

УДК 519.642

Д. Г. ПРИБЫТОК

*Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша***МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЁХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ СТОКСА  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Рассматривается моделирование трёхмерного течения вязкой жидкости (течение Стокса) методом граничных элементов. Главная особенность метода заключается в том, что дискретизации подвергается только граница области решения, что позволяет облегчить процесс построения сетки и одновременно сэкономить вычислительные ресурсы. В работе показан общий подход к построению численного решения задачи нахождения поля скоростей течения Стокса. Сравнение результатов численного моделирования с аналитическим решением для течения жидкости в прямолинейной трубе кругового сечения (течение Пуазейля) показало их хорошее соответствие.

**Введение.** Под течением вязкой жидкости обычно понимается течение при малых числах Рейнольдса. Если в уравнениях Навье-Стокса сделать допущение о стационарности потока и перейти к безразмерным величинам, то уравнения сохранения количества движения приобретают вид [1]

$$\text{Re} \cdot \vec{u}^* \cdot (\nabla \vec{u}^*) = -\nabla p^* + \Delta \vec{u}^*, \quad (1)$$

где  $\text{Re} = \frac{U_c L_c}{\nu}$  – число Рейнольдса;  $\vec{u}$  – вектор скорости точки потока жидкости;  $p$  – давление;  $U_c$  – характерная скорость;  $L_c$  – характерный линейный размер;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости.

Число Рейнольдса, по сути, выражает соотношение между силами инерции и вязкого сопротивления, что позволяет пренебрегать первыми в случае малости  $\text{Re}$ , а вторыми – в случае, если число Рейнольдса очень велико. Отметим, что даже течение жидкостей с относительно малым коэффициентом кинематической вязкости (например, для крови человека  $\nu = 3,35 \cdot 10^{-6}$  Па·с/кг) может в некоторых ситуациях обладать свойством  $\text{Re} \ll 1$  (таблица 1).

Таблица 1 – Число Рейнольдса течения крови в организме человека

Тип сосуда	Скорость течения крови, см/с	Диаметр, см	Re
Аорта	48	2,5	3400
Артерия	45	0,4	500
Артериола	5	0,005	0,7
Капилляры	0,1	0,0008	0,002
Венула	0,2	0,002	0,01
Вена	10	0,5	140
Полая вена	38	3,0	330

Таким образом, предполагая  $Re \ll 1$ , можем отбросить в уравнении (1) левую часть и, переходя к размерным величинам, получим

$$\nabla p - \mu \Delta \bar{u} = 0, \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости. Из уравнения сохранения массы

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия могут быть заданы как для напряжений, так для скоростей. В данной работе будет рассматриваться случай, при котором известны граничные условия для скорости:

$$\bar{u} \in \Gamma = \bar{u}_\Gamma. \quad (4)$$

Уравнения (2), (3) с граничными условиями (4) представляют собой математическую модель течения Стокса. В работе анализируется точность решения задачи о таком течении с применением метода граничных элементов [2], который представляется наиболее оптимальным как с точки зрения простоты построения расчетной сетки, так и скорости расчётов. В качестве недостатка метода стоит отметить необходимость использования довольно большого объема оперативной памяти. Матрица, получающаяся на первом этапе решения, для трёхмерного случая при использовании сравнительно простых прямоугольных элементов, имеет размерность  $3N \times 3N$  и является полностью заполненной. Для количества элементов  $N = 5000$  с учетом того, что число с плавающей точкой занимает 4 байта, необходимо 900 мегабайт оперативной памяти, при  $N = 9000$  – 2,916 гигабайт,  $N = 21000$  – 15,876 гигабайт и т. д. Таким образом, на данный момент в расчетах на персональных компьютерах максимально возможное число дискретных элементов составляет порядка 30000.

**Интегральное представление уравнений Стокса.** Как было показано в работах [3–5], уравнения (2), (3) могут быть приведены к интегральной форме:

$$\xi(x_0) \cdot u_j(x_0) = -\frac{1}{\mu} \oint_{\Omega} \phi_i(x) \cdot G_{ij}(x, x_0) d\Omega + \oint_{\Omega} u_i \cdot T_{ijk}(x, x_0) \cdot n_k(x) d\Omega, \quad (5)$$

где  $i, j, k$  могут принимать значения 1, 2, 3;  $\Omega$  – граница области решения  $V$ ;  $\Omega \not\subset V$ ;  $x$  точка, принадлежащая  $\Omega$ ;  $n(x)$  – вектор внешней нормали к  $\Omega$  в точке  $x$ ;  $x_0$  – произвольная точка пространства;  $\xi(x_0)$  – весовая функция,  $G_{ij}$  – тензорный потенциал Стокса,  $T_{ijk}$  – тензор, ассоциированный с  $G_{ij}$ ,  $\phi(x)$  – вектор напряжений на границе  $\Omega$  в точке  $x$ ;  $\hat{x}$  – разность  $x_0 - x$ ; причем

$$\xi(x_0) = \begin{cases} 8, & x_0 \in V; \\ 4, & x_0 \in \Omega; \\ 0, & x_0 \notin \Omega \vee x \notin V; \end{cases} \quad G_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{r^3}; \quad T_{ijk} = -6 \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k}{r^5};$$

$r$  – расстояние от точки  $x$  до  $x_0$ .

Если на границе области задана вектор-функция скорости, то искомыми в уравнении (5) будут поверхностные напряжения. Аналитическое решение

названного уравнения весьма затруднительно. Поэтому приходится прибегать к различного рода аппроксимациям, которые в нашем случае будут касаться границы области  $\Omega$  и функций  $\phi_i(x)$ .

**Численная аппроксимация интегральных уравнений.** Разобьем границу трехмерной области на  $N$  граничных элементов ( $\Gamma\mathcal{E}$ ), представляющих собой пространственные прямоугольники. В рамках решаемой задачи будем рассматривать далее только такие области, граница которых может быть с достаточной точностью аппроксимирована прямоугольными элементами. В центре каждого  $\Gamma\mathcal{E}$  зададим локальную систему координат. Будем предполагать, что функции напряжений  $\phi_i(x)$  являются на нём постоянными. Так как мы рассматриваем граничные условия для скорости, то для каждой точки границы, а после её дискретизации и для каждого  $\Gamma\mathcal{E}$ , необходимо задать вектор скорости. Далее примем, что скорости будут заданы в локальной системе координат элемента. В уравнении (5), поочередно помещая рассматриваемую точку  $x_0$  в центры полученных граничных элементов, получим следующий вид интегрального уравнения:

$$u_j(x_0^p) = -\frac{1}{4\pi\mu} \sum_{q=1}^N [\bar{\phi}(\xi_0^q) A_{qp} \int_{-db_q}^{db_q} \int_{-da_q}^{da_q} G_{ij}(A_{gq}(x_0^p - \xi_0^p), \xi(\xi_x, \xi_y, 0)) d\xi_x d\xi_y] + \frac{1}{4} I_j^\Gamma(x_0^p), \quad (6)$$

где

$$I_j^\Gamma(x_0^p) = \sum_{q=1}^N [\bar{u}(\xi_0^q) A_{qp} \int_{-db_q}^{db_q} \int_{-da_q}^{da_q} T_{ijk}(A_{gq}(x_0^p - \xi_0^p), \xi(\xi_x, \xi_y, 0)) \cdot (0, 0, 1) d\xi_x d\xi_y], \quad (7)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3; \quad p, q = 1, 2, 3, \dots, N.$$

$x_0^p, \xi_0^p$  – центры элементов с индексами  $p, q$ ;  $A_{qp}$  – матрица перехода от  $q$ -й к  $p$ -й системе координат;  $A_{gq}$  – матрица перехода от глобальной к  $q$ -й системе координат;  $a_q, b_q$  – длины сторон  $q$ -го прямоугольника.

В уравнениях (6), (7) интегралы от тензор-функций  $G_{ij}$  и  $T_{ijk}(0, 0, 1)$  можно найти для общего случая аналитически, либо с применением таких систем как, например, Mathematica. Однако более практичным представляется численное интегрирование. Для вычисления большинства интересных нас двумерных интегралов по прямоугольным областям достаточно воспользоваться квадратурными формулами (в данной работе использовалась 12-точечная схема, дающая 7-й порядок точности интегрирования). Особого внимания заслуживают случаи, когда точки  $p$  и  $q$  находятся одновременно на  $p$ -м или на  $q$ -м  $\Gamma\mathcal{E}$ . В таком случае подынтегральные выражения будут иметь «слабую сингулярность» в области интегрирования (рисунок 1).

Данное обстоятельство не влияет на формулы аналитического расчёта, однако при использовании численного подхода обычные квадратурные фор-

мулы дают достаточно большие погрешности. В связи с этим использовался двумерный аналог метода прямоугольников с достаточно мелким шагом разбиения (20×20), где ячейка, содержащая сингулярную точку, не принималась в расчёт. Полученный метод может быть применен на ранних стадиях реализации алгоритма, другие подходы к решению проблемы с сингулярностью представлены в работах [6–8].

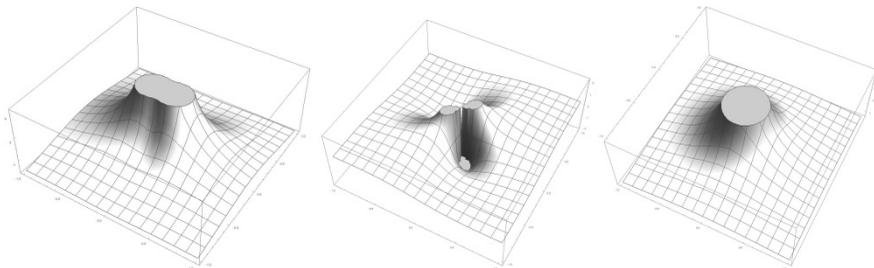


Рисунок 1 – Примеры сингулярных функций  $G_{ij}(p, q)$  для  $p = q, a = b = 1$

**Пример. Течение Пуазейля в трёхмерной трубе.** Рассмотрим хорошо известный пример, имеющий аналитическое решение, о течении жидкости в трубе при малых числах Рейнольдса – течение Пуазейля. Вид решения

$$u(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2),$$

где  $R, L$  – соответственно радиус и длина трубы;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $p_1, p_2$  – давления на концах трубы.

Далее примем  $L = 6, R = 1, p_1 - p_2 = 6, \mu = 0,25$ .

Тогда профиль скорости

$$u(r) = 1 - r^2. \quad (8)$$

Граничноэлементная сетка данной области показана на рисунке 2. Она содержит 2272 граничных элемента, из которых 112 использованы для разбиения каждого из кругов-оснований, и 2048 – для боковой поверхности.

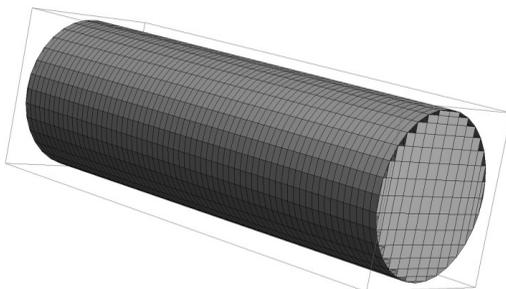


Рисунок 2 – Граничноэлементная сетка области (не содержит треугольников)

Граничные условия для скорости заданы следующим образом: на боковой поверхности вектор скорости жидкости равен нулю, на основаниях задан параболический профиль (с единичной максимальной скоростью) для нормальной составляющей и приняты нулевыми касательные составляющие скорости.

Сравнение результатов расчёта и аналитического решения (10) показано на рисунке 3, в таблице 2 дана оценка погрешности, рассчитанной по формуле

$$\Delta = 100 \cdot \left| \frac{u_1 - u_2}{\max(u) = 1,0} \right| \%$$

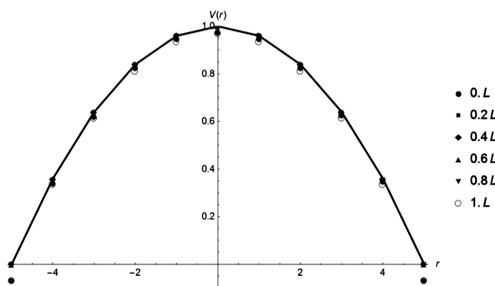


Рисунок 3 – Продольная скорость в разных сечениях трубы. Маркированные точки соответствуют численному решению, ломаная – аналитическому

Таблица 2 – Оценка погрешности  $\Delta$  расчёта продольной скорости в некоторых точках трубы В процентах

$r/R$	Продольная координата точки трубы						
	0,0-l	0,2-l	0,4-l	0,5-l	0,6-l	0,8-l	1,0-l
0,0	2,576	0,049	0,011	0,006	0,011	0,049	2,948
0,2	1,386	0,078	0,043	0,039	0,043	0,078	2,520
0,4	1,480	0,167	0,139	0,136	0,139	0,168	2,807
0,6	1,323	0,318	0,299	0,297	0,299	0,318	2,672
0,8	1,295	0,533	0,524	0,523	0,524	0,533	2,475
1,0	6,877	0,043	0,042	0,042	0,042	0,043	6,877

Как видно из сравнения численных и аналитического решений, полученный результат обладает максимальной погрешностью порядка 7 % на стыке круга основания и боковой поверхности трубы, и около 3 % на её центральной оси (на входе и выходе из трубы). Анализируя таблицу 2, можно также увидеть характерное для метода распределение погрешностей – чем дальше от поверхностей находится рассматриваемая точка, тем точнее результат. Наибольшие погрешности возникают вблизи стыков и углов.

**Заключение.** Применение метода граничных элементов целесообразно для моделирования трёхмерных течений Стокса. Он позволяет получить решения для распределения скоростей с высокой точностью, а также учесть сложные геометрические характеристики канала, сокращая на единицу размерность задачи. Недостатком МГЭ является необходимость использования большого объёма оперативной памяти при расчётах, однако это частично

компенсируется необходимостью разбиения только границы области решения, что делает метод особенно полезным при моделировании явлений с динамически изменяющимися границами, либо при решении задач в областях со сложной геометрией. Также следует отметить, что малая погрешность расчетов была получена при использовании плоских элементов для постоянных функций  $\phi(x)$ . Дальнейшее уменьшение погрешности может быть достигнуто применением граничных элементов с неравномерным распределением функций влияния.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Brebbia, C. A.** Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering / C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel. – Berlin : Springer-Verlag, 1984. – 464 p.

2 **Cheng, A. H.-D.** Heritage and early history of the boundary element method / A. H.-D. Cheng, D. T. Cheng // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2005. – Vol. 29, № 3. – P. 268–302.

3 **Pozrikidis, C.** Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow / C. Pozrikidis. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992. – 259 p.

4 **Katsikadelis, J.** Boundary Elements: Theory and Applications / J. Katsikadelis. – London: Elsevier Science, 2002. – 430 p.

5 **Marin, O.** Boundary integral methods for Stokes flow: Quadrature techniques and fast Ewald methods: Theory and Applications: PhD thesis / O. Marin. – Stockholm : KTH Royal Institute of Technology, 2012. – 204 p.

6 **Cortez, R.** The method of regularized Stokeslets in three dimensions: Analysis, validation, and application to helical swimming / R. Cortez, L. Fauci, A. Medovikov // Physics of Fluids. – 2005. – Vol. 17. – P. 031504-1– 031504-14.

7 **Lisicki, M.** Four approaches to hydrodynamic Green's functions – the Oseen tensors / M. Lisicki. – Warsaw : University of Warsaw, 2013. – 5 p.

8 **Tlupova, S.** Nearly singular integrals in 3D Stokes flow/ S. Tlupova, J. T. Beale // Communications in Computational Physics. – Vol. 14, № 5. – P. 1207–1227.

*D. G. PRIBYTOK*

*Gdańsk University of Technology, Gdansk, Poland*

## SIMULATION OF THREE-DIMENSIONAL STOKES FLOW BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

There is considered the modeling of three-dimensional viscous flow (Stokes flow) by boundary element method. The main feature of this method is that only the solution area boundary is discretized. This fact allows to facilitate the meshing process and to save computational resources at the same time. The paper shows a general approach to the numerical solution construction for the problem of the Stokes flow velocity field definition. The comparison of numerical results with the analytical solution for fluid flow in a straight pipe of circular cross section (Poiseuille flow) showed their good agreement.

Получено 14.05.2015