УДК 539.3

С. В. БОСАКОВ, П. Д. СКАЧЁК
Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК С ШАРНИРНО-ОПЕРТЫМИ ГРАНЯМИ

В статье рассматривается статический расчет треугольных пластинок с шарнирно-опертыми гранями методом Ритца. Получены формулы для точного определения коэффициентов при координатных функциях, используемых в выражении функции прогибов. Приведен пример расчета треугольной плиты на действие сосредоточенной силы.

Ключевые слова: треугольная пластина, метод Ритца, функция прогибов.

Введение. В условиях повышения уровня жизни людей возникает необходимость в удовлетворении потребности в более комфортных, функциональных, эстетически-выразительных зданиях и сооружениях. Это обуславливает увеличение строительства зданий и сооружений по индивидуальным проектам. В свою очередь это ведет к применению нетиповых конструкций. Тем самым, возникает проблема расчета таких конструкций под действием приложенных к ним нагрузок. Причем получаемые результаты должны наиболее точно отражать реальную работу конструкции под нагрузкой.

Одним из видов нетиповых конструкций является треугольная плита. Необходимость разработки методик расчета таких плит обусловлено недостатком научных трудов и литературы в противовес прямоугольным пластинкам, вопрос определения усилий в которых изучен достаточно хорошо [1–3].

Методика расчета. Для решения задачи расчета треугольной пластинки используется вариационный метод – метод Ритца. Суть метода заключается в отыскании функции прогибов $W(x, y)$, удовлетворяющей условию минимума полной энергии Э системы, путем дифференцирования выражения указанной энергии и приравнивания нулю полученных частных производных, что согласно теории Эйлера [4] соответствует вариации функционала полной энергии $\delta Э = 0$. При этом функция $W(x, y)$ должна также удовлетворять граничным условиям закрепления пластинки. После нахождения прогибов определяются внутренние усилия и напряжения по известным формулам теории изгиба пластинок [2, 5], являющихся следствием принятых допущений Кирхгофа-Лява [6].

Постановка и решение задачи. Функцию прогибов треугольной пластинки ищем в виде одинарного ряда [7] с неопределенными коэффициентами:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{(m+1)\pi y}{b}\right) + \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right], \quad (1)$$

где A_m – неизвестные коэффициенты; a, b – габаритные размеры пластинки (рисунок 1).

Функция (1) удовлетворяет следующим граничным условиям:

– на грани OB:

прогиб $$W(x,y)\big|_{y=0}=0\,, \qquad (2)$$

угол поворота $$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}\neq 0, \qquad (3)$$

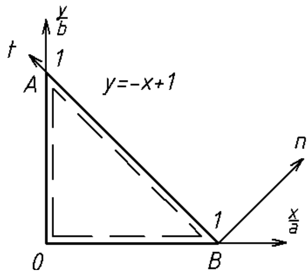

Рисунок 1 – Расчетная схема пластинки

изгибающий момент $$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\Big|_{y=0}=0\,; \qquad (4)$$

– на грани OA:

прогиб $$W(x,y)\big|_{x=0}=0\,, \qquad (5)$$

угол поворота $$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=0}\neq 0\,, \qquad (6)$$

изгибающий момент $$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\Big|_{x=0}=0\,; \qquad (7)$$

– на грани AB:

прогиб $$W(x,y)\big|_{y=-x+1}=0\,, \qquad (8)$$

угол поворота $$\frac{\partial W(x,y)}{\partial n}\Big|_{y=-x+1}\neq 0\,, \qquad (9)$$

изгибающий момент $$M_n=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)\Big|_{y=-x+1}=0, \qquad (10)$$

где $D=\dfrac{E\,\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости.

Вычисления показали, что функциональный ряд (1) удовлетворяет статическому условию (10) при учете достаточного числа членов ряда.

Далее определяем энергию деформации пластинки [6]:

$$U=\frac{D}{2}\int_0^a\int_0^{-\frac{b}{a}x+b}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]dxdy. \qquad (11)$$

Находим потенциал внешних сил

$$\Pi = -\int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} q(x,y)W(x,y)dxdy. \qquad (12)$$

Для потенциала сосредоточенной силы имеем

$$\Pi = -F(\xi,\eta)W(x,y), \qquad (13)$$

где ξ, η – координаты точки приложения к пластине внешней сосредоточенной силы F.

Тогда полная потенциальная энергия пластинки и действующей на нее нагрузки будет равна

$$Э = U + \Pi. \qquad (14)$$

Результатом интегрирования является многочлен второй степени относительно неизвестных коэффициентов A_m. В соответствии с принципом Лагранжа вариация полной энергии системы на ее истинном перемещении равна нулю [3, 5]. Для отыскания минимума полной энергии системы дифференцируем (14) по каждому коэффициенту A_m. Получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка m с неизвестными A_m. Решая ее, найдем коэффициенты A_m. Тем самым получена функция прогибов $W(x, y)$, дифференцированием которой определяют внутренние усилия в плите.

При решении СЛАУ учтем, что матрица системы, составленная из коэффициентов k при неизвестных A_m, имеет диагональный вид вследствие ортогональности принятых координатных функций (1) в треугольной области. Это дает возможность точного определения коэффициентов A_m. Например, для сосредоточенной силы F коэффициент A_m определяется по формуле:

$$A_m = \frac{8a^3b^3F\left(\sin\left[\frac{(1+m)\pi\eta}{b}\right]\sin\left[\frac{m\pi\xi}{a}\right]+\sin\left[\frac{(1+m)\pi\xi}{a}\right]\sin\left[\frac{m\pi\eta}{b}\right]\right)}{D\left(4a^2b^2m^2(1+m)^2+a^4(1+2m(1+m)(2+m+m^2))+b^4(1+2m(1+m)(2+m+m^2))\right)\pi^4}. \qquad (15)$$

Также можно получить формулы для вычисления A_m и при других видах нагрузки. Тем самым значительно упрощается задача расчета треугольных плит с шарнирно опертыми гранями. Обратим внимание, что A_m не зависит от коэффициента Пуассона μ, как и в решении Навье для прямоугольных пластинок [1]. Последовательность статического расчета треугольной пластинки с шарнирно опертыми гранями заключается в следующем:

1) задается число членов ряда m;

2) определяются по формуле (15) коэффициенты A_m;

3) находим функцию прогибов $W(x, y)$ по формуле (1);

4) по формулам теории пластин [1] определяются параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины.

Пример расчета. Выполнен расчет треугольной плиты со следующими параметрами: $a = 2$ м; $b = 3$ м; $\mu = 0{,}2$; $D = 5{,}04 \cdot 10^3$ кН·м; $F = 4$ кН; $\xi = a / 3$; $\eta = b / 3$. На рисунке 2 показаны поверхности прогибов $W(x, y)$, удельных изгибающих моментов M_x, M_y, крутящего момента M_{xy} (кН), поперечных сил Q_x, Q_y (кН/м).

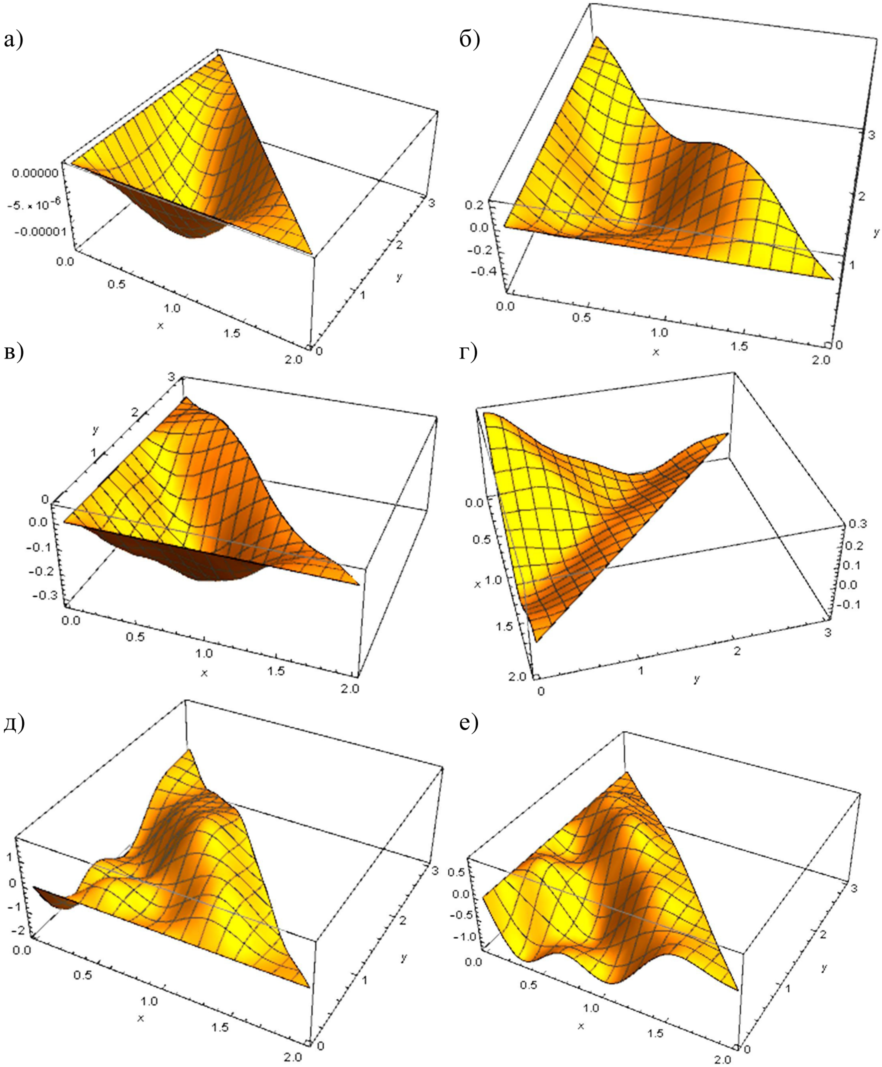

Рисунок 2 – Поверхности прогибов W (*а*), удельных изгибающих моментов M_x (*б*), M_y (*в*), крутящего момента M_{xy} (*г*), поперечных сил Q_x (*д*), Q_y (*е*)

Все расчеты выполнялись в программном комплексе *Wolfram Mathematica 11.1* [8, 9]. Число m членов ряда (1) принято равным четырем.

Заключение. В работе приведен расчет треугольной пластинки с шарнирно-опертыми гранями. Получено точное решение задачи аналогично решению Навье для шарнирно опертых прямоугольных пластинок. Особенностью полученного решения является то, что коэффициенты A_m при координатных функциях не зависят от коэффициента Пуассона материала пластинки μ. Полученные результаты могут найти применение, в частности, при проектировании треугольных балконных плит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Тимошенко, С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер ; под ред. Г. С. Шапиро. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 636 с.

2 **Филоненко-Бородич, М. М.** Теория упругости / М. М. Филоненко-Бородич. – 4-е изд. – М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. – 364 с.

3 **Кончковский, З.** Плиты. Статические расчеты : пер. с польск. / З. Кончковский. – М. : Стройиздат, 1984. – 480 с.

4 **Абовский, Н. П.** Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга; под ред. Н. П. Абовского. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 288 с.

5 **Босаков, С. В.** Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости : учеб. пособие для студентов строит. специальностей вузов / С. В. Босаков. – Минск : Изд. БГПА, 2000. – 142 с.

6 **Александров, А. В.** Основы теории теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.

7 **Hrivnak, J.** Two-dimensional symmetric and antisymmetric generalizations of sine functions / J. Hrivnak, L. Motlochova, J. Patera // Journal of Mathematical Physics. – 2010. – Vol. 51, No. 7. – P. 073509.1–073509.13.

8 **Дьяконов, В. П.** Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК, Пресс, 2009. – 624 с.

9 **Половко, А. М.** Mathematica для студента / А. М. Половко. – СПб. : БХВ-Петербург. – 2007. – 368 с.: ил.

S. V. BOSAKOV, P. D. SKACHOK

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

STATIC CALCULATION OF TRIANGULAR PLATES WITH THE HINGE-SUPPORTED FACETS

The paper considers the problem of static calculations of triangular plates with the hinge-supported facets using the Ritz' method. There were obtained the formulas for the accurate determination of coefficients for coordinate functions used in the deflection function expressions. The calculation sample for the triangular plate under the action of single force is given.

Получено 08.10.2017