Группируем второе с третьим слагаемые и выносим общий множитель.

$$u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = \frac{1}{x^2}. \tag{5.8}$$

Функцию $v = v(x)$ подбираем таким образом, чтобы выражение в скобках в последнем уравнении было равно 0, т. е. решаем уравнение (с разделяющимися переменными) $v' - \frac{v}{x} = 0$.

Ищем одно из частных решений, когда $C = 0$.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0, \ \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \ \ln|v| = \ln|x|, \ v = x.$$

Подставляем найденную функцию $v = x$ в уравнение (5.8): $u'x = \frac{1}{x^2}$.

Ищем общее решение $u = u(x)$ этого дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} x = \frac{1}{x^2}, \ du = \frac{1}{x^3} dx,$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x^3},$$

$$u = \frac{x^{-2}}{-2} + C \text{ или } u = C - \frac{1}{2x^2}.$$

Записываем общее решение исходного уравнения

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{2x^2} \right) x.$$

Найдем частное решение, подставив начальные условия

$$y(1) = 0, \ C - \frac{1}{2} = 0, \ C = \frac{1}{2}.$$

Получаем точное решение задачи Коши данного дифференциального уравнения

$$y_{\text{точн.}} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \text{ или } y = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

Составим таблицу 5.7 значений точного и приближенных значений решения дифференциального уравнения, полученных методами

Эйлера и Рунге – Кутта в точках $x_0 = 1$, $x_1 = 1,2$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,6$, $x_4 = 1,8$, $x_5 = 2$.

Таблица 5.7

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$y_{\text{точн}}$	0	0,183	0,3429	0,4875	0,6222	0,75
$y_{\text{Эйлера}}$	0	0,183	0,3722	0,5274	0,6715	0,8078
$y_{\text{Р.–К}}$	0	0,1834	0,3429	0,4871	0,6218	0,7495

Построим графики точного решения и приближенных решений методом Эйлера и методом Рунге – Кутта (рисунок 5.2).

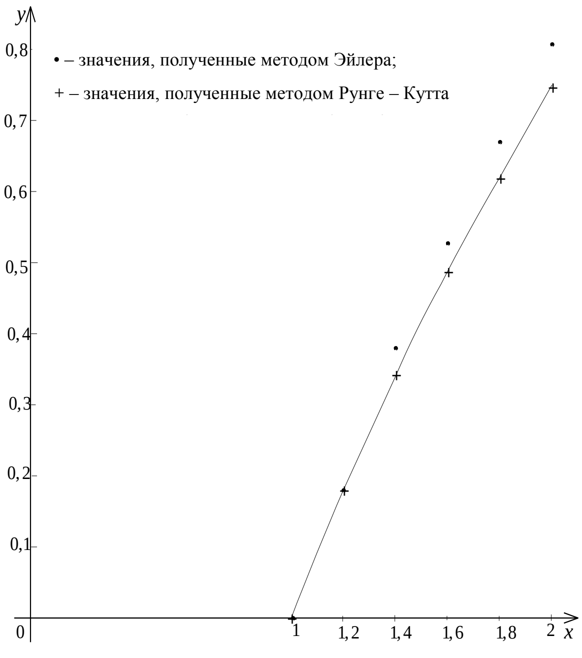

Рисунок 5.2

6 САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Самостоятельная работа № 1

Определить, к какому типу относятся уравнения. Указанное уравнение решить.

Вариант 1

1. $y' + xy = x^2$.
2. $(x^2 y + x^2 \cos y)dx + e^x y dy = 0$.
3. $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$.
4. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$.

Решить однородное уравнение.

Вариант 2

1. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.
2. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.
4. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

Решить уравнение с разделяющимися переменными.

Вариант 3

1. $y' \cos x = \dfrac{y}{\ln y}$.
2. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2}$.

3. $y' = \dfrac{x}{y}\left(e^{\frac{y}{x}} + 1\right).$

4. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x.$

Решить уравнение Бернулли.

Вариант 4

1. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

2. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$

3. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1+e^x)\dfrac{dy}{\cos^2 y} = 0.$

4. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$

Решить линейное уравнение.

Вариант 5

1. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}.$

2. $xyy' + x^2 - 1 = 0.$

3. $xyy' = y^2 + 2x^2.$

4. $y' + xy = \sqrt{y}.$

Решить линейное уравнение.

Вариант 6

1. $x^2 y' + xy = 1.$

2. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}.$

3. $(xy^2 + y^2)dy + \quad x^2 - x^2 y \quad dx = 0.$

4. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$

Решить линейное уравнение.

Вариант 7

1. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0.$

2. $xy' + 2y = x^3.$

3. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0.$

4. $y'+\frac{2y}{x}=3x^2y^4.$

Решить линейное уравнение.

Вариант 8

1. $\operatorname{tg} x dy-(1+y)dx=0.$

2. $y'x+y=-xy^2.$

3. $(y-x)ydx+x^2dy=0.$

4. $y'-\frac{y}{x}=3x.$

Решить уравнение Бернулли.

Вариант 9

1. $y'+xy=x.$

2. $(1+y^2)y'-y=0.$

3. $y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$

4. $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}.$

Решить однородное уравнение.

Вариант 10

1. $y'+2xy=e^{-x^2}.$

2. $x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0.$

3. $(y^2-x^2)dx+2xydy=0.$

4. $y'-\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}.$

Решить линейное уравнение.

Самостоятельная работа № 2

Найти общее решение дифференциального уравнения:

Вариант 1

1. $1+e^{x}\quad y' = ye^{x}$.

2. $y-\sqrt{xy}\quad dx = xdy$.

3. $y'-6y = 8xe^{6x}$.

Вариант 2

1. $ydx+\quad\sqrt{xy}-\sqrt{x}\quad dy = 0$.

2. $xy'+y = xy^{2}\ln x$.

3. $xy' = 5y+x$.

Вариант 3

1. $y'+y\operatorname{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$.

2. $y'-xy^{2} = 2xy$.

3. $2x\cos^{2}ydx+\quad 8\sqrt[3]{y}-x^{2}\sin 2y\quad dy = 0$.

Вариант 4

1. $y'+\dfrac{y}{x} = 1+2\ln x$.

2. $2xy-3\quad dx+\quad x^{2}+1\quad dy = 0$.

3. $y-1\;^{2}dx+\;1-x\;^{3}dy = 0$.

Вариант 5

1. $y'+4xy = 2xe^{-x^{2}}\sqrt{y}$.

2. $1+x^{2}\quad y' = xy-y\sqrt{1+x^{2}}$.

3. $xy' = y+x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

Вариант 6

1. $x^{2}+y-4\quad dx+\quad x+y+e^{y}\quad dy = 0$.

2. $xy'-y = \sqrt{y^{2}+2x^{2}}$.

3. $y'-7y = 8e^{2x}$.

Вариант 7

1. $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$.

2. $xy' - y \;\; \sin\dfrac{y}{x} = x$.

3. $\ln x \cdot \sin^3 y dx + x \cos y dy = 0$.

Вариант 8

1. $y' - 7y = 8e^{3x}$.

2. $4x^2 - 3xy - y^2 \;\; dx + x^2 dy = 0$.

3. $e^{x-y} - e^{-y} \;\; dx + \;\; e^{x+y} + e^x \;\; dy = 0$.

Вариант 9

1. $e^x + y + \sin y \;\; dx + \;\; e^y + x + x\cos y \;\; dy = 0$.

2. $y' = 2 + \dfrac{y}{x}$.

3. $1 + x^2 \;\; y' = xy - y\sqrt{1 + x^2}$.

Вариант 10

1. $y' = \dfrac{y - 3x^2}{4y - x}$.

2. $y^2 dx = \;\; x^2 - xy \;\; dy = 0$.

3. $\sin^2 y \cdot \operatorname{ctg} x dx + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} y dy = 0$.

Самостоятельная работа № 3

В задаче 1 проверить, что данная функция служит решением дифференциального уравнения; в задаче 2 указать тип уравнения и метод понижения порядка; в задаче 3 найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Вариант 1

1. 1. $y = e^x(x-1),\;\; xy'' - y' = e^x x^2$.

2. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.

3. $y'' = x\ln x,\ \ y(1) = y'(1) = 0$.

Вариант 2

1. $y = \operatorname{arctg} x,\ \ y'' + 2x(y')^2 = 0$.

2. $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0$.

3. $y'' = xe^x,\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

Вариант 3

1. $y = x(\ln x - 1),\ \ y''x\ln x - y' = 0$.

2. $4y' + (y'')^2 = 4xy''$.

3. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2},\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

Вариант 4

1. $y = \dfrac{\sin x}{x},\ \ y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$.

2. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

3. $y'' = \dfrac{x}{x+1},\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

Вариант 5

1. $y = \dfrac{1}{2}x\ln^2 x,\ \ y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0$.

2. $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$.

3. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x},\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Вариант 6

1. $y = e^{x^2},\ \ xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$.

2. $x^2y'' + xy' = 1$.

3. $y'' = \dfrac{1}{x},\ \ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

Вариант ***7***

1. $y = \arcsin^2 x,\ \ (1-x^2)y'' - xy' = 2$.

2. $y' + xy'' = 2yy'$.

3. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ \ y\left(\dfrac{p}{4}\right) = -\dfrac{\ln 2}{2},\ y'\left(\dfrac{p}{4}\right) = 1$.

Вариант 8

1. $y = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ \ 2yy'' - 3(y')^2 - 4y^2 = 0$.

2. $x^2 y'' + xy' = \cos x$.

3. $y'' = \dfrac{2x+1}{x},\ \ y(1) = y'(1) = 2$.

Вариант 9

1. $y = e^{\frac{x+1}{x}},\ \ y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0$.

2. $y' + xy'' = y + xy'$.

3. $y'' = \dfrac{x-1}{x},\ \ y(1) = y'(1) = 0$.

Вариант 10

1. $y = 2\ln x,\ \ y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

2. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

3. $y'' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ \ y(0) = y'(0) = 0$.

Самостоятельная работа № 4

В задаче 1 найти частное решение дифференциального уравнения, а в задачах 2 и 3 – общее решение.

Вариант 1

1. $y'' = x + \sin x,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 0.$

2. $1 - x^2 \ \ y'' - xy' = 2.$

3. $y'' + 2y \ \ y'^{\ 3} = 0.$

Вариант 2

1. $y'' = \cos^2 x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -\dfrac{1}{8}.$

2. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

3. $2yy'' = {y'}^{2}.$

Вариант 3

1. $y'' = \cos x + e^{-x},\ \ y(0) = -e^{-p},\ \ y'(0) = -1.$

2. $y'' x \ln x - y' = 0.$

3. $yy'' = {y'}^{2} - {y'}^{3}.$

Вариант 4

1. $y'' = e^{-3x} - x,\ y(0) = \dfrac{1}{9},\ y'(0) = 1.$

2. $2xy'y'' = {y'}^{2} - 1.$

3. $2yy'' = {y'}^{2} + 1.$

Вариант 5

1. $y'' = \cos 4x,\ y(0) = \dfrac{1}{16},\ y'(0) = 1.$

2. $y'' \operatorname{tg} x - y' - 1 = 0.$

3. $yy'' + {y'}^{2} = 0.$

Вариант 6

1. $y'' = \dfrac{1}{x^2},\ y(1) = 3,\ y'(1) = 1.$

2. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x.$

3. $y'' + \dfrac{2{y'}^{2}}{1-y} = 0.$

Вариант 7

1. $y'' = 4\cos 2x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

2. $x^4 y'' + x^3 y' = 1.$

3. $yy'' - 2\ \ y'\ ^{2} = 0.$

Вариант 8

1. $y'' = \dfrac{6}{x^3},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 5.$

2. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x\ \ x-1\ .$

3. $yy'' = \ \ y'\ ^{2}.$

Вариант 9

1. $y'' = e^{\frac{x}{2}} + 1,\ y(0) = 8,\ y'(0) = 5.$

2. $x\ \ y'' + 1\ + y' = 0.$

3. $\ \ y'\ ^{2} + 2yy'' = 0.$

Вариант 10

1. $y'' = x^2 - \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

2. $2xy''y' = \ \ y'\ ^{2} - 4.$

3. $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0.$

Самостоятельная работа № 5

В задачах 1 и 2 найти общее решение дифференциального уравнения, а в задаче 3 – частное решение.

Вариант 1

1. $y'' + y' - 12y = 0.$

2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$

3. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 5.$

Вариант 2

1. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

2. $y'' + 4 = 0.$

3. $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$

Вариант 3

1. $y'' - y' - 12y = 0.$

2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$

3. $y'' - 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$

Вариант 4

1. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

2. $y'' - 3y' - 10y = 0.$

3. $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$

Вариант 5

1. $y'' + 3y' - 10y = 0.$

2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$

3. $y'' + 3y' = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -3.$

Вариант 6

1. $2y'' - 7y' - 4y = 0.$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

3. $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0.$

Вариант 7

1. $y'' + 2y = 0.$

2. $y'' + 4y' + 20y = 0.$

3. $y'' - 4y' = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 8.$

Вариант 8

1. $3y'' - 17y' - 6y = 0.$

2. $y'' + 16y = 0.$

3. $y'' - y' = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 3.$

Вариант 9

1. $y'' + 6y' + 25y = 0.$

2. $y'' - 3y' - 10y = 0.$

3. $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = -6.$

Вариант 10

1. $y'' - 2y' + y = 0.$

2. $y'' + 8y' + 20y = 0.$

3. $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

Самостоятельная работа № 6

В задаче 1 найти общее решение уравнения, в задаче 2 записать вид частного решения с неопределенного коэффициентами, в задаче 3 составить линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, если известны корни характеристического уравнения, и написать его общее решение.

Вариант 1

1. $y'' + 4y' + 4y = 0.$
2. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x.$
3. $k_1 = 1 - 2i,\ k_2 = 1 + 2i.$

Вариант 2

1. $y'' + 4y' + 5y = 0.$
2. $y'' - 4y' + 4y = x \sin 2x.$
3. $k_1 = -3,\ k_2 = 4.$

Вариант 3

1. $2y'' - y' - 6y = 0.$
2. $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}.$
3. $k_1 = k_2 = 5.$

Вариант 4

1. $y'' + 2y' + 5y = 0.$
2. $y'' + y' - 12y = x^2 e^{3x}.$
3. $k_1 = -3,\ k_2 = 5.$

Вариант 5

1. $y'' - 4y' = 0.$
2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x.$
3. $k_1 = -3,\ k_2 = -1.$

Вариант 6

1. $4y'' + 7y' - 2y = 0.$

2. $y'' + 5y' = x^2 - 1.$

3. $k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i.$

Вариант 7

1. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

2. $y'' + 3y' - 4y = xe^x.$

3. $k_1 = 0, k_2 = 3.$

Вариант 8

1. $y'' - 3y' - 4y = 0.$

2. $y'' + 2y' = x^3 - 5.$

3. $k_1 = -\dfrac{1}{2}, k_2 = 4.$

Вариант 9

1. $y'' - 6y' + 13y = 0.$

2. $y'' + y' - 6y = x\cos 2x.$

3. $k_1 = k_2 = 5.$

Вариант 10

1. $2y'' + y' - 6y = 0.$

2. $y'' - 3y' = 2x - x^2.$

3. $k_1 = 4 + i, k_2 = 4 - i.$

Самостоятельная работа № 7

В задаче 1 найти частное решение дифференциального уравнения, в задачах 2 и 3 – общее решение.

Вариант 1

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

2. $y'' - y' - 6y = 9\cos x - \sin x.$

3. $y'' + y' - 12y = \ 16x + 26 \ e^{4x}.$

Вариант 2

1. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$
2. $y'' + 3y' + 2y = \cos x - 3\sin x.$
3. $y'' + 3y' - 4y = 3xe^{-4x}.$

Вариант 3

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' + y = -12\cos x - 9\sin 2x.$
3. $y'' - 6y' + 9y = \ \ x - 2\ \ e^{3x}.$

Вариант 4

1. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x.$
3. $y'' - 2y' + 2y = \ \ 2x - 3\ \ e^{4x}.$

Вариант 5

1. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$
2. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x.$
3. $y'' - 4y' + 5y = -2xe^{x}.$

Вариант 6

1. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3{,}2.$
2. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x.$
3. $y'' + 3y' + 2y = \ \ 3x - 7\ \ e^{-x}.$

Вариант 7

1. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \dfrac{4}{3},\ y'(0) = \dfrac{1}{27}.$
2. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x.$
3. $y'' - 3y' + 2y = \ \ 34 - 12x\ \ e^{-x}.$

Вариант 8

1. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5,\ y(0) = 8,\ y'(0) = -4.$
2. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x.$

3. $y'' + 6y' + 9y = \ 48x + 8 \ e^{x}$.

Вариант 9

1. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \ y(0) = -1, \ y'(0) = 1$.
2. $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$.
3. $y'' - 3y' + 2y = \ 3 - 4x \ e^{3x}$.

Вариант 10

1. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 2$.
2. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$.
3. $y'' + y' - 6y = \ 6x + 1 \ e^{3x}$.

Самостоятельная работа № 8

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений (двумя способами):

Вариант 1. $\begin{cases} x' = 5x - y; \\ y' = 3x - 3y. \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} x' = 3x + y; \\ y' = -4x - 2y. \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} x' = 3x - 2y; \\ y' = 5x - 4y. \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} x' = 5x - 2y; \\ y' = 7x - 4y. \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} x' = x - 2y; \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

Вариант 6. $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} x' = 4x - 2y; \\ y' = 3x - y. \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} x' = 2x - 4y; \\ y' = x - 3y. \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} x' = x + y; \\ y' = 4x + y. \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 4x - y. \end{cases}$

7 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

В задачах 1, 3, 4 найти общие интегралы дифференциальных уравнений, в задачах 2, 5 – частные решения, в задаче 6 указать вид частного решения (неопределенные коэффициенты не находить).

Вариант 1

1. $(1+e^x)yy' = e^x$.
2. $y' + 2xy = 2x,\ y(0) = 2$.
3. $y''\mathrm{tg}\, x = y' + 1$.
4. $y''' = -x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x$.
5. $y'' + 16y = (34x+13)e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0$.
6. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = xe^{-x}$.

Вариант 2

1. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

2. $y' + \dfrac{y}{x+1} = 6x,\ y(0) = 2.$

3. $xy'' + 2y' = 0.$

4. $y''' = e^{2x} - 3\cos 3x.$

5. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

6. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = \sin 2x.$

Вариант 3

1. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}.$

2. $xy' + y = e^{-x},\ y(1) = -\dfrac{1}{e}.$

3. $x(y'' + 1) + y' = 0.$

4. $y''' = \dfrac{1}{x^3} - \sin 2x.$

5. $y'' + 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = -2.$

6. $y^{(4)} - y = \cos x.$

Вариант 4

1. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}.$

2. $y' - 3x^2 y = x^2,\ y(0) = 0.$

3. $y'' y^3 = 1.$

4. $y''' = \dfrac{3}{x^4} - \cos\dfrac{1}{2}x.$

5. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = y'(0) = 2.$

6. $y''' + y' = x\cos x.$

Вариант 5

1. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0.$

2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{xy}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x^2},\ y(0) = 0.$

3. $y'' x \ln x - y' = 0.$

4. $y''' = e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin 2x.$

5. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

6. $y^{(4)} + y'' = x^3.$

Вариант 6

1. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$

2. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0, \; y(0) = -2.$

3. $y''(2y-1) + 2(y')^2 = 0.$

4. $y''' = 2\sin\frac{x}{2} - \cos x.$

5. $y'' - 10y' + 25y = 0, \; y(0) = 0; \; y'(0) = 1.$

6. $2y^{(4)} + 4y''' = xe^{2x}.$

Вариант 7

1. $x^2 y' + xy = 1.$

2. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0, \; y(1) = 0.$

3. $y''(x-1) - y' = 0.$

4. $y''' = x + \sin 2x.$

5. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0; \; y'(0) = 1.$

6. $y''' - y' = e^x \sin x.$

Вариант 8

1. $y'x + y = -xy^2.$

2. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \; y(1) = 1.$

3. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0.$

4. $y^{(4)} = 1 - \cos\frac{x}{2}.$

5. $y'' + 25y = 0, \; y(0) = 1; \; y'(0) = 0.$

6. $y^{(4)} - y'' = (x+1)e^x.$

Вариант 9

1. $\operatorname{tg} x dy - (1 + y)dx = 0.$

2. $y' + 2\dfrac{y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}},\ y(0) = 0.$

3. $yy'' - (y')^2 = 0.$

4. $y''' = 2 - x + e^x.$

5. $y'' - 4y' + 4y = 0,\quad y(0) = 2;\ y'(0) = 1.$

6. $y''' + y' = x \sin 2x.$

Вариант 10

1. $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0.$

2. $xy' + 2y = x^3,\ y(-1) = 1.$

3. $y''(3y - 1) - 3(y')^2 = 0.$

4. $y^{(4)} = e^{2x} - 1.$

5. $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1;\ y'(0) = 6.$

6. $2y''' - 3y'' = x \cos x.$

Вариант 11

1. $y' \sin x = y \ln y.$

2. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1.$

3. $yy'' - (y')^2 = 0.$

4. $y''' = 12x - \sin 2x.$

5. $y'' + 4y' + 13y = 0,\quad y(0) = 2;\ y'(0) = 1.$

6. $y^{(4)} + y''' = \cos x.$

Вариант 12

1. $y' - \dfrac{y}{x} = -x.$

2. $y^2 + x^2 y' = xyy',\ y(3) = 4.$

3. $y'' = 4y'.$

4. $y^{(4)} = 16e^{2x} - 24x^2 + 36.$

5. $y'' + 6y' + 9y = 0,\ y(0) = -2;\ y'(0) = 5.$

6. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$

Вариант 13

1. $(1 + y^2)dx + xydy = 0.$

2. $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2}y = 0,\ y(1) = 2.$

3. $2xy'' = y'.$

4. $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}.$

5. $3y'' + 7y' - 6y = 0,\ y(0) = 4;\ y'(0) = -1.$

6. $y''' - y'' + y' - y = xe^x.$

Вариант 14

1. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$

2. $2x^2dy = (x^2 + y^2)dx,\ y(-1) = 1.$

3. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x.$

4. $y''' = 27e^{3x} + 120x^3.$

5. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 2;\ y'(0) = 3.$

6. $y''' + y'' = x^2 - 4.$

Вариант 15

1. $(1 + y^2)dx = xdy.$

2. $y' + y = e^x,\ y(0) = 1.$

3. $x^2y'' + xy' = 1.$

4. $y''' = 24x^2 - \cos 2x.$

5. $y'' + 2y' - 8y = 0,\ y(0) = 0;\ y'(0) = 12.$

6. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = xe^{-x}.$

8 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Задача 1

Решить дифференциальное уравнение первого порядка.

Варианты:

1. $(-x+y)dx+(-x-y)dy=0$.
2. $y^2-(xy-x^2)y'=0$.
3. $(x-y)dx+(-x+2y)dy=0$.
4. $xy'-y=x\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$.
5. $ydx+(2x+2y)dy=0$.

6. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

7. $(4x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

8. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.

9. $(x^2 + y^2)dx - 2x^2dy = 0$.

10. $y + \sqrt{xy} = xy'$.

11. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

13. $(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0$.

14. $y'x = y - x$.

15. $2y^2dx + (-x^2 - 4xy)dy = 0$.

16. $y'x + x + y = 0$.

17. $(2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$.

18. $y + (2\sqrt{xy} - x)y' = 0$.

19. $(xy + y^2)dx - x^2dy = 0$.

20. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

21. $(-x + 2y)dx - ydy = 0$.

22. $xy - y^2 - x^2y' = 0$.

23. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

24. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

25. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

26. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.

27. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

28. $2\sqrt{xy} - y + xy' = 0$.

29. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$.

30. $x + 2y + xy' = 0$.

Задача 2

Решить дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка.

Варианты:

1. $y'' + y'\mathrm{tg}x = \sin 2x.$
2. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$
3. $y'' - \dfrac{y'}{x-3} = x^2 \quad x-3 \;.$
4. $y'' - \dfrac{y'}{x+4} = x \quad x+4 \;.$
5. $y'' - \dfrac{y'}{x+2} = x^2 \quad x+2 \;.$
6. $xy'' - y' - x^3 = 0.$
7. $x^2 y'' + xy' = 1.$
8. $y'' \sin x - y' \cos x = 1.$
9. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1).$
10. $xy'' - y' = x^5.$
11. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 3x^2.$
12. $xy'' + y' + x = 0.$
13. $4y' + y'' = 4xy''.$
14. $y'' \cos x + y' \sin x = 1.$
15. $y'' - \dfrac{y'}{x+5} = x^2(x+5).$
16. $(x-3)y'' + y' = x.$
17. $x(y''+1) + y' = 0.$
18. $(y''x - y')y' = x^3.$
19. $(x-1)y'' - 2y' = 2.$
20. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x.$

21. $y'' - \dfrac{y'}{x+1} = x(x+1).$

22. $(1-x^2)y'' - xy' = 2.$

23. $xy'' + y' = 4x^3.$

24. $x^3(y')^2 y'' + x^2(y')^3 = 0.$

25. $(x+1)y'' = y' - 1.$

26. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}.$

27. $y'' - \dfrac{y'}{x} = -(y')^2.$

28. $xy'' + y' = 3x^2.$

29. $y'' + y'\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}x.$

30. $y'' - \dfrac{y'}{x+3} = x(x+3).$

Задача 3

Решить дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка.

Варианты:

1. $yy'' + (y')^2 = 1.$
2. $yy'' = y^2 y' + (y')^2.$
3. $y^2 + (y')^2 = 2yy''.$
4. $yy'' + (y')^3 - (y')^2 = 0.$
5. $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0.$
6. $2yy'' = (y')^2.$
7. $2yy'' = 1 + (y')^2.$
8. $yy'' + (y')^2 = 2.$
9. $y''(1+y) = 4(y')^2.$
10. $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y.$

11. $y''(2y+3)-(2y')^2=0.$

12. $2y^3y''+1=0.$

13. $2y''\sqrt{y}-y'=0.$

14. $yy''-y'(1+y')=0.$

15. $yy''-(y')^2=y^4.$

16. $2yy''=(y')^2-y^2.$

17. $(y-1)y''=(2y')^2.$

18. $y''(1+y)=3(y')^2.$

19. $(y+1)y''=(2y')^2.$

20. $yy''=5(y')^2.$

21. $y''+2y(y')^3=0.$

22. $y''y^3=-1.$

23. $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0.$

24. $y''(1+y)=5(y')^2.$

25. $2(y')^2=(y-1)y''.$

26. $y''+y(y')^3=0.$

27. $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}.$

28. $y''(1+y)=(y')^2+y'.$

29. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}.$

30. $yy''-2(y')^2=0.$

Задача 4

Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям.

Варианты:

1. $y''-5y'+6y=e^{-x}(12x-7),\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

2. $y'' + 9y = 6e^{3x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

3. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 3$.

4. $y'' + 6y' + 9y = 10\cos x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

5. $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

6. $y'' + 4y = \cos x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

7. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = 4/3,\ y'(0) = 1/27$.

8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 8$.

9. $y'' + 4y = 4\cos 2x + 4\sin 2x$, $y(p) = 2p,\ y'(p) = 2p$.

10. $y'' - y' = -5e^{-x}(\cos x + \sin x)$, $y(0) = -4,\ y'(0) = 5$.

11. $y'' - 2y' + 2y = 4\sin x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

12. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 2$.

13. $y'' + y = -\cos 2x$, $y(p) = 1,\ y'(p) = 1$.

14. $y'' - y' = 2 - 2x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

15. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-1,5x}$, $y(0) = 3,\ y'(0) = -5,5$.

16. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 16x + 8$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 8$.

17. $y'' - 2y' = e^{2x}$, $y(0) = 0,125,\ y'(0) = 1$.

18. $y'' + y = \sin 3x$, $y(p/2) = 4,\ y'(p/2) = 1$.

19. $y'' + 4y = 10\sin 2x$, $y(0) = 0,25,\ y'(0) = 0$.

20. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

21. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 9$.

22. $2y'' - y' = 1$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

23. $y'' + y' - 2y = \sin x - 3\cos x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

24. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

25. $y'' - y = x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

26. $y'' + 4y = \sin 3x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

27. $y'' + 2y = 6x + 2$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 5$.

28. $y'' - 5y' + 4y = 3e^x$, $y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.

29. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

30. $y'' + 2y' + 2y = \sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Задача 5

Найти решение задачи Коши, используя приближенные методы Эйлера и Рунге – Кутта. Найти точное решение. Изобразить графики всех трех решений в одной системе координат, сделать вывод.

Варианты:

1. $y' = 2x - y,\ y(0) = 3$.
2. $y' = y + 3x,\ y(0) = -1$.
3. $y' = x - 2y,\ y(0) = 0$.
4. $y' = x + 2y,\ y(0) = 2$.
5. $y' = 5x + 2y,\ y(0) = 1$.
6. $y' = x + 5y,\ y(0) = 1$.
7. $y' = 5x + y,\ y(0) = -1$.
8. $y' = 2x - 3y,\ y(0) = 1$.
9. $y' = 3y + x,\ y(0) = -1$.
10. $y' = 3x - 2y,\ y(0) = 0$.
11. $y' = 2x + y,\ y(0) = 1$.
12. $y' = 3y - x,\ y(0) = 1$.
13. $y' = 4y + x,\ y(0) = 2$.
14. $y' = 2x + 4y,\ y(0) = -2$.
15. $y' = 5x - y,\ y(0) = 1$.
16. $y' = x + y,\ y(0) = 0$.
17. $y' = y - x,\ y(0) = 0$.
18. $y' = 2y - x,\ y(0) = 1$.
19. $y' = y - 2x,\ y(0) = 1$.
20. $y' = 2x - 4y,\ y(0) = 1$.
21. $y' = 3x + 2y,\ y(0) = 1$.
22. $y' = 5x - 2y,\ y(0) = 1$.
23. $y' = x - 5y,\ y(0) = 1$.
24. $y' = x - 4y,\ y(0) = 1$.

25. $y' = 2x - 5y,\ \ y(0) = 1$.

26. $y' = x - y,\ \ y(0) = 0$.

27. $2y' + y = \dfrac{x}{y},\ \ y(0) = 0$.

28. $y' = 5x - 3y,\ \ y(0) = 1$.

29. $y' = 5x + 3y,\ \ y(0) = 1$.

30. $y' = 3x - 5y,\ \ y(0) = 1$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.2.1 $\dfrac{x+y}{xy} + \ln\left|\dfrac{x}{y}\right| = C.$ **1.2.2** $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|y^2 - 4\right| = C.$

1.2.3 $x^2 + y^2 = 2\ln|Cx|.$ **1.2.4** $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C.$

1.2.5 $y^3 = 3\ \ x^2 + x + C$. **1.2.6** $x + y + \ln x - \dfrac{y^2}{2} + C = 0.$

1.2.7 $x^2=2+2y^2$. **1.2.8** $y=e^{\frac{p}{4}-\operatorname{arctg}x}$. **1.2.9** $2\ \ x-2\ \ =\ln^2 y$.

1.2.10 $y^2-x^2=12$. **1.2.11** $y=\sqrt{\ln^3\left|1-x^2\right|}$. **1.2.12** $\operatorname{tg}y=1-x+\operatorname{tg}x$.

1.3.1 $\ln\ \ x^2+y^2\ \ =C-2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **1.3.2** $x\ \ y-x\ \ =Cy; y=0$.

1.3.3 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$. **1.3.4** $Cx=e^{-\frac{2x}{y-x}}$. **1.3.5** $\ln\left|Cx\right|=e^{-\frac{y}{x}}$.

1.3.6 $\ln\left|Cx\right|=-e^{-\frac{y}{x}}$. **1.3.7** $y-x=Cx^2$. **1.3.8** $y=\dfrac{4x}{\ln x+C}$.

1.3.9 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=Cx$. **1.3.10** $\ln\dfrac{y^2}{x}=C-\dfrac{y}{x}$. **1.3.11** $y^2=2x^2\ln x+x^2$.

1.3.12 $\sin\dfrac{y}{x}+\ln x=0$. **1.3.13** $y=x-2x^3$. **1.3.14** $\ln\left|y\right|+2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2$.

1.3.15 $\ \ y+2\ ^2=C\ \ x+y-1\ ; y=1-x$. **1.3.16** $\ \ y-x+2\ ^2+2x=C$.

1.3.17 $\ \ y-x+5\ ^5\cdot\ \ x+2y-2\ \ =C$.

1.4.1 $y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{C}{x^2}$. **1.4.2** $y=Ce^{7x}-2e^{3x}$. **1.4.3** $y=x\ \ 3x+C\ \ $.

1.4.4 $y=Ce^{-x}+\dfrac{1}{2}\ \ \cos x+\sin x\ \ $. **1.4.5** $y=\dfrac{x^3}{2}+Cx$.

1.4.6 $y=e^{-x^2}\left(\dfrac{2}{3}x^3+C\right)$. **1.4.7** $y=Cy+y^2$. **1.4.8** $xy=e-\ln x$.

1.4.9 $y=x\ \ \sin x+C\ \ $. **1.4.10** $y=\ \ 1+x^2\ \ \ \ x+C\ \ $. **1.4.11** $y=-\cos x$.

1.4.12 $y=\dfrac{x}{\cos x}+1$. **1.4.13** $y=1$. **1.4.14** $y=\dfrac{x-1}{x^2}$. **1.4.15** $y=-x^2$.

1.4.16 $y=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{C}{x}$. **1.4.17** $y=xe^{-x+C}$. **1.4.18** $y=\ln x+\dfrac{C}{x}$.

1.4.19 $y=x\ln x+C$.

1.5.1 $y = \ \ e^x + Ce^{2x} \ \ = 1;\ y = 0.$ **1.5.2** $y = \dfrac{x-1}{C-x}.$

1.5.3 $2y^2 \ \ x + C \ \ = e^{x^2}.$ **1.5.4** $y = \dfrac{1}{x\ln|Cx|}.$ **1.5.5** $\dfrac{1}{y} = x\left(C - \dfrac{1}{2}\ln^2 x\right).$

1.6.1 $x^2 + x^3y - y^3 = C.$ **1.6.2** $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C.$

1.6.3 $e^x + xy + x\sin y + e^y = C.$ **1.6.4** $\dfrac{1}{2}x^2 + x\sin y - \cos y = C.$

1.6.5 $xy + e^x \sin y = C.$ **1.6.6** $\dfrac{1}{3}x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1.$

1.6.7 $xe^{-y} - y^2 = C.$ **1.6.8** $x^2y^3 + 4xy = C.$

1.6.9 $x^3e^y - ye^{-x} + \ln|\sin y| = C.$ **1.6.10** $\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = 0.$

1.7.23 $2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \ln\dfrac{C}{x}.$ **1.7.24** $\ln\dfrac{y}{x} + 4 = Cx.$ **1.7.25** $y = \ \ x + C \ \ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.$

1.7.26 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \ln\dfrac{y}{Cx}.$ **1.7.27** $y = \dfrac{C\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$ **1.7.28** $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{x}{4} + 1.$

1.7.29 $y = x^2e^{6x}.$ **1.7.30** $x^2y^3 + 4yx = C.$

1.7.31 $y^2x + e^x\cos y - \cos y = C.$

2.2.1 $y = -\dfrac{1}{2x} + C_1x + C_2.$ **2.2.2** $y = -\dfrac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2.$

2.2.3 $y = x\ln x - x + C_1x + C_2.$ **2.2.4** $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2.$

2.2.5 $y = \dfrac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2.$ **2.2.6** $y = -\dfrac{2}{25}\cos 5x + C_1x + C_2.$

2.2.7 $y = -\ln|\cos x| + x + 2.$ **2.2.8** $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1.$ **2.2.9** $y = -\ln|x|.$

2.2.10 $y = 3\ln|x| + x + 1.$

2.2.11 $y = -\dfrac{C_1}{x} + C_2.$ **2.2.12** $y = \dfrac{1}{2}\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2.$

2.2.13 $y = \ln\left|e^{2x} + C_1\right| - x + C_2.$ **2.2.14** $y = C_1 \ \ x - e^{-x} \ \ + C_2.$

2.2.15 $y=(1+C_1)^2\ln|x+C_1|-C_1x+C_2.$

2.2.16 $y=\dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2.$ **2.2.17** $y=\dfrac{1}{2}x^2.$ **2.2.18** $y=\dfrac{2}{3}x^2\sqrt{2x}.$

2.2.19 $y=\dfrac{1}{x}-1.$ **2.2.20** $y=(x-1)^3-x.$ **2.2.21** $y=x^3+3x.$

2.2.22 $y=2+\ln\dfrac{x^2}{4}.$ **2.2.23** $1+C_1y^2=(C_1x+C_2)^2.$

2.2.24 $y=\pm\sqrt{x^2+C_1x+C_2}.$ **2.2.25** $y=C_1e^{C_2x}+\dfrac{1}{C_2}.$

2.2.26 $2\sqrt{y}-2C_1\ln\left|C_1+\sqrt{y}\right|=x+C_2.$ **2.2.27** $y=x^2+1.$

2.2.28 $2y^2-4x^2=1.$

2.3.1 $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}.$ **2.3.2** $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}.$

2.3.3 $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$ **2.3.4** $y=C_1+C_2e^{-4x}.$

2.3.5 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}.$ **2.3.6** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$

2.3.7 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{\frac{x}{3}}.$ **2.3.8** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}.$

2.3.9 $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}.$ **2.3.10** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$

2.3.11 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{0,4x}.$ **2.3.12** $y=C_1+C_2e^{-3x}.$

2.3.13 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$ **2.3.14** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}.$

2.3.15 $y=3e^{2x}-3e^{-3x}.$ **2.3.16** $y=2e^{4x}-3xe^{4x}.$

2.3.17 $y=e^x+2e^{-x}.$ **2.3.18** $y=2\cos 2x.$

2.3.19 $y''-2y'-8y=0;\ y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}.$

2.3.20 $y''-10y'+25y=0;\ y=C_1e^{5x}+C_2xe^{5x}.$

2.3.21 $y''-6y'+34y=0;\ y=e^{3x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x).$

2.3.22 $y''-9y=0;\ y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}.$

2.3.23 $y''-4y'+4y=0;\ y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}.$

2.3.24 $y''+4y'+20y=0;\ y=e^{-2x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x).$

2.4.1 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}$. **2.4.2** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + xe^{x}$.

2.4.3 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x\right) e^{x}$.

2.4.4 $y = \; C_1 + C_2 x \; e^{-2x} + \left(\frac{1}{16} x - \frac{1}{32}\right) e^{2x}$.

2.4.5 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2x \cos 2x$.

2.4.6 $y = e^{-x} \; C_1 \cos x + C_2 \sin x \; + 0,5xe^{-x} \sin x$.

2.4.7 $y = \; C_1 + C_2 x \; e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}$.

2.4.8 $y = e^{-x} \; C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \; + 0,25xe^{-x} \sin 2x$.

2.4.9 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 \sin x$.

2.4.10 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} - \; 0,5x^2 + x \; e^{x}$.

2.4.11 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \; 2x - 2 \; e^{x}$.

2.4.12 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$.

2.4.13 $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \; 2x^2 - 6x + 7 \; e^{x}$.

2.4.14 $y = \; C_1 + C_2 x \; e^{3x} + e^{x} \; 4\cos x + 3\sin x \;$.

2.4.15 $y = C_1 + C_2 e^{-8x} + 0,5x^2 - 0,125x$.

2.4.16 $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - 4,5xe^{-3x}$.

2.4.17 $y = \; C_1 \cos x + C_2 \sin x \; e^{-2x} + 5xe^{-2x} \sin x$.

2.4.18 $y = \; C_1 + C_2 x \; e^{-2x} + 4x^2 e^{-2x}$.

2.4.19 $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + \left(\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} x\right) e^{-4x}$.

2.4.20 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 0,05e^{-2x} \; 2\cos 2x + \sin 2x \;$.

2.4.21 $y = \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$. **2.4.22** $y = e^{2x} + e^{x} \; -x^2 - x + 1 \;$.

2.4.23 $y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x$. **2.4.24** $y = e^{x} + x^2$.

2.4.25 $y = e^{2x} \; x^2 + 3x \; - \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-4x}$.

2.4.26 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^{x}(Ax^2+Bx+C)$.

2.4.27 $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}+e^{4x}x(Ax+B)$.

2.4.28 $y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+e^{4x}x^2(Ax^2+Bx+C)$.

2.4.29 $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+xe^{3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

2.4.30 $y=C_1+C_2e^{2x}+x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$.

2.4.31 $y=C_1+C_2e^{-3x}+x(Ax^2+Bx+C)+e^{-3x}((Dx+E)\cos x+$
$+(Fx+H)\sin x)$. **2.4.32** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+x(Ax^2+Bx+C)e^{x}$.

2.4.33 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+(Ax+B)\cos 3x+(Dx+E)\sin 3x.$

2.4.34 $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+Ax^2e^{2x}+B\cos 2x+C\sin 2x.$

2.4.35 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{x}(A\cos x+B\sin x)$.

2.4.36 $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{x}(A\cos x+B\sin x)$.

2.4.37 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+x^2(Ax^2+Bx+C)e^{-x}.$

2.4.38 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+e^{3x}(A\cos x+B\sin x)$.

2.4.39 $y=C_1e^{x}+C_2e^{6x}+(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x.$

2.4.40 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+Ae^{2x}+B\cos 2x+C\sin 2x.$

2.5.1 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

2.5.2 $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+xe^{x}\ln|x|.$

2.5.3 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\frac{1}{2}x\sin x.$

2.5.4 $y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}-\frac{1}{x}.$

2.5.5 $y=\left(\frac{1}{2}x^2\ln|x|-\frac{3}{4}x^2+C_1+C_2x\right)e^{-2x}.$

2.5.6 $y=(C_1+\ln|\sin x|)\sin x+(C_2-x)\cos x.$

2.5.7 $y=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^{x}+1)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$

2.5.8 $y=\sin 2x\ln|\cos x|-x\cos 2x+C_1\sin 2x+C_2\cos 2x.$

2.5.9 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+0,5e^{-2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)-e^{-2x}+e^{-3x}\operatorname{arctg}e^x.$

2.5.10 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+0,25\sin 2x\ln\left|\operatorname{tg}2x\right|.$

2.6.1 $y=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{-x}.$ **2.6.2** $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}.$

2.6.3 $y=C_1+e^{-2x}\left(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x\right).$

2.6.4 $y=C_1e^{2x}+\left(C_2+C_3x\right)\cos x+\left(C_4+C_5x\right)\sin x.$

2.6.5 $y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+C_4e^{-x}.$

2.6.6 $y=C_1e^{2x}+e^{-x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right).$

2.6.7 $y=C_1+C_2x+C_3e^{2x}+C_4e^{-3x}.$ **2.6.8** $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3x^2e^{x}.$

2.6.9 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$

2.6.10 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x\left(C_3\cos 3x+C_4\sin 3x\right).$

2.6.11 $y=C_1e^{x}+C_2\cos x+C_3\sin x.$

2.6.12 $y=C_1+C_2x+C_3e^{x}-x^4-5x^3-15x^2.$

2.6.13 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-1.$

2.6.14 $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\dfrac{1}{4}x^2e^{x}.$

2.6.15 $y=C_1e^{x}+e^{-0,5x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cos x-\sin x\right).$

2.6.16 $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}+\dfrac{1}{4}\cos x.$

2.6.17 $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^{x}-\dfrac{1}{8}e^{x}\sin 2x.$

2.6.18 $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{-2x}+\left(x^2+x-1\right)e^{-x}.$

2.6.19 $y=C_1e^{x}+C_2\cos x+C_3\sin x-e^{x}\sin x.$

2.6.20 $y=C_1x^2+C_2x+C_3+C_4\cos x+C_5\sin x-e^{x}\sin x+\dfrac{1}{60}x^5-\dfrac{1}{2}x^3.$

2.6.21 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-e^{x}\sin x.$

2.6.22 $y=C_1+C_2x+C_3x^3+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x+0,2e^{x}+\dfrac{3}{32}x\sin 2x.$

2.6.23 $y=e^{-x}+2.$ **2.6.24** $y=\cos x+2\sin x+e^{-x}+(2x-3)e^{x}.$

2.6.25 $y=2x-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$ **2.6.26** $y=0{,}5e^{x}-0{,}5e^{-x}+x^{2}.$

2.6.27 $y=4+(3x-5)e^{x}+2(\sin x+\cos x).$ **2.6.28** $y=e^{x}+x^{3}.$

2.6.29 $y=e^{-x}+x-2+e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

2.6.30 $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}.$

3.1.1 $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2e^{2t}; \\ y=\frac{3}{2}C_1e^{t}+C_2e^{2t}. \end{cases}$ **3.1.2** $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2e^{10t}; \\ y=-2C_1e^{t}+C_2e^{10t}. \end{cases}$

3.1.3 $\begin{cases} x=\frac{C_1}{2}e^{t}+C_2e^{-t}+1; \\ y=\frac{C_1}{2}e^{t}-C_2e^{-t}+1. \end{cases}$ **3.1.4** $\begin{cases} x^2+y^2=C_1^2; \\ \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-t=C_2. \end{cases}$

3.1.5 $\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{3t}; \\ y=(C_1+C_2+C_2t)e^{3t}. \end{cases}$

3.1.6 $\begin{cases} x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t); \\ y=e^{2t}((C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t). \end{cases}$

3.1.7 $\begin{cases} x=C_1t; \\ t^2+x^2+y^2=C_2. \end{cases}$ **3.1.8** $\begin{cases} x=e^{-t}+e^{3t}; \\ y=2e^{-t}-2e^{3t}. \end{cases}$ **3.1.9** $\begin{cases} x=5e^{2t}-3e^{-7t}; \\ y=-e^{2t}+6e^{-7t}. \end{cases}$

3.2.1 $\begin{cases} x=C_1e^{-5t}+C_2e^{2t}; \\ y=-3C_1e^{-5t}-\frac{2}{3}C_2e^{2t}. \end{cases}$ **3.2.2** $\begin{cases} y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}; \\ z=-C_1e^{x}+2C_2e^{3x}. \end{cases}$

3.2.3 $\begin{cases} x=3e^{-2t}+3e^{7t}; \\ y=-3e^{-2t}+4e^{7t}. \end{cases}$ **3.2.4** $\begin{cases} x=\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{3}{2}e^{5t}; \\ y=-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{7}{2}e^{5t}. \end{cases}$

4.1 Дифференциальное уравнение $y = 2xy'$, $y^2 = 9x$.

4.2 $y' = y - 2,\ y = e^x + 2$. **4.3** $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{b}{a}x$, $x = C_0 e^{-\frac{b}{a}t}$, где C_0 – первоначальное количество соли. **4.4** 50 с; 15 м. **4.5** $0{,}5$ кг.

5.1.1 $y = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \ldots$.

5.1.2 $y = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2 + \dfrac{25}{3}(x-1)^3 + \ldots$.

5.1.3 $y = 1 + \dfrac{1}{6}x^3 + \ldots$. **5.1.4** $y = 2 + \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{5x^3}{3!} + \ldots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2003. – Т. 2. – 448 с.

2 **Гусак, А. А.** Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2003. – 416 с.

3 **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 560 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

5 **Пономарев, К. К.** Составление дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк. 1973. – 560 с.

6 Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2007. – Ч. 2. – 396 с.

7 Сборник задач по высшей математике. 2-й курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ГРИБОВСКАЯ Евгения Евгеньевна
ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
ШАБАЛИНА Ирина Петровна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Технический редактор *В. Н. Кучерова*
Корректор *Т. А. Пугач*

Подписано в печать 28.08.2020 г. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 3,55. Тираж 500 экз.
Зак. № 2418. Изд. № 34 .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель