избежание случайного выбора или просто угадывания ответов мы со студентами решили, что они к своему выполненному тесту прикрепят решения задач, соответственно зачтены будут только те задания, на которые не просто дан правильный ответ в тесте, но и есть соответствующее ему решение. К сожалению, не всегда оценка, выставленная автоматически компьютером, подтверждалась мною после проверки работы, но нельзя не отметить и тот факт, что иногда оценка и «поднималась». Проверка работ в электронном варианте это гораздо более трудоемкий процесс, требующий больше времени и внимания, нежели обычный вариант проверки тетрадей. В то же время если бы можно было положиться на честность студентов, то не было бы необходимости дополнительной проверки решений.

В заключение хотелось бы отметить, что вряд ли то, как мы работали, можно назвать полноценным онлайн-обучением. Чтобы понять все его тонкости и возможности – так работать нужно постоянно и, наверное, продолжительное время. В нашем же случае, разговаривая со студентами и делясь своим видением данной ситуации, мы сошлись во мнении, что это малоэффективно и достаточно утомительно.

УДК 378.147:512.9

К МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ОСНОВ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

З.Н. СЕРАЯ, А.И. СЕРЫЙ
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь

Курсы физики и высшей математики занимают важное место в учебных программах технических вузов и часто взаимосвязаны. К примеру, элементы векторного и тензорного анализа встречаются в электродинамике и механике сплошных сред. Нередко большой объем материала сочетается с малым количеством часов, отводимых на изучение дисциплин. В связи с этим, следуя принципу «все познается в сравнении», можно выполнить сравнение некоторых важных вопросов (на примере интегралов для векторного поля (ВП)

$$\vec{F}=\vec{i}P(x,y,z)+\vec{j}Q(x,y,z)+\vec{k}R(x,y,z) \qquad (1)$$

по ориентированной кривой и по ориентированной поверхности в виде таблиц 1–5.

Таблица 1 – **Сравнение типов интегралов второго рода**

Интеграл	Криволинейный	Поверхностный
Берется	по ориентированной кривой L	по ориентированной поверхности S
Вид: а) общий; б) в декартовых координатах	а) $\int\limits_L \vec{F}(M)\cdot d\vec{l}$; б) $\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$	а) $\iint\limits_S \vec{F}(M)\cdot d\vec{S}$; б) $\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$
Иначе называется	циркуляцией ВП, если кривая замкнута	потоком ВП, даже если поверхность не замкнута
Для замкнутых структур справедлива формула (теорема)	Стокса	Остроградского – Гаусса

Таблица 2 – **Использование направляющих косинусов (НК) для сведения к интегралам первого рода**

Интеграл	Криволинейный	Поверхностный
Выражение через НК	$\int\limits_L Hdl$	$\iint\limits_S HdS$
Смысл H	$P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$	$P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$
НК входят в единичный вектор (ЕВ)	касательной к dl : $\vec{\tau}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$	нормали к dS : $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$
Способ нахождения ЕВ	$\vec{\tau}_0=\vec{r}'(t)/\left\|\vec{r}'(t)\right\|$, где $\vec{r}(t)$ – параметрическое уравнение кривой	$\vec{n}_0=\dfrac{(\partial J/\partial x,\partial J/\partial y,\partial J/\partial z)}{\left\|(\partial J/\partial x,\partial J/\partial y,\partial J/\partial z)\right\|}$, где $J(x,y,z)=0$ – неявное уравнение поверхности
Интегралы можно выразить через	а) ЕВ: $\int\limits_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}_0 dl$; б) проекцию: $\int\limits_L F_\tau dl$	а) ЕВ: $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}_0 dS$; б) проекцию: $\iint\limits_S F_n dS$

Таблица 3 – **Сведение к определенным и двойным интегралам в случае параметрического задания кривой или поверхности**

Интеграл	Криволинейный 2-го рода	Поверхностный 2-го рода
Структура задана	уравнениями $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, $t\in[a,b]$	уравнениями $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, $(u,v)\in\Omega$

Окончание таблицы 3

Интеграл	Криволинейный 2-го рода	Поверхностный 2-го рода
Как расписывается интеграл	$\int_a^b T\ \ t\ dt$, $T\ \ t\ = P\ \ x\ \ t\ \ , y\ \ t\ \ , z\ \ t\ \ \ x'\ \ t\ +$ $+Q\ \ x\ \ t\ \ , y\ \ t\ \ , z\ \ t\ \ \ y'\ \ t\ +$ $+R\ \ x\ \ t\ \ , y\ \ t\ \ , z\ \ t\ \ \ z'\ \ t$	$\pm\iint_{\Omega}\ PA+QB+RC\ \ dudv$; $P = P\ \ x\ \ u,v\ \ , y\ \ u,v\ \ , z\ \ u,v$, $Q = Q\ \ x\ \ u,v\ \ , y\ \ u,v\ \ , z\ \ u,v$, $R = R\ \ x\ \ u,v\ \ , y\ \ u,v\ \ , z\ \ u,v$, $A = \frac{D\ \ y,z}{D\ \ u,v}$, $B = \frac{D\ \ z,x}{D\ \ u,v}$, $C = \frac{D\ \ x,y}{D\ \ u,v}$

Таблица 4 – **Сведение к определенным и двойным интегралам в случае явного задания кривой или поверхности**

Интеграл	Криволинейный	Поверхностный
Структура задана	системой уравнений $y = y\ \ x\ \ , z = z\ \ x$, $x \in\ \ a,b$	одним из уравнений: а) $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_z$; б) $y = y(x, z)$, $\ \ x, z\ \ \in D_y$; в) $x = x(y, z)$, $\ \ y, z\ \ \in D_x$ (см. также таблицу 5)
Как расписывается интеграл	$\int_a^b T\ \ x\ dx$, $T\ \ x\ = P\ \ x, y\ \ x\ \ , z\ \ x\ \ +$ $+Q\ \ x, y\ \ x\ \ , z\ \ x\ \ \ y'\ \ x\ +$ $+R\ \ x, y\ \ x\ \ , z\ \ x\ \ \ z'\ \ x$	$\iint_{D_x} P\ \ x\ \ y,z\ \ , y, z\ \ dydz +$ $+\ \iint_{D_y} Q\ \ x, y\ \ x, z\ \ , z\ \ dxdz +$ $+\ \iint_{D_я} R\ \ x, y, z\ \ x, y\ \ \ dxdy$

Таблица 5 – **Задание областей D_x, D_y, D_z (см. таблицу 4)**

Область		D_x	D_y	D_z
Границы, определяемые	из неявного уравнения поверхности $J\ \ x, y, z\ \ = 0$ (см. таблицу 2)	$J\ \ 0, y, z\ \ = 0$	$J\ \ x, 0, z\ \ = 0$	$J\ \ x, y, 0\ \ = 0$
	координатными осями	$y = 0, z = 0$	$x = 0, z = 0$	$x = 0, y = 0$

Предложенные таблицы могут быть составлены, например, на основе сведений из [1, с. 266–270; 2, с. 15–20; 3, с. 232–239]). В целом подобные таблицы могут быть полезными при обобщении и закреплении материала.

Заключительные замечания относительно выбора способа вычисления интегралов второго рода вынесены в таблицу 6.

Таблица 6 – **Две основные стратегии вычисления криволинейных и поверхностных интегралов второго рода**

Способ	Непосредственное сведение к определенному или двойному интегралу (как при явном, так и при параметрическом задании кривой или поверхности)	Сначала сводим интеграл второго рода к соответствующему интегралу первого рода, который затем сводим к определенному или двойному интегралу (как при явном, так и при параметрическом задании кривой или поверхности)
Количество этапов	1, поэтому этот способ, как правило, более рациональный	2, поэтому этот способ, как правило, менее рациональный

Список литературы

1 **Воднев, В.Т.** Основные математические формулы : Справочник / В.Т. Воднев, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович ; под ред. Ю.С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.

2 Задачнік-практыкум па метадах матэматычнай фізікі / П.С. Белявец [і інш.]. – Мінск : Дызайн ПРО, 1998. – 144 с.

3 **Власов, В.Г.** Конспект лекций по высшей математике / В.Г. Власов. – М. : Айрис, 1996. – 288 с.

УДК 512.21.4+53

О РАЗНОВИДНОСТЯХ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ В МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

А.И. СЕРЫЙ, З.Н. СЕРАЯ

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Республика Беларусь

Курсы физики и высшей математики занимают важное место в учебных программах технических вузов. При этом студенты, изучающие как физику, так и математику, иногда встречаются с уравнениями, имеющими сходные названия, но разное смысловое содержание, что может приводить к путанице, в том числе при контроле знаний. В качестве одного из таких примеров можно привести уравнение