ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 8. Гомель, 2014

УДК 531/532+581.14

Б. Я. КАНТОР[1], *Н. Н. КИЗИЛОВА*[2]
[1]*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного, Харьков, Украина*
[2]*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина*

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В МЕХАНИКЕ РАСТУЩИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

В работе приведена реологическая модель растущей сплошной среды, которая описывает особенности роста биологических тканей. Для нее сформулирован вариационный принцип в приращениях, на основе которого предложена схема для проведения численных расчетов методом конечных элементов с учетом конечных деформаций и нелинейных свойств.

Растущие биологические материалы представляют особый класс сплошных сред, в которых происходит приращение массы и необратимое (ростовое) деформирование, сопровождающееся возникновением и перераспределением механических напряжений. Методы механики деформируемых вязкоупругих сред позволяют строить модели растущих материалов и решать прикладные задачи [1–4]. В силу сложной формы, неоднородности и анизотропии свойств биоматериалов важное значение имеет разработка численных методов решения конкретных ростовых задач. Одними из наиболее эффективных численных методов решения задач биомеханики являются вариационные, в частности – метод конечных элементов [5]. Растущие материалы обладают сложной реологией, которая практически не встречается в небиологических материалах. Кроме того, в ходе роста биологические материалы испытывают конечные ростовые деформации, значительно меняются их размеры и форма. Различные формы вариационных принципов для упругих тел с распределенными источниками массы предложены в литературе [6–8], но неопределенность введенных при этом наборов термодинамических величин не позволяет разработать эффективный алгоритм проведения численных расчетов методом конечных элементов, что составляет цель данной работы.

1 Модель растущей сплошной среды. Рассмотрим двухфазную модель растущей ткани, жидкая фаза которой представлена тканевой и внутриклеточной жидкостью, а также содержимым проводящих элементов (сосудов), а твердая – клеточными стенками, внеклеточными образованиями и стенками проводящих элементов. Рост происходит за счет притока растворенных веществ по проводящим элементам и их перехода из жидкой фазы в твердую с образованием новых клеток и внеклеточных структур. Приток жидкости вместе с растворенными веществами учтем путем введения источников в уравнение баланса массы фаз. Обозначим эффективные плотности твердой и жидкой фаз $\rho_{s,f}$ соответственно, причем $\rho_s = \rho C = \rho_s^0 H$, $\rho_f = \rho(1-C) = \rho_f^0(1-H)$, где $\rho_{s,f}^0$ – истинные плотности вещества фаз, C и H – массовая и объемная концентрации твердой фазы. Тогда уравнения неразрывности для фаз примут вид:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_s \vec{V}_s) = q\,, \qquad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_f \vec{V}_f) = -q\,, \tag{1}$$

где $\vec{V}_{s,f}$ – скорости движения фаз; q – межфазный массообмен.

Скорость твердой фазы будем принимать за скорость роста материала $\vec{V} = \vec{V}_s$ [2]. Складывая уравнения (1), получим уравнение неразрывности для среды в целом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{V}) = \theta\,, \quad \theta = -\mathrm{div}(\rho(1-C)(\vec{V}_f - \vec{V}))\,.$$

Реологическое соотношение для растущего материала примем в соответствии с экспериментальными данными о динамике биологического роста в виде [1–3]:

$$e_{ik} = e_{ik}^e + e_{ik}^g\,,\; e_{ik}^g = A_{ik} + B_{iklm}\sigma_{lm}\,,\; e_{ik}^e = G[\sigma_{ik}]\,, \tag{2}$$

где $\sigma_{lm}, e_{ik}, e_{ik}^e, e_{ik}^g$ – тензоры напряжений, скоростей упругих, ростовых и полных деформаций; G – оператор, описывающий закон податливости материала, в общем случае нелинейный; A_{ik} – собственные скорости роста материала при отсутствии напряжений; B_{iklm} – тензор обратных (ростовых) вязкостей; по повторяющимся индексам в (2) ведется суммирование.

Если для материала выполняется закон Гука, то $G[\sigma_{ik}] = d(E_{iklm}^{-1}\sigma_{lm})/dt$, где E_{iklm} – тензор модулей упругости. Тогда из (2) получим реологическое соотношение для растущего материала, которое является обобщением модели Максвелла вязкоупругой жидкости с источниками скоростей деформаций:

$$e_{ik} = A_{ik} + (B_{iklm} + \frac{dE_{iklm}^{-1}}{dt})\sigma_{lm} + E_{iklm}^{-1}\frac{d\sigma_{lm}}{dt}\,. \tag{3}$$

Величины A_{ik} не зависят от напряжений и имеют одинаковый вид для напряженного ($\sigma \neq 0$) и ненапряженного ($\sigma = 0$) роста. При $\sigma = 0$ имеем $\varepsilon_{ik} = A_{ik}$. Таким образом, источниковые слагаемые в реологическом соотношении связаны с межфазным притоком вещества при ненапряженном росте. Например, в растущих растительных тканях тензор A_{ik} диагональный, причем в общем случае $A_{ii} \neq A_{kk}$ [8].

Производные тензоров по времени описывают мгновенные упругие напряжения, которые проявляются на характерных временах функционирования клеток $\tau^e \le 1$ с и связаны, например, с периодическим нагружением кости, хряща, мышц и сухожилий при движении, растущих тканей растений при ветровой нагрузке. Ростовые деформации материала, связанные с реологическими коэффициентами A_{ik}, B_{iklm}, имеют значительно большие характерные времена (τ^g~1–2 ч для растущих корней, τ^g~1–2 суток для листьев растений, τ^g~1–2 года для стволов деревьев). Таким образом, среди слагаемых в (3) можно выделить медленные и быстрые. На характерных временах порядка времен роста соотношение (3) может быть приведено к виду

$$e_{ik} = A_{ik} + B_{iklm}\sigma_{lm}\,. \qquad (4)$$

В силу больших характерных времен роста динамика растущих сред рассматривается с использованием уравнений равновесия [2, 3]:

$$\mathrm{div}\hat{\sigma} + \vec{f} = 0\,, \qquad (5)$$

где $\vec{f}$ – равнодействующая внешних объемных сил.

Уравнения (4), (5) представляют собой замкнутую систему относительно неизвестных $\hat{\sigma}$, $\overline{v}$. Эта система может быть решена при задании граничных условий в смешанной форме:

$$\vec{\sigma}_n\Big|_{\Sigma_1} = \vec{q}\,,\quad \vec{V}\Big|_{\Sigma_2} = \vec{V}^*, \qquad (6)$$

где $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ – поверхность растущего тела.

2 Вывод вариационного уравнения. Рассмотрим тело с объемом V_b, заполненным растущей сплошной средой, в некоторый момент времени t. Реология среды соответствует соотношению (4) и выполнены условия (6). Пусть накопленные к моменту t за счет ростового деформирования компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещения есть σ_{ik}, ε_{ik}, $\vec{u}$ соответственно, а их приращения за время δt есть s_{ik}, ζ_{ik}, $\vec{v}$. Выберем связанную с телом ортогональную систему координат и получим формулу для полной скорости деформации e_{ik}, вводя в соотношения Коши вектор $\vec{u} + \vec{v}$ вместо $\vec{u}$:

$$\varepsilon_{ik} + \zeta_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(u_k + v_k)}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_i}\frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_k}\,. \qquad (7)$$

Записывая тензор полных деформаций ε_{ik} для момента времени t

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} \qquad (8)$$

и вычитая (8) из (7), находим:

$$\zeta_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\left(\delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial v_m}{\partial x_k}\left(\delta_{mk} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_k}.$$

Выражение, помещенное в квадратные скобки, обозначим $\widetilde{e}_{ik}$, тогда

$$\zeta_{ik} = \widetilde{e}_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_k}. \qquad (9)$$

Из (4) получим:

$$s_{ik} = B^{-1}_{iklm}(\zeta_{lm} - A_{lm}). \qquad (10)$$

Запишем вариационное уравнение принципа возможных перемещений для момента времени $t + \delta t$:

$$\int\limits_{V_b} (\sigma_{ik} + s_{ik})\delta(\varepsilon_{ik} + \zeta_{ik})dV_b = \int\limits_{\Sigma_1}(q + \delta q)\delta(u_n + v_n)d\Sigma, \qquad (11)$$

где δq – приращение давления за время δt.

Учитывая, что $\delta\varepsilon_{ik} = 0$ и $\delta u_n = 0$, из (11) получим:

$$\int\limits_{V_b} s_{ik}\delta\zeta_{ik}dV_b - \int\limits_{\Sigma_1}\delta q\delta v_n d\Sigma + J = \int\limits_{\Sigma_1} q\delta v_n d\Sigma - \int\limits_{V_b}\sigma_{ik}\delta\zeta_{ik}dV_b, \qquad (12)$$

где J – невязка. Если состояние тела в момент времени t является равновесным, то $J = 0$. Однако в ходе численных расчетов при использовании шагового процесса в связи с конечностью величины δt возникает погрешность. Поэтому при построении алгоритма невязку J целесообразно не отбрасывать. Это позволяет применить эффективный самокорректирующийся шаговый итеративный метод решения задачи [9].

Подставляя (9) и (10) в (12) и учитывая лишь слагаемые второго порядка относительно приращений перемещений, получаем вариационное уравнение растущего тела в виде:

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int\limits_{V_b}[B^{-1}_{iklm}\widetilde{e}_{ik}\widetilde{e}_{lm} + \sigma^{ik}\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\frac{\partial v_m}{\partial x_k}]dV_b - \int\limits_{V_b} B^{-1}_{iklm}A_{ik}\widetilde{e}_{lm}dV_b - \int\limits_{\Sigma_1}\widetilde{q}v_n d\Sigma + J\right) = 0, \qquad (13)$$

где $\vec{n}$ – нормаль к поверхности Σ.

Варьируемыми в функционале (13) являются лишь компоненты вектора $\vec{v}$.

Уравнение (13) можно решать численно с помощью одного из прямых вариационных методов: Ритца, вариационно-разностного, вариационного векторно-разностного, или метода конечных элементов. Полные значения компонентов σ_{ik}, ε_{ik}, $\vec{u}$ вычисляются суммированием приращений, полученных в шаговом процессе по времени. Для выполнения расчетов необходимо знать реологические коэффициенты материала A_{ik} и B_{ik}.

3 Разрешающая система уравнений МКЭ.

Введем исходные матричные соотношения для векторов скоростей вектора перемещений, тензоров скоростей деформаций и напряжений для одного конечного элемента (КЭ):

$$[v]=[N][\widetilde{V}]\,,\ [e]=[L][N][\widetilde{V}]\,,\ [s]=[B^{-1}]([e]-[A])\,. \tag{14}$$

Здесь $[v]$ – вектор скоростей перемещений, который является функцией координат произвольной точки КЭ; $[\widetilde{V}]$ – искомый вектор значений скоростей перемещений в узлах КЭ, матрица $[N]$ составлена из функций формы; $[L]$ – матричный дифференциальный оператор линейных соотношений Коши-Лагранжа.

Подставляя (14) в (13), получим

$$\begin{gathered}\delta[\widetilde{v}]\left\{\int\limits_{V_b}([L][N]^{\mathrm{T}}[B^{-1}]([L][N]+[L][N])^{\mathrm{T}}[\delta][L][M]-[A])dV_b\right\}[\vec{v}]-\\-\delta[\widetilde{v}]\int\limits_{\Sigma_1}[n]^{\mathrm{T}}[\widetilde{q}]\,d\Sigma+\delta[\widetilde{v}][J]=0,\end{gathered} \tag{15}$$

где $[\sigma]$ – матрица компонент тензора накопленных напряжений; $[n]$ – матрица, которая дает вектор нормальных к поверхности тела скоростей перемещений, $[J]=\int\limits_{V_b}([L][N])^{\mathrm{T}}[\sigma]dV_b-\int\limits_{\Sigma_1}[n]^{\mathrm{T}}[q]d\Sigma$; $[q]$ и $[\widetilde{q}]$ – накопленное и внешнее давления.

Суммируя соотношения (15) по всем КЭ и приравнивая к нулю множители при вариациях компонент вектора узловых значений перемещений, с учетом кинематических граничных условий, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$([K]+[K_g])[\widetilde{v}]=[Q_g]+[Q_q]-[Q_J]\,, \tag{16}$$

где $[K]$ и $[K_g]$ – матрицы жесткости, соответствующие интегралам от первого и второго слагаемых в (15). Первая из них отвечает линейной задаче, вторая учитывает геометрическую нелинейность. Векторы $[Q_g]$, $[Q_q]$, $[Q_J]$ в правой части (16), равны интегралам в третьем, четвертом и пятом слагаемых в (15) и отражают влияние скоростей необратимых деформаций (роста), внешнего давления и невязки соответственно. При отсутствии роста (A_{ik}=0) (16) переходит в известные уравнения метода конечных элементов для деформируемого тела [11].

Заключение. Таким образом, в работе составлен вариационный функционал растущей сплошной среды, реология которой соответствует модели вязкого тела Максвелла с распределенными источниками массы, получены соотношения метода конечных элементов, позволяющие проводить численные расчеты для конечных ростовых деформаций тел произвольной формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Fung, Y. C.** Biomechanics: Motion, Flow, Stress and Growth / Y. C. Fung. – New York: Springer, 1990. – 570 p.

2 **Современные проблемы биомеханики.** Вып. 10. Механика роста и морфогенеза / под ред. Л. В. Белоусова, А. А. Штейна. – М.: Изд-во МГУ. – 2000. – 412 с.

3 **Кантор, Б. Я.** Механика растущего биологического континуума / Б. Я. Кантор, Н. Н. Кизилова // Доповіді НАН України. – 2003. – № 2. – С. 56–60.

4 **Кантор, Б. Я.** Деформации круглой пластины из растущего биоматериала при ограничении роста / Б. Я. Кантор, Н. Н. Кизилова // Теоретич. и приклад. механика. – 2003. – № 37. – С. 130–135.

5 **Finite Elements in Biomechanics**. – Chichester etc.: Wiley, 1982. – 573 p.

6 **Ganghoffer, J. F.** Extremum principles for biological continuous bodies undergoing volumetric and surface growth / J. F. Ganghoffer // Bull. Polish Acad. Sci. – 2012. – Vol. 60. – № 2. – P. 259–263.

7 **Ganghoffer, J. F.** Differential geometry, least action principles and irreversible processes / J. F. Ganghoffer // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. – 2007. – Vol. 65. – № 2. – P. 171– 202.

8 **Manzhirov, A. V.** Mathematical modeling of growth processes in nature and engineering: a variational approach / A. V. Manzhirov, S. A. Lychev // J. Physics. Conf. Series. – 2009. – Vol. 181. – P. 12–18.

9 **Kizilova, N.** Load transfer from the fiber into the growing medium: application to plant leaf growth / N. Kizilova // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 2007. – Vol. 56. – № 2. – P. 162–169.

10 **Кантор, Б. Я.** Самокорректирующийся шаговый процесс расчета гибких оболочек / Б. Я. Кантор, Г. Д. Баевская // Препринт АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Харьков, 1977. – № 54. – 12 с.

11 **Васидзу, К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 544 с.

B. Ya. KANTOR, N. N. KIZILOVA

VARIATIONAL PRINCIPLE FOR THE MECHANICS OF GROWING BIOLOGICAL CONTINUOUS MEDIA

A growing continuous medium rheological model, describing biological issues growing, is presented in the paper. Its variational principle in increments is formulated. On the basis of this principle there was proposed the scheme for numerical calculations by finite element method based on finite deformation and nonlinear properties.

Получено 14.07.2014