

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Мисюра, Н. Е. Лекция по теоретической механике как увлекательный опыт моделирования / Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов, Т. А. Рощева / Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: материалы III Междунар. науч.-практ. конф. – Гомель : БелГУТ, 2013. – С. 438–439.

2 **Spiral wishing well in Japan** [Electronic resource]. – Mode of access: <https://youtu.be/rfNpjrPTYzU>. – Date of access: 20.07.2015.

3 **Euler's Disk** [Electronic resource]. – Mode of access: <https://youtu.be/ug2bKCG4gZY>. – Date of access: 20.07.2015.

4 **Кран и трактор** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://youtu.be/eU39FTZ-wII>. – Дата доступа: 20.07.2015.

5 **Установлена причина падения крана в шахту шлюза Городецкого гидроузла** [Электронный ресурс] // Время. Новости Нижнего Новгорода и Нижегородской области. – Режим доступа: http://www.vremyan.ru/news/ustanovlena_prichina_padenija_krana_v_shahtu_shljuza_gorodeckogo_gidrouzla.html. – Дата доступа: 20.07.2015.

T. A. ROSHCHEVA, N. E. MISYURA, E. A. MITYUSHOV

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia

REALITY – MODELS - SOLUTION

In the work there are considered new strategies of the theoretical mechanics teaching at technical universities, attracting and using real objects of the surrounding reality and the absence of existing models of these objects.

Получено 20.07.2015

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 9. Гомель, 2016

УДК 531.8(075.32)

В. К. ТАРАСОВ, Ю. П. СМЕРНОВ

Тульский государственный университет, Тула, Россия

О КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТАХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Рассматриваются конечные повороты твердого тела с неподвижной точкой. Ориентация оси конечного поворота и угол поворота определены с помощью соотношений аналитической геометрии и сферической тригонометрии.

Пусть твердое тело совершает сферическое движение относительно точки O (рисунок 1), xyz – неподвижная система координат, $x_1y_1z_1$ – система координат, связанная с твердым телом. Ориентация системы $x_1y_1z_1$ относительно системы xyz определяется направляющими косинусами (таблица 1).

Таблица 1 – Направляющие косинусы системы осей $x_1y_1z_1$ относительно xuz

Координата	x	y	z
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z_1	a_{31}	a_{32}	a_{33}

В исходном положении подвижная система совпадает с неподвижной. Затем она перемещается в другое положение в соответствии с таблицей направляющих косинусов. Согласно теореме Эйлера – Даламбера это перемещение можно осуществить с помощью одного поворота. Необходимо определить ориентацию оси конечного поворота и угол поворота вокруг этой оси.

Опишем вокруг точки O сферу единичного радиуса (на рисунке 1 показана ее половина). Точки пересечения осей y, z и y_1, z_1 с поверхностью сферы обозначим буквами A_1, A_2, B_1, B_2 . Оси x и x_1 для дальнейшего не понадобятся.

После поворота на некоторый угол, который будет определен ниже, точка A_1 переходит в точку A_2 , а точка B_1 переходит в точку B_2 . Эти точки имеют следующие координаты в системе xuz

$$A_1(0, 1, 0); A_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}); B_1(0, 0, 1); B_2(a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Проведем плоскости OA_1A_2 и OB_1B_2 .

Точки A и B на рисунке 1 являются серединами отрезков A_1A_2 и B_1B_2 . Координаты этих точек

$$A\left(\frac{a_{21}}{2}, \frac{1+a_{22}}{2}, \frac{a_{23}}{2}\right); B\left(\frac{a_{31}}{2}, \frac{a_{32}}{2}, \frac{1+a_{33}}{2}\right).$$

Через прямую OA проведем плоскость OAP , перпендикулярную плоскости OA_1A_2 , а через прямую OB плоскость OBP , перпендикулярную плоскости OB_1B_2 .

Плоскость OAP является геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A_1 и A_2 , а плоскость OBP является геометрическим местом точек, равноудаленных от точек B_1 и B_2 . Следовательно, ось конечного поворота является линией пересечения указанных плоскостей. Направляющий вектор оси конечного поворота равен векторному произведению двух векторов A_1A_2 и B_1B_2 , нормальных к соответствующим плоскостям. Вектор конечного поворота

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{21} & -(1-a_{22}) & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{vmatrix}.$$

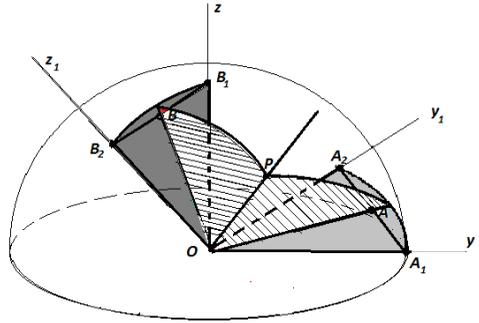


Рисунок 1 – Расчетная схема

Находим координаты этого вектора

$$V_x = -(1-a_{22})(1-a_{33}) + a_{23}a_{32}.$$

Преобразуем

$$V_x = -1 + a_{33} + a_{22} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} - 1 + a_{33} + a_{22} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Далее заметим, что определитель, составленный из направляющих косинусов, обладает следующим свойством: каждый элемент определителя равен своему алгебраическому дополнению. В соответствии с этим

$$V_x = -1 + a_{33} + a_{22} - a_{11}.$$

Следующая координата

$$V_y = -(1-a_{33})a_{21} - a_{23}a_{31}.$$

После аналогичных преобразований

$$V_y = a_{12} + a_{21}.$$

Следующая координата

$$V_z = -a_{21}a_{32} + a_{31}(1-a_{22}) = a_{13} + a_{31}.$$

Направляющие косинусы l , m , n оси конечного поворота определяются по формулам

$$l = \frac{V_x}{V}; \quad m = \frac{V_y}{V}; \quad n = \frac{V_z}{V},$$

где

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

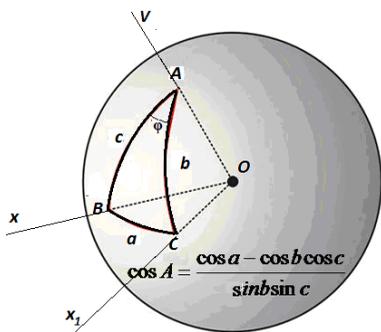


Рисунок 2 – Схема к определению угла конечного поворота

Полученные формулы по форме записи не совпадают с формулами А. Ю. Ишлинского [1], но результаты вычислений по тем и другим формулам совпадают полностью.

Далее необходимо определить угол конечного поворота. Для этого изобразим ось конечного поворота, оси x и x_1 и пересечение этих осей со сферой единичного радиуса в точках A , B и C (рисунок 2).

Угол при вершине A , который на рисунке 2 обозначен через φ , – это угол между плоскостями vOx и vOx_1 , т. е.

угол конечного поворота; c – угол между осью x и осью конечного поворота, b – угол между осью x_1 и осью конечного поворота, a – угол между осями x и x_1 .

Одна из теорем косинусов для сферического треугольника имеет вид

$$\cos\varphi = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

В данном случае $\cos a = a_{11}$; $\cos b = l$; $\cos c = l$.

В соответствии с этим

$$(1-l^2)\cos\varphi = a_{11} - l^2. \quad (1)$$

Если вместо осей x, x_1 взять оси y, y_1 и z, z_1 , то получим еще две формулы

$$(1-m^2)\cos\varphi = a_{22} - m^2, \quad (2)$$

$$(1-n^2)\cos\varphi = a_{33} - n^2. \quad (3)$$

Далее сложим формулы (1), (2) и (3), и с учетом того, что

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

получим формулу для косинуса угла конечного поворота

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1). \quad (4)$$

Эта формула точно совпадает с формулой для угла конечного поворота в монографии [1].

Таким образом, в статье рассмотрен новый способ определения угла конечного поворота, который более прост, чем используемый в настоящее время при изучении темы «Сферическое движение тела».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Ишлинский, А. Ю.** Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 1976. – 672 с.

2 **Вентцель, М. К.** Сферическая тригонометрия / М. К. Вентцель. – М. : Геодезиздат, 1948. – 154 с.

V. K. TARASOV, Y. P. SMIRNOV
Tula State University, Tula, Russia

ABOUT FINITE ROTATION OF THE RIGID BODY WITH A FIXED POINT

There are considered finite rotations of a rigid body with a fixed point. The orientation of finite rotation axis and rotation angle was determined by a interrelation between analytical geometry and spherical trigonometry.

Получено 14.04.2015