

УДК 378.1:621.0

Н. А. ЛУГАЦКАЯ, Д. А. ИВАНЫЧЕВ

Липецкий государственный технический университет, Россия

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ОТВЕРСТИЯМИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассматривается использование метода граничных состояний для решения задач теории упругости о деформировании двух- и многосвязной изотропной плоской области. Получены расчетные соотношения, выполнено и проанализировано решение задач для тела в форме кольца и прямоугольной пластины с двумя круглыми отверстиями.

Одним из современных аналитических подходов к решению задач теории упругости является метод граничных состояний [1]. Его основу составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний. Процесс решения задачи таким методом предполагает построение базисов названных пространств с учетом топологии области и физических свойств среды. Затем проводится их ортогонализация, а искомое состояние раскладывается в ряд по элементам ортонормированного базиса. После этого необходимо отыскать коэффициенты полученного ряда.

К настоящему времени разработаны подходы к решению ряда задач механики сплошных сред с помощью названного метода, информацию о которых можно найти в обзорной статье [2]. При деформировании тел, ослабленных отверстиями, происходит перераспределение напряжений, обусловленное наличием внутренней границы. Целью представленной статьи является разработка алгоритма решения плоских задач теории упругости о деформировании тел с отверстиями с помощью метода граничных состояний.

Рассматривается изотропная пластинка в условиях статического нагружения. По краю и на внутреннем контуре пластинки распределены усилия. Формулы комплексного представления Г. В. Колосова – Н. И. Мухелишвили [3] дают общее решение данной задачи:

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}; \\ \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \varphi'(z); \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} &= 2[\overline{z}\varphi''(z) + \overline{\psi'(z)}], \end{aligned} \quad (1)$$

где G – модуль сдвига; u, v – компоненты вектора перемещений; $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ (μ – коэффициент Пуассона); $\varphi(z), \psi(z)$ – функции Колосова–Мухелишвили; $z = x + iy$ – комплексные координаты; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; причем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические по своим переменным.

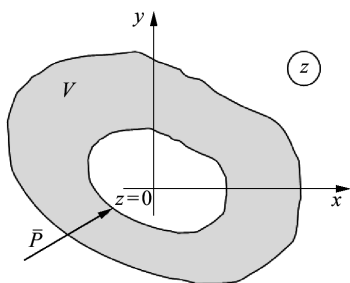


Рисунок 1 – Двухсвязная область

Пусть на внутреннем контуре двухсвязной области V определен главный вектор приложенных сил (рисунок 1). Представление для функций Колосова-Мухелишвили для такой области имеет вид [3]:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+k)}(X+iY)\ln(z) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j;$$

$$\psi(z) = -\frac{k}{2\pi(1+k)}(X-iY)\ln(z) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j,$$

где X и Y – составляющие главного вектора внешних усилий, действующих на внутреннем контуре отверстия.

Внутреннее состояние для рассматриваемого случая определяется согласованным набором полей перемещений, деформаций и напряжений:

$$\xi = \left\{ \{u, v\}, \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}, \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\} \right\}.$$

Каждая из фигурирующих здесь величин является функцией положения точки. Совокупность всевозможных состояний среды образует пространство Ξ внутренних состояний. Базисные наборы таких состояний можно конструировать в соответствии с (1), генерируя возможные варианты аналитических функций. Для ограниченной двухсвязной области можно использовать фундаментальную систему многочленов Вейерштрасса:

$$\left(\begin{array}{c} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{array} \right) \in \left\{ \left(\begin{array}{c} z^{-1} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ z^1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} iz^{-1} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ iz^1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} z^{-n} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ z^n \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} iz^{-n} \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ iz^n \end{array} \right) \right\}; n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2)$$

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний можно определить через внутреннюю энергию упругого деформирования

$$\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \right)_{\Xi} = \int_V \left(\sigma_x^{(1)} \varepsilon_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)} \varepsilon_y^{(2)} + 2\sigma_{xy}^{(1)} \varepsilon_{xy}^{(2)} \right) dV.$$

Здесь и далее записанные в скобках верхние индексы соответствуют номеру рассматриваемого состояния

Внутренние напряжения приводят к появлению на границе тела поверхностных усилий p_x, p_y , которые вкупе с граничными значениями перемещений образуют граничное состояние

$$\gamma = \left\{ \{u, v\}, \{p_x, p_y\} \right\}.$$

Совокупность всех допустимых граничных состояний образует пространство граничных состояний Γ , в котором скалярное произведение выражает работу внешних сил:

$$\left(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\right)_{\Gamma} = \int_{\partial V} \left(p_x^{(1)} u^{(2)} + p_y^{(1)} v^{(2)}\right) dl.$$

В силу теорем Бетти, Сомильяны и принципа возможных перемещений оба пространства Ξ , Γ сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий. В общем случае проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения искомого состояния в ряд по элементам ортонормированного базиса, а в случаях первой и второй основных задач теории упругости приводит к рутинному вычислению определенных интегралов. Например, при заданных на границе усилиях p_{x0} , p_{y0} (первая основная задача) коэффициенты Фурье рассчитываются так:

$$c_j = \int_{\partial V} \left(p_{x0} u^{(j)} + p_{y0} v^{(j)}\right) dl,$$

а при известных перемещениях u_0 , v_0 (вторая основная задача) –

$$c_j = \int_{\partial V} \left(p_x^{(j)} u_0 + p_y^{(j)} v_0\right) dl.$$

В свою очередь, решение представляет собой ряд Фурье:

$$p_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_j p_i^{(j)}; \quad u_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_i^{(j)}; \quad \sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sigma_{ik}^{(j)}; \quad \varepsilon_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varepsilon_{ik}^{(j)}. \quad (3)$$

С целью проверки работоспособности описанного алгоритма выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с отверстием. Сначала решалась первая основная задача для кольца, нагруженного распределенными силами, параллельными оси x , как это показано на рисунке 2. Использовалась безразмерная форма определяющих соотношений.

В результате расчетов, выполненных в системе Wolfram Mathematica, получено распределение компонент тензора напряжений. Они представлены линиями уровня на рисунках 3–5. Симметрия расчетной схемы относительно оси x стала следствием симметричности распределения напряжений σ_{xx} и σ_{yy} относительно той же оси.

На рисунке 6 приведены результаты сравнения заданных граничных условий с полученными по результатам расчетов по формуле (3). Как видно из рисунка 6, *a*, отличие между значениями проекций сил p_x , действующих на границу сечения, пренебрежимо мало. В то же время некоторая невязка, имеющаяся на рисунке 6, *b* (на нем значения отложены в масштабе, превышающем масштаб на рисунке 6 в 1000 раз), демонстрирует процесс приближения функции, характерный для рядов Фурье.

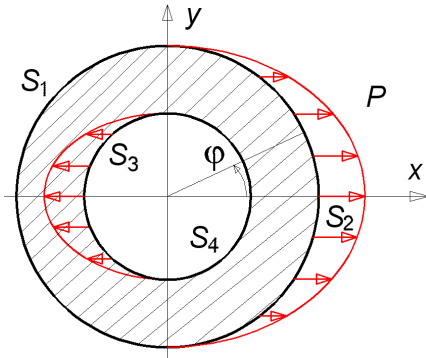


Рисунок 2 – Симметричное нагружение тела

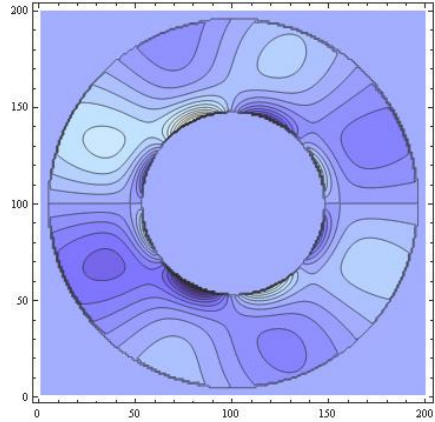


Рисунок 3 – Линии уровня σ_{xy}

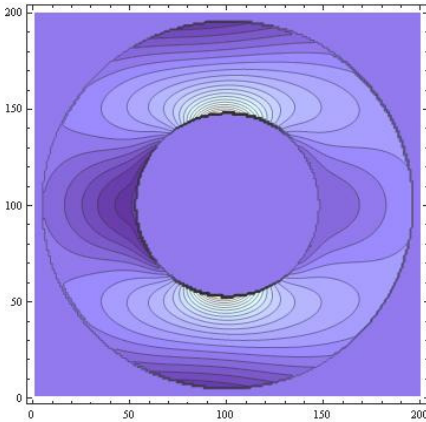


Рисунок 4 – Линии уровня σ_{xx}

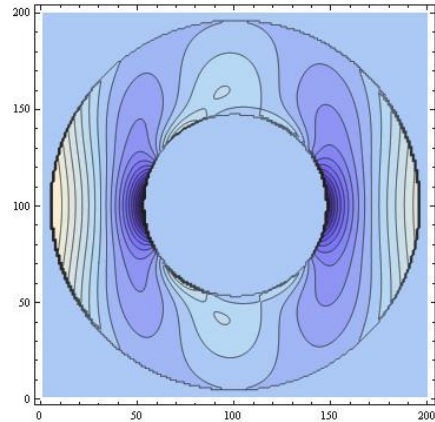


Рисунок 5 – Линии уровня σ_{yy}

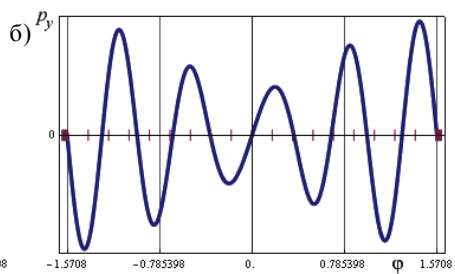
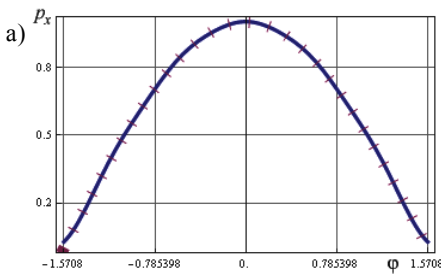


Рисунок 6 – Сравнение заданных граничных условий p_x (график а) и p_y (график б) с полученными

Также выполнено решение первой основной задачи для случая непараллельных внешних сил (рисунок 7). На рисунке 8 представлено сравнение заданных граничных условий для участков внешней границы S_2 и S_3 с полученными расчетом. Приведенные графики демонстрируют высокую точность приближения заданных функций.

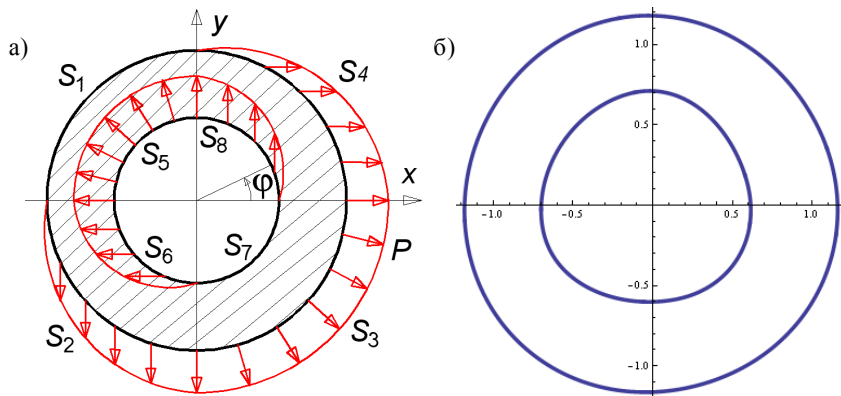


Рисунок 7 – Нагружение тела (а) и контур деформированного тела (б)

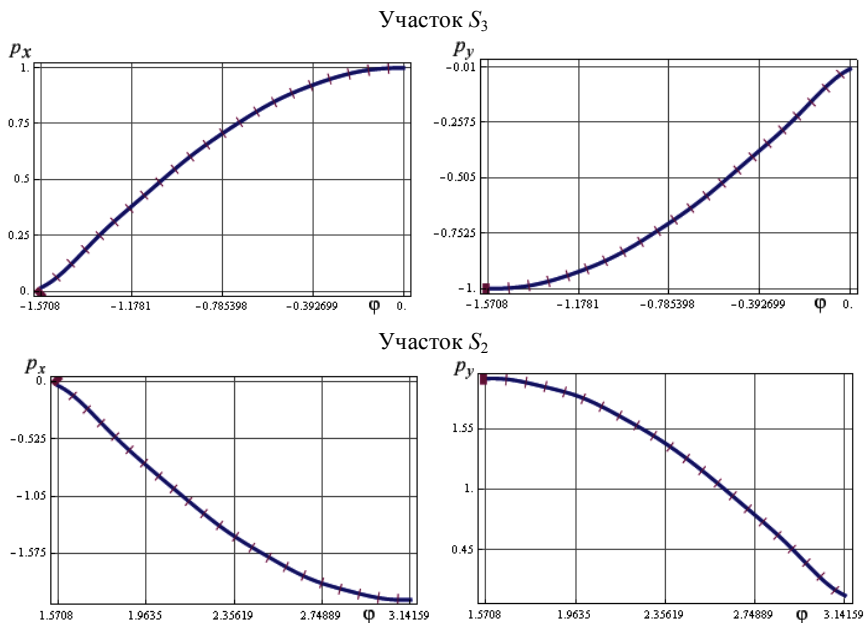


Рисунок 8 – Сравнение заданных граничных условий с полученными

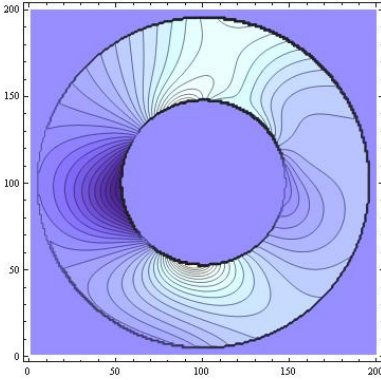


Рисунок 9 – Напряжения σ_{xx}

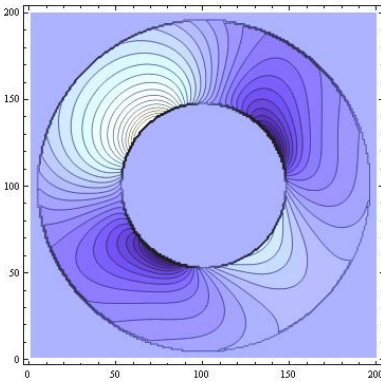


Рисунок 10 – Напряжения σ_{xy}

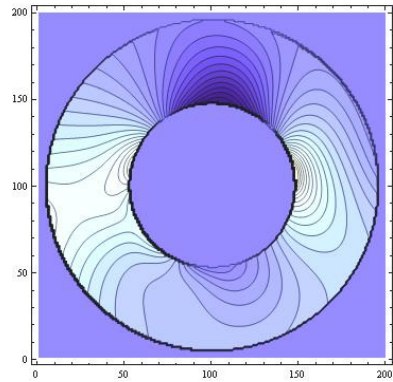


Рисунок 11 – Напряжения σ_{yy}

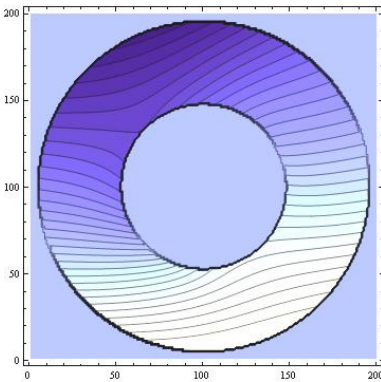


Рисунок 12 – Компонента перемещения u_x

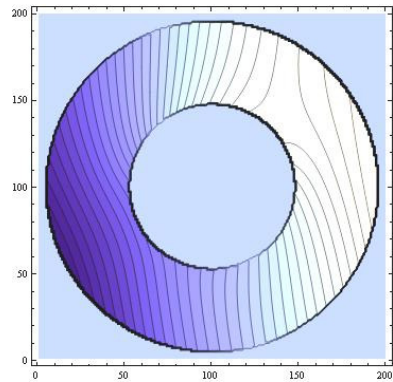


Рисунок 13 – Компонента перемещения u_y

На рисунках 9–13 представлены результаты полей напряжений и деформаций для рассматриваемого случая нагружения. Полученные схемы демонстрируют распределение величин, соответствующее ожидаемым результатам, следующим из физической сущности решаемой задачи. Таким образом, рассмотренные примеры подтверждают работоспособность разработанного алгоритма при решении первой задачи теории упругости.

Кроме того выполнено решение второй основной задачи теории упругости. При этом на границе тела были заданы перемещения, как это показано на рисунке 14. Результаты расчетов полей напряжений и деформаций приведены на рисунках 15–19. Они также достоверны, как и в предыдущих случаях.

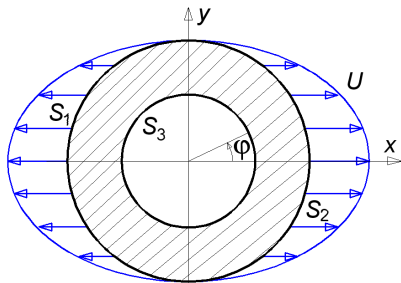


Рисунок 14 – Схема перемещений на контуре

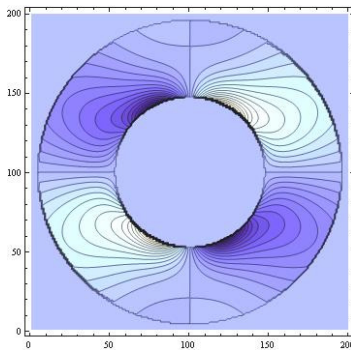


Рисунок 15 – Напряжения σ_{xy}

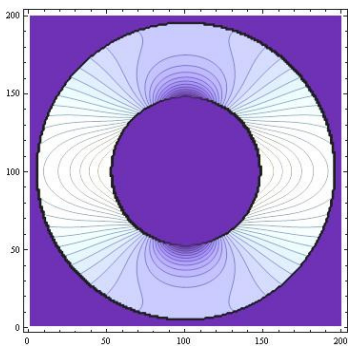


Рисунок 16 – Напряжения σ_{xx}

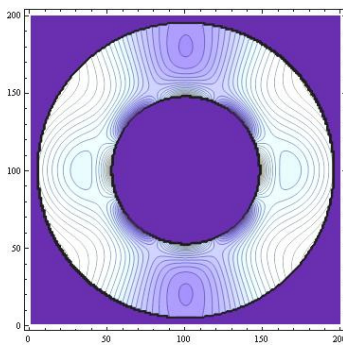


Рисунок 17 – Напряжения σ_{yy}

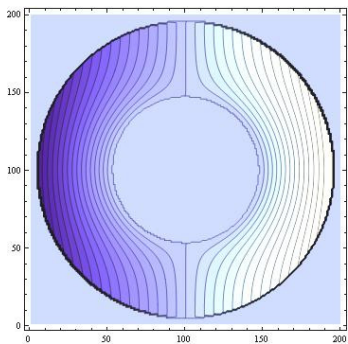


Рисунок 18 – Компонента перемещения u_x

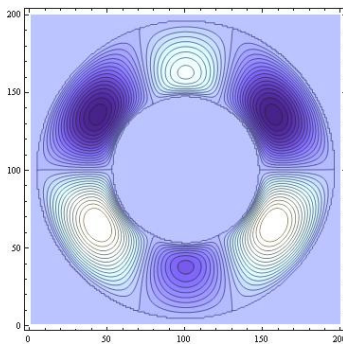


Рисунок 19 – Компонента перемещения u_y

Аналогичный подход был использован для анализа напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины, ослабленной двумя круглыми вырезами (рисунок 4). При этом учет дополнительного отверстия выполнен путем незначительного изменения базисного набора функций (2), как это описано в работе [4].

На рисунке 21 приведены изолинии компонент вектора перемещения, которые соответствуют изменению контура тела после его деформации, представленному на рисунке 20.

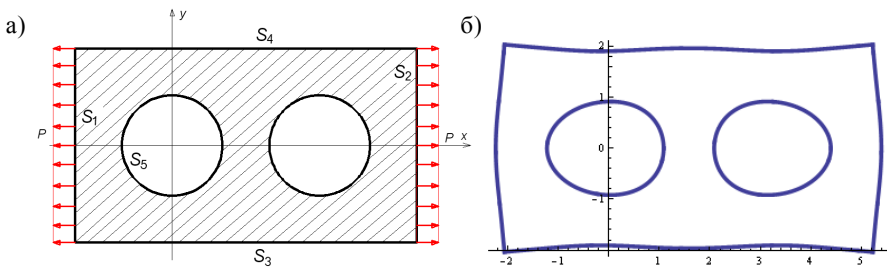


Рисунок 20 – Нагружение тела (а) и его контур после деформации (б)

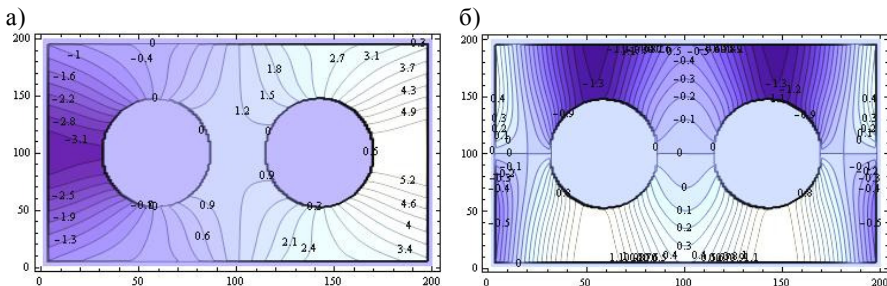


Рисунок 21 – Изолинии компонент вектора перемещения:
a – компонента u_x , *б* – компонента u_y

Таким образом, приведенные результаты расчетов демонстрируют, что метод граничных состояний может использоваться для анализа напряженно-деформированного состояния пластин, ослабленных круглыми отверстиями. Разработанные программные алгоритмы в системе Wolfram Mathematica позволяют проводить решение для тел с разной геометрией границы с точностью 10^{-6} и выше (точность решения определяется количеством используемых элементов базиса).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Пеньков, В. Б. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики / В. Б. Пеньков, В. В. Пеньков // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 115–137.

2 Пеньков, В. Б. Итоги и перспективы метода граничных состояний / В. Б. Пеньков, Л. В. Саталкина // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2013. – Вып. 2, Ч. 2. – С. 193–211.

3 Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

4 Пеньков, В. Б. Ресурсосберегающий метод решения задач математической физики / В. Б. Пеньков, Д. А. Иванычев // Энерго- и ресурсосбережение – XXI век: Сборник материалов X международной научно-практической интернет-конференции, 01 марта – 30 июня 2012 г. – Орел: Госуниверситет-УНПК, 2012. – С. 170–173.

N. A. LUGATSKAYA, D. A. IVANYCHEV

ELASTICITY THEORY PLANE PROBLEM SOLUTION FOR BODIES WITH HOLES BY THE BOUNDARY CONDITIONS METHOD

The boundary conditions method's use for solving elasticity theory problems of two- and multiply isotropic plane region deformation is considered. There were obtained the calculation ratios, the problem solution for the body of ring shape and a rectangular plate with two circular holes was performed and analyzed.

Получено 02.06.2014

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 8. Гомель, 2014**

УДК 622.232

Л. В. ЛУКИЕНКО, К. В. ГАЛЬЧЕНКО

Новомосковский институт (филиал) ФГБОУ «Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева», Россия

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВАРИАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МАНИПУЛЯТОРА НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА

В статье представлены исследования напряжённно-деформированного состояния рычажного манипулятора для закрепления горной выработки при ее проходке. Установлены рациональные размеры звеньев механизма из условий прочности и точности позиционирования.

Механизация крепления проводимых горных выработок оказывает значительное влияние на работу щитовых проходческих комплексов [1]. Для её выполнения до настоящего времени не разработано единого конструктивного решения, позволяющего оптимизировать эту операцию и снизить трудозатраты обслуживающего персонала. Недостаток может быть устранён путем применения в составе щитовых проходческих комплексов для крепления выработок манипуляторов (рисунок 1), обладающих расширенной зоной обслуживания, имеющих необходимую и достаточную металлоёмкость и высокую надёжность, а также повышенную точность позиционирования доставляемого груза.