

УДК 532.59:612.1

Е. Н. ФИЛИППОВА¹, Н. Н. КИЗИЛОВА²

¹Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина

²Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН КАК МЕХАНИЗМ УВЕЛИЧЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МЯГКИХ ВОЛНОВОДОВ

Исследуются закономерности распространения и отражения волн в заполненных вязкой жидкостью разветвленных в виде бинарных деревьев системах податливых трубок (мягких волноводах) как моделях кровеносных русел. Параметры моделей соответствуют результатам измерений на препаратах и медицинских изображениях. На основе модели распространения цилиндрических волн в толстостенных трубках из вязкоупругого материала проведены расчеты распределений волновой проводимости и коэффициента отражения как дерева в целом, так и его ветвей. Показано, что разветвленная структура позволяет существенно увеличить волновую проводимость системы трубок. Увеличение проводимости по направлению к корню дерева коррелирует с уменьшением коэффициента отражения волн на ветвлениях трубок. При определенных соотношениях между диаметрами и длинами трубок коэффициент отражения становится отрицательным и определяет подсосывающий эффект, что ведет к росту проводимости дерева. В артериальных системах этот механизм может реализовываться за счет биоактивности материала стенок артерий.

Артериальные русла представляют собой разветвленные системы податливых трубок с постепенно уменьшающимися по мере ветвления диаметрами и длинами. Движение крови по таким системам происходит за счет периодических сокращений сердца, которое генерирует возмущения давления и скорости малой амплитуды. Эти возмущения распространяются в виде волн со скоростью звука, характерной для заполненных несжимаемой жидкостью мягких волноводов. На участках бифуркаций сосудов имеет место отражение волн. Таким образом, в каждом кровеносном сосуде имеет место суперпозиция многочисленных падающих, отраженных и проходящих волн [1]. Волны, распространяющиеся по течению, способствуют перемещению крови от крупных артерий к малым, а отраженные волны, наоборот, замедляют массоперенос.

В разветвленных артериальных системах легких был экспериментально обнаружен эффект отрицательного отражения волн, который возникает в тех случаях, когда волновая проводимость артерии меньше проводимости нижележащего разветвленного русла [2]. Было показано, что отрицательное отражение волн в коронарных артериях, проводимость которых увеличивается при расслаблении сердечной мышцы в период диастолы, играет важную роль в кровоснабжении сердца [3].

Влияние геометрии разветвленной системы мягких трубок на ее волновую проводимость по отношению к разным гармоникам при различных параметрах ветвления исследовались для стационарного (Пуазейлевского) [4] и волнового [5] течений крови, а также на модели русла коронарных артерий человека [6]. В данной работе отрицательное отражение волн исследуется как механизм увеличения проводимости мягких волноводов.

Цилиндрические волны в вязкоупругих трубках. Геометрия кровеносной системы характеризуется определенными закономерностями в виде зависимостей между диаметрами в бифуркациях и соотношениями длин-диаметр [7]. Эти зависимости были получены путем многочисленных измерений на препаратах и медицинских изображениях и могут быть использованы для генерации моделей кровеносных систем как бинарных деревьев. Такие модели с высокой степенью точности описывают кровеносные русла легких, печени, почек, надпочечников, селезенки. Колебания давления $p(t)$ и объемного кровотока $Q(t)$ в каждом сосуде представляют собой результат суперпозиции падающей и отраженной волн:

$$p(t) = P_f^0 e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/c} + \Gamma e^{i\omega(x-2L)/c}) \quad (1)$$

$$Q(t) = Y^0 P_f^0 e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/c} - \Gamma e^{i\omega(x-2L)/c}) \quad (2)$$

где f – частота волны; $\omega = 2\pi f$; L – длина сосуда; P_f^0 – амплитуда давления падающей волны; $Y^0 = S/(\rho c)$ – характеристическая волновая проводимость сосуда; S – площадь сечения; ρ – плотность крови; c – скорость звука; Γ – коэффициент отражения волн, который для бифуркации трубки с волновой проводимостью Y^1 на две дочерних трубки с проводимостями Y^2 и Y^3 суть

$$\Gamma = \frac{Y^1 - Y^2 - Y^3}{Y^1 + Y^2 + Y^3}. \quad (3)$$

Таким образом, если $Y^1 > Y^2 + Y^3$, то $\Gamma > 0$, и за счет отраженной волны амплитуда давления растет, а объемного расхода – уменьшается, как следует из (1) и (2). При $Y^1 > Y^2 + Y^3$ имеет место отрицательное отражение и амплитуда давления на конце трубки уменьшается, а объемного расхода – возрастает, определяя так называемый подсосывающий эффект. В этом смысле артериальные системы не являются пассивными волноводами, создающими лишь сопротивление течению жидкости, довольно высокое за счет уменьшения диаметра трубок по мере их разветвления, а наоборот, способствуют увеличению проводимости для волнового течения за счет поддержания определенного соотношения между проводимостями как в отдельных бифуркациях, так и в дереве в целом.

Зададим давление $P(t)$ во входном сечении корневой трубки модели артериального русла как бинарного дерева в виде Фурье-разложения $P(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j e^{i\omega_j t}$.

В местах бифуркаций возникают отраженные волны, параметры которых определяются коэффициентом отражения (3). В общем случае $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$, где Γ_1 определяет амплитуду, а Γ_2 – фазу отраженной волны. Будем считать, что трубки последнего порядка ветвления заканчиваются пучками капилляров, проводимость которых $Y_t = Y_t^0 (y_1 + iy_2)$, где Y_t^0 – характеристическая проводимость трубки, которая заканчивается терминальным элементом, а y_1 и y_2 соответствуют резистивным и емкостным свойствам терминального элемента, $\Gamma_t = y_1 + iy_2$ – коэффициент отражения волн на терминальных элементах. В артериальных руслах в роли терминальных элементов выступают капилляры.

Характеристическая волновая проводимость Y^0 трубки соответствует ее проводимости на данной частоте без учета влияния нижележащей системы трубок, т. е. трубке конечной длины с открытым концом. Реальная волновая проводимость должна рассчитываться по формуле

$$Y_{in} = Y^0 \frac{1 - \Gamma e^{-2i\omega L/c}}{1 + \Gamma e^{-2i\omega L/c}}, \quad (4)$$

которая учитывает отражение волн на конце трубки от нижележащей системы.

Скорость волн характеризуется зависимостью от частоты $c = c(\omega)$ (дисперсия) и для случая трубки из вязкоупругого материала при условии продольного закрепления внешней поверхности трубки может быть рассчитана по формуле [1]

$$c = \left(\frac{Eh(1 - F_{01})e^{i\theta}}{\rho d(1 - \sigma^2)} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где E , σ , h – модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина стенки; $F_{01} = 2J_1(\beta)/(J_0(\beta))$ – функция Уомерсли; J_n – функция Бесселя первого рода порядка n , $\beta = \alpha(-1)^{3/4}$, $\alpha = d\sqrt{\omega\rho/\mu}/2$; μ – вязкость жидкости; θ – вязкость материала стенки.

Методика расчета полной волновой проводимости бинарного дерева, образованного заполненными жидкостью мягкими трубками, основана на аналогии нестационарного течения жидкости и переменного тока в электрических цепях и связана с суммированием волновых проводимостей параллельно расположенных трубок, суммированием волновых сопротивлений последовательно расположенных трубок, начиная от мельчайших элементов с проводимостями Y_n , которые соответствуют капиллярам [7].

Результаты расчетов и обсуждение. Численные расчеты проводились при следующих наборах параметров системы: $n = 10$ – число порядков ветвления в дереве, $\zeta = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ и $\gamma = 2, 3, 4$ – коэффициенты ветвления и асимметрии бифуркаций [7], $d_1 = 3$ мм – диаметр корневой трубки, $L(d) = 5d$,

$y_1 = 0; 0,5; 1,2$, $y_2 = -0,5; 0,1; 0; 0,1; 0,5$, $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $f = 1 \text{ Гц}$. При $y_1 = 0$ проводимости терминальных элементов имеют те же значения, что и трубки, от которых они отходят, так что отражение волн отсутствует. При $y_2 = 0$ имеет место чисто резистивное отражение, когда фаза отраженной волны совпадает с фазой падающей. Если $y_2 > 0$ или $y_2 < 0$, то отраженная волна смещается по фазе относительно падающей в направлении против течения или по течению соответственно.

На рисунке 1 представлены некоторые характерные результаты расчетов распределений амплитуды проводимости и коэффициента отражения волн вдоль наиболее длинного из путей от корня дерева к терминальным элементам. Для симметричных деревьев с $\xi = 1$ все пути имеют одинаковую длину, но в асимметричных деревьях длины путей существенно различаются. Длина пути отсчитывается от входного сечения корневой трубки ($X = 0$) до участка соединения трубки последней генерации со своим терминальным элементом ($X = X^* = \sum_{k=0}^n L_2$, n – число генераций в дереве), так что координата

$X = 0$ соответствует бинарному дереву в целом, а координаты $X \in]0, X^*[$ – отдельным веткам (подсистемам) дерева.

При отсутствии фазового сдвига на терминальных элементах ($y_2 = 0$) коэффициент отражения $\Gamma(X)$ монотонно уменьшается по мере соединения трубок в бифуркациях (X уменьшается), так что на определенном участке X_m внутри дерева $\Gamma(X_m) = 0$, и отраженная волна отсутствует (рисунок 1, а), а величина проводимости соответствующей нижележащей ветки дерева увеличивается (рисунок 1, б). Далее по мере укрупнения ветки (с уменьшением X) коэффициент отражения становится отрицательным, а проводимость резко возрастает.

В случае положительного фазового сдвига ($y_2 > 0$) коэффициент отражения волн остается положительным для $y_1 > 0$, т. е. для всех ветвей дерева проводимость остается меньше проводимости ее предшествующей ей трубки. Отрицательный коэффициент отражения имеет место только при $y_1 = 0$ (рисунок 1, в). Таким образом, увеличение проводимости, обусловленное увеличением числа путей для распространения волны и увеличением массопереноса жидкости по соответствующей системе трубок, в данном случае нивелируется положительным отражением на ветвлениях и положительным фазовым сдвигом на терминальных элементах. В случае фазового сдвига в противоположном направлении ($y_2 < 0$) наблюдается прямо противоположный эффект: коэффициент отражения резко снижается от ветвления к ветвлению (рисунок 1, г), а проводимость, соответственно, растет. Следует отметить, что соответствующие кривые $\Gamma(X)$ при $y_2 = 0$ являются выпуклыми вверх, а при $y_2 < 0$ – выпуклыми вниз, что соответствует более выраженному снижению коэффициента отражения за счет отрицательного фазового сдвига

на терминальных элементах. Чем больше величина этого сдвига, тем значительнее снижение коэффициента отражения (рисунок 1, δ) и увеличение проводимости (рисунок 1, e).

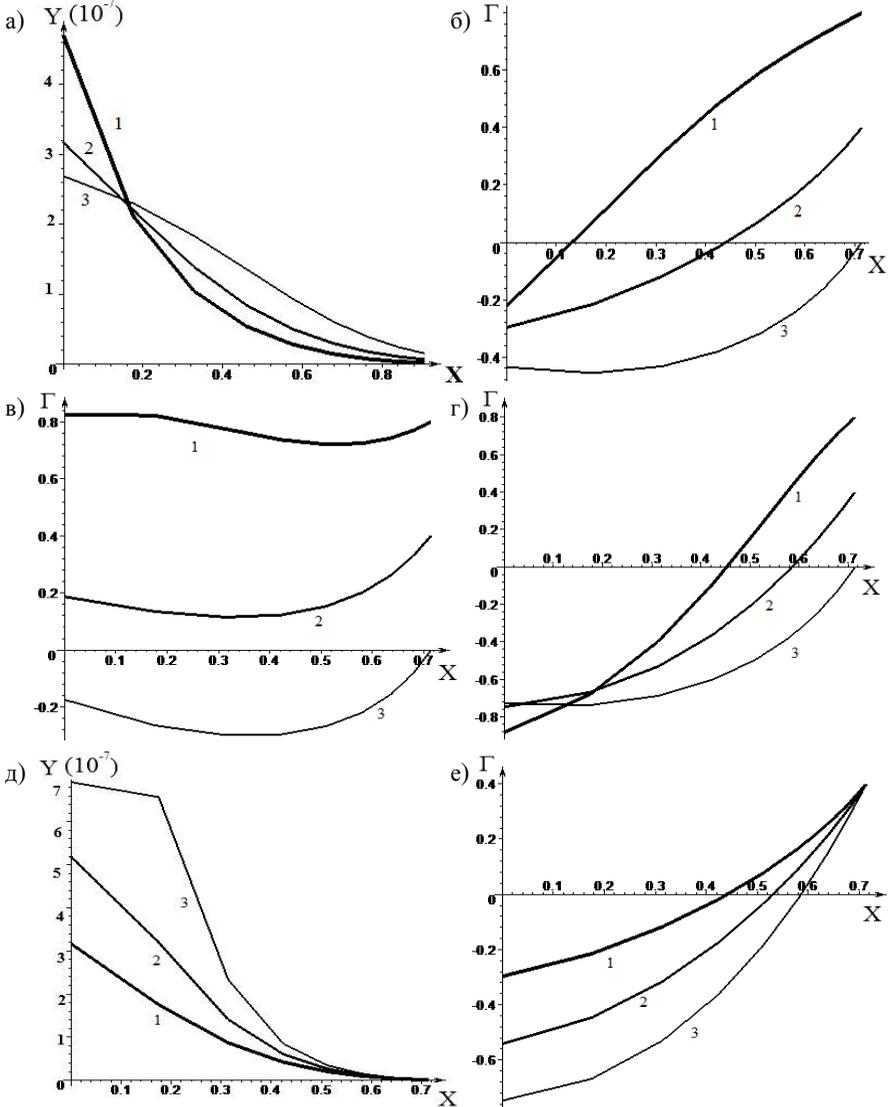


Рисунок 1 – Зависимости $Y(X)$ (а, д) и $\Gamma(X)$ (б, в, з, е) для бинарного дерева с $\xi = 1$.
 Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $y_1 = 0; 0,4; 0,8$, $y_2 = 0$ (а, б), $y_2 = 0,5$ (в),
 $y_2 = -0,5$ (з) и $y_1 = 0,4$, $y_2 = -0,5; -0,25; 0$ (д, е)

Для асимметричных бинарных деревьев выявленный эффект перестает быть монотонным с увеличением X . Так, при $\xi = 0,6$ коэффициент отражения монотонно увеличивается с уменьшением X при $y_2 > 0$, только если $y_1 = 0$, а при $y_1 > 0$ сначала возрастает, а затем уменьшается до положительных же значений (рисунок 2, а). Соответствующие проводимости при этом немонотонно растут только за счет увеличения числа возможных путей для распространения волн и роста скорости распространения по мере уменьшения диаметра трубки в соответствии с (5). При $y_2 < 0$ эффект снова меняется на противоположный и даже при $y_1 > 0$ имеет место отрицательное отражение (рисунок 2, б). В асимметричных руслах существенно возрастает длина самого длинного пути вдоль дерева, поэтому как кривые $\Gamma(X)$, так и $Y(X)$ становятся немонотонными (рисунок 2, в, г).

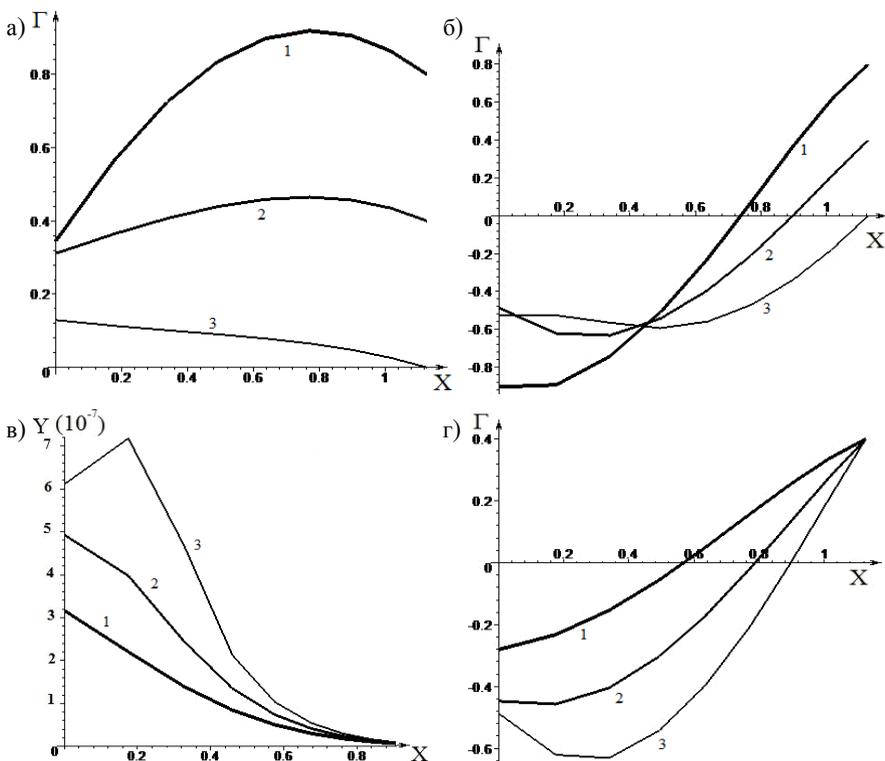


Рисунок 2 – Зависимости $\Gamma(X)$ (а, б, г) и $Y(X)$ (в) для бинарного дерева с $\xi = 0,6$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $y_1 = 0; 0,4; 0,8$, $y_2 = 0,5$ (а), $y_2 = -0,5$ (б) и $y_1 = 0,4$, $y_2 = -0,5; -0,25; 0$ (в, г).

В сильно асимметричных руслах ($\xi \leq 0,5$) коэффициент отражения остается положительным и при $y_1 = 0$, если $y_2 > 0$, и даже при $y_2 < 0$ он уменьшается незначительно (рисунок 3, а, б).

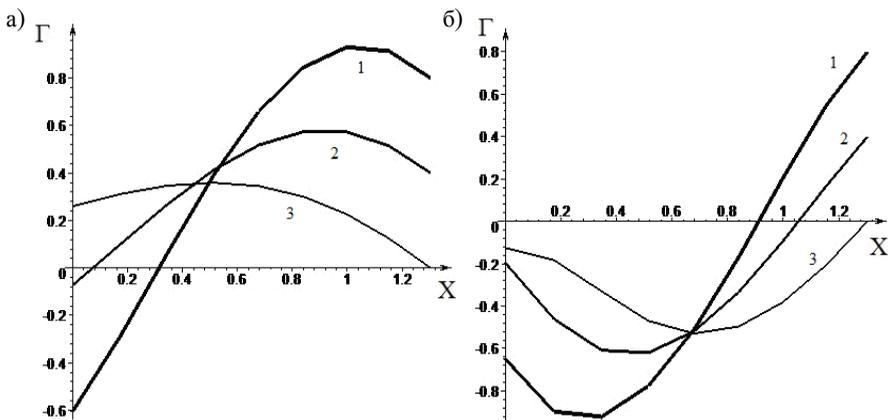


Рисунок 3 – Зависимости $\Gamma(X)$ для бинарного дерева с $\xi = 0,4$, $y_2 = 0,5$ (а) и $y_2 = -0,5$ (б) при $y_1 = 0; 0,4; 0,8$ (кривые 1, 2, 3 соответственно)

Артериальные русла легких характеризуются достаточно высокой асимметрией ветвлений, поэтому отрицательное отражение может наблюдаться в них при разных условиях отражения волн в мельчайших артериях [2]. В какой степени отрицательное отражение, характерное для русла коронарных артерий здорового человека [3], может обеспечиваться поддержанием артериями определенных значений диаметров, составит предмет дальнейших исследований.

Заключение. В работе проведены расчеты волновой проводимости модели мягкого волновода в виде бинарного дерева, образованного трубками из вязкоупругого материала. Показано, что при соотношениях между диаметрами трубок в разветвлениях и соотношениях длина–диаметр, которые характерны для артериальных систем млекопитающих, имеет место отрицательное отражение волн на бифуркациях. Это приводит к отражению падающей волны скорости не против, а по течению жидкости и, таким образом, к увеличению проводимости системы на данной гармонике. В артериальных системах диаметры артерий могут изменяться и поддерживаться в определенном диапазоне значений за счет биоактивности материала стенки артерий. Таким образом, отрицательное отражение волн может использоваться для увеличения притока крови к внутренним органам, что соответствует экспериментальным данным, полученным для артериальных систем легких и сердца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Milnor, W.R.** Hemodynamics / W. R. Milnor. – Baltimore : Williams &Wilkins, 1989. – 408 p.

2 **Negative wave reflections in pulmonary arteries** / E. H. Hollander [et al.] // American Journal of Physiology – Heart and Circulatory Physiology. – 2001. – Vol. 281, № 2. – P. H895–H902.

3 **Evidence of a dominant backward-propagating "suction" wave responsible for diastolic coronary filling in humans, attenuated in left ventricular hypertrophy** / J. E. Davies [et al.] // Circulation. – 2006. – Vol. 113, № 14. – P. 1768–1778.

4 **Кизилова, Н. Н.** Моделирование внутриорганных артериальных русел. I. Стационарное течение крови при малых числах Рейнольдса / Н. Н. Кизилова // Биофизика. – 2006. – Т. 51, № 4. – С. 733–737.

5 **Кизилова, Н. Н.** Моделирование внутриорганных артериальных русел. II. Распространение волн давления / Н. Н. Кизилова // Биофизика. – 2007. – Т. 52, № 1. – С. 131–136.

6 **Зенин, О. К.** Исследование закономерностей строения русла коронарных артерий человека / О. К. Зенин, Н. Н. Кизилова, Е. Н. Филиппова // Биофизика. – 2007. – Т. 52, № 5. – С. 924–930.

7 **Балабанов, В. А.** Новый алгоритм построения оптимальных транспортных систем, заполняющих заданную область. / В. А. Балабанов, Н. Н. Кизилова // Механика. Исследования и инновации. – 2016. – Вып. 9. – С. 18–26.

*H. N. PHILIPPOVA*¹, *N. N. KIZILOVA*²

¹*National Technical University "Kharkov polytechnic institute", Kharkov, Ukraine*

²*V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov, Ukraine*

NEGATIVE WAVE REFLECTION AS A MECHANISM OF INCREASE OF THE BRANCHED SOFT WAVEGUIDES CONDUCTIVITY

Regularities of the wave reflections in the branched systems of filled by a viscous fluid compliant tubes as a model of the blood vasculatures are studied. Geometry of the branched systems is described by the measurement data obtained from the preparations and medical images. Based on the mathematical model of axisymmetric pulse waves in the thick-walled tubes made from a viscoelastic material, there were made the calculations for wave conductivity distributions and wave reflection coefficient in the entire tree as well as in its branches. It is shown that the branched structure allows to increase the wave conductivity of the system of tubes significantly. The increase in the conductivity in the direction to the root of the tree correlates with the decrease in the reflection coefficient at the branches. At certain ratios between the diameters and lengths of the tubes the wave reflection coefficient becomes negative that determines the suction effect, which leads to an increase in the conductivity of the system. In the arterial systems this mechanism may be realized due to the bioactivity of the arterial walls.

Получено 14.02.2016