

УДК 517.977.14

*В. И. КОРОБОВ, Т. В. РЕВИНА**Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина***УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
С УЧЕТОМ НЕИЗВЕСТНОГО ТРЕНИЯ**

Рассматривается задача определения управления, переводящего материальную точку в положение покоя при движении с учетом неизвестного трения за конечное время. Решение основано на методе функции управляемости В. И. Коробова. Цель работы – найти границы изменения коэффициента нелинейного вязкого трения, при которых перевод в положение равновесия осуществляется таким же управлением, как и в отсутствие трения.

Рассмотрим задачу управления движением материальной точки по поверхности с неизвестным ограниченным трением. Движение этой системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p(x_1, x_2, t)x_2 + u. \quad (1)$$

В системе (1) функция  $u$  – управление (регулируемая мощность двигателя), удовлетворяющее заранее заданным ограничениям  $|u| \leq 1$ , слагаемое  $p(x_1, x_2, t)x_2$  – мощность трения, причем коэффициент нелинейного вязкого трения  $p(x_1, x_2, t)$  – неизвестная функция, удовлетворяющая ограничению  $p_1 \leq p(x_1, x_2, t) \leq p_2$ ,  $p_1 < 0, p_2 > 0$ . Такие системы называют робастными [1]. Случай  $p(x_1, x_2, t) \equiv \text{const} < 0$  отвечает вязкому трению, пропорциональному первой степени скорости. Рассматриваемые ограничения на  $p(x_1, x_2, t)$  не исключают случая «отрицательного» трения. При  $p(x_1, x_2, t) \equiv 0$  система называется канонической и является полностью управляемой.

Уравнения системы (1) могут быть записаны в матричном виде

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u, \quad \text{где } A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В работе [2, п. 1.2] получено управление  $u(x)$ , решающее задачу синтеза для канонической системы, то есть переводящее произвольную начальную точку  $x^0$  в точку  $x^1 = 0$  в некоторый конечный момент времени. Решение проводится на основе метода функции управляемости [2, 3]. В работе Коробова В. И. [3, 1979] впервые дан общий подход к решению задачи синтеза допустимых управлений для произвольной нелинейной автономной управляемой системы. В настоящее время решению задачи синтеза за конечное время (finite-time stability) для систем с возмущениями посвящено много работ, см., например, [1, 2, 4–6]. В работе [7] представлено решение задачи о

стабилизации за бесконечное время механической системы, описываемой системой двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, коэффициенты которых неизвестны точно. В работах [5, 7] условия стабилизации сформулированы на языке линейных матричных неравенств.

Перейдем к изложению основной идеи решения задачи синтеза для канонической системы с помощью метода функции управляемости. Пусть  $n$  – размерность системы. Обозначим матрицы

$$F = \left( \int_0^1 (1-t)e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt \right)^{-1}, \quad D(\Theta) = \text{diag} \left( \Theta \frac{2n-2i+1}{2} \right)_{i=1}^n.$$

Функция управляемости [2, п. 1.2]  $\Theta = \Theta(x)$  определяется как единственное положительное решение уравнения

$$2a_0 \Theta = (D(\Theta) F D(\Theta) x, x), \quad x \neq 0.$$

где постоянная  $a_0$  удовлетворяет ограничению  $0 < a_0 \leq 2/f_{mn}$ . Будем считать, что  $a_0 = 2/f_{mn}$ . Доопределим функцию управляемости в точке ноль уравнением  $\Theta(0) = 0$ . Управление задается формулой

$$u(x) = -b_0^* D(\Theta) F D(\Theta) x / 2.$$

В нашем случае матрицы  $F$  и  $D(\Theta)$  имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \Theta \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Уравнение относительно функции управляемости  $\Theta(x)$  принимает вид

$$\frac{2}{3} \Theta^4 = 36x_1^2 + 24\Theta x_1 x_2 + 6\Theta^2 x_2^2, \quad x \neq 0, \quad \Theta(0) = 0. \quad (2)$$

Управление задается формулой

$$u(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)}, \quad (3)$$

где  $\Theta(x_1, x_2)$  – единственное положительное решение уравнения (2).

Перепишем систему (1) в матричном виде  $\dot{x} = (A_0 + R(t, x))x + b_0 u$ , где

$$R(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}.$$

Наша цель найти такие границы изменения коэффициента трения  $p_1 \leq p(x_1, x_2, t) \leq p_2$ , при которых траектория  $x(t)$  системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p(x_1, x_2, t)x_2 + u(x) \quad (4)$$

с управлением  $u(x)$  вида (3), выходящая из произвольной начальной точки  $x_0$ , оканчивается в точке  $x_1 = 0$  в некоторый конечный момент времени. Идея решения задачи робастного позиционного синтеза для канонической системы предложена в [6]. В работе [1] предложен способ решения поставленной задачи для системы с постоянным трением, то есть  $p(x_1, x_2, t) \equiv \text{const}$ .

Полная производная функции управляемости системы с трением, движение которой описывается уравнениями (4), имеет вид

$$\dot{\Theta} = -1 + \frac{(Sy, y)}{(F^1 y, y)}, \quad (5)$$

$$\text{где } S = \begin{pmatrix} 0 & 12\Theta p(x_1, x_2, t) \\ 12\Theta p(x_1, x_2, t) & 12\Theta p(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}, \quad F^1 = \begin{pmatrix} 144 & 36 \\ 36 & 12 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \Theta \frac{3}{2} \\ x_2 \Theta \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Из (5) вытекает следующая оценка [2, п. 1.2]  $\dot{\Theta} \leq -1 + \lambda_{\max}((F^1)^{-1}S)$ , где  $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S)$  – наибольшее собственное значение матрицы  $(F^1)^{-1}S$ . Зададим  $0 < \gamma < 1$  и потребуем, чтобы  $\dot{\Theta} \leq -\gamma$ . Для этого оценим  $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}\tilde{S})$ , где

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 12\Theta p \\ 12\Theta p & 12\Theta p \end{pmatrix}.$$

Имеем:  $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}\tilde{S}) = \max\{\Theta(3-2\sqrt{3})p/3, \Theta(3+2\sqrt{3})p/3\}$ . Из условия  $\dot{\Theta} \leq -\gamma$  вытекают границы изменения коэффициента нелинейного вязкого трения  $p_1 \leq p(x_1, x_2, t) \leq p_2$ ,  $p_1 = \frac{(1-\gamma)3}{\Theta(3-2\sqrt{3})}$ ,  $p_2 = \frac{(1-\gamma)3}{\Theta(3+2\sqrt{3})}$ .

На рисунке 1 представлены верхняя  $p_2$  и нижняя  $p_1$  границы изменения коэффициента трения при  $\gamma = 0,01$  в зависимости от  $\Theta$ .

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Выберем произвольную постоянную  $\gamma$ , удовлетворяющую ограничению  $0 < \gamma < 1$ . Пусть область решения задачи имеет вид  $Q = \{x: \Theta(x) \leq c\}$ . Пусть величина коэффициента нелинейного вязкого трения удовлетворяет*

*неравенству  $\frac{(1-\gamma)3}{c(3-2\sqrt{3})} \leq p(x_1, x_2, t) \leq \frac{(1-\gamma)3}{c(3+2\sqrt{3})}$ . Пусть функция управляемо-*

*сти  $\Theta(x)$  есть единственное положительное решение уравнения (2), а управление задается формулой (3). Тогда траектория системы (4), выходящая из произвольной начальной точки  $x^0 \in Q$ , оканчивается в точке  $x^1 = 0$  в некоторый конечный момент времени  $T(x^0) \leq \Theta(x^0)/\gamma$ .*

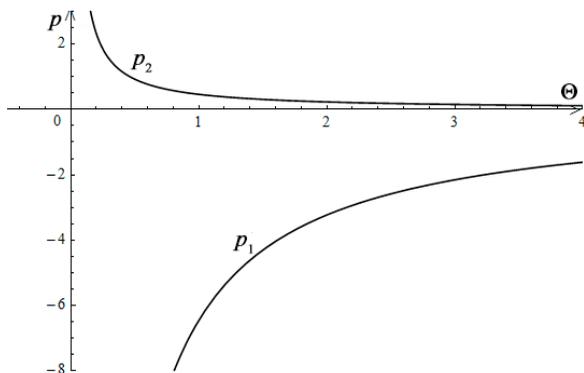


Рисунок 1 – Верхняя  $p_2$  и нижняя  $p_1$  границы изменения коэффициента трения

Следовательно, хотя коэффициент трения  $p(x_1, x_2, t)$  неизвестен, управление (3) переводит тело из произвольного начального положения в начало координат за конечное время.

Для построения траектории поступаем следующим образом. Выбираем произвольную начальную точку  $x^0 = (x_1^0; x_2^0)$ . Решаем уравнение (2) и находим единственный положительный корень  $\Theta(x^0) = \Theta_0$ . Положим  $\theta(t) = \Theta(x_1(t), x_2(t))$ . Траектория является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = p(x_1, x_2, t)x_2 - \frac{6x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta}, \\ \dot{\theta} = \frac{-12x_1^2 - 6\theta x_1 x_2 + 2\theta^2 p(x_1, x_2, t)x_1 x_2 - \theta^2 x_2^2 + \theta^3 p(x_1, x_2, t)x_2^2}{12x_1^2 + 6\theta x_1 x_2 + \theta^2 x_2^2}, \\ x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (6)$$

Проиллюстрируем решение для конкретных  $p$ . Выберем сначала область  $Q = \{x: \Theta(x) \leq 1\}$ . Тогда при  $\gamma = 0,01$  имеем  $-6,46 \leq p(x_1, x_2, t) \leq 0,46$ . Выберем начальную точку  $x^0 = (0,23; -0,5)$ . Первая координата – начальное отклонение материальной точки от положения равновесия, вторая координата – начальная скорость точки. Тогда единственное положительное решение уравнения (2) равно  $\Theta_0 \approx 0,99$ . В качестве конкретной реализации трения рассмотрим случай постоянного трения  $p(x_1, x_2, t) = -6,46$ . Область попадания представлена на рисунке 2 (меньшая из областей). Пусть  $(x_1^0(t), x_2^0(t), \theta(t))$  – решение системы (6) при  $p(x_1, x_2, t) = -6,46$ . На рисунке 2 представлена кри-

вая  $(x_1^0(t), x_2^0(t))$ . Можно показать численно, что время попадания в начало координат  $T(x_0, p) \approx 1,95$ .

Рассмотрим другой случай. Выберем область  $Q = \{x: \Theta(x) \leq 3\}$ . Тогда при  $\gamma = 0,01$  имеем  $-2,15 \leq p(x_1, x_2, t) \leq 0,15$ . Выберем начальную точку  $x^0 = (-1,9; 1,7)$ . Тогда единственно положительное решение уравнения (2) равно  $\Theta_0 \approx 2,98$ . В качестве конкретной реализации коэффициента нелинейного вязкого трения рассмотрим функцию

$$p(x_1, x_2, t) = 0,15 \sin(5x_1^2). \quad (7)$$

Область попадания представлена на рисунке 2 (большая из областей). Можно показать численно, что время попадания в начало координат  $T(x_0, p) \approx 3,16$ .

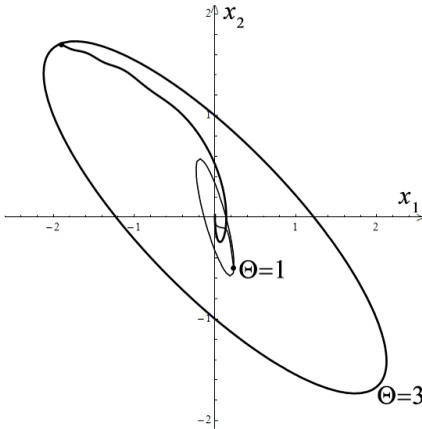


Рисунок 2 – Области и траектории

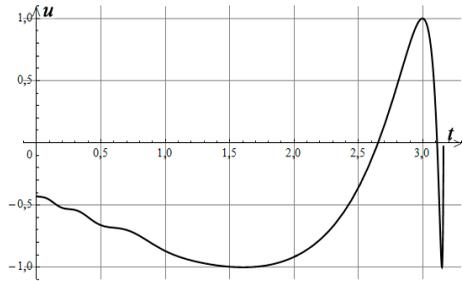


Рисунок 3 – Мощность двигателя

Пусть  $(x_1^0(t), x_2^0(t), \theta(t))$  – решение системы (6) при трении вида (7). На рисунке 2 представлена кривая  $(x_1^0(t), x_2^0(t))$ . На рисунке 3 приведен график управления (мощности двигателя)  $u(x_1^0(t), x_2^0(t)) = -\frac{6x_1^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_2^0(t)}{\theta(t)}$ ,

причем  $|u(x_1^0(t), x_2^0(t))| \leq 1$ . Функция управляемости  $\Theta(t)$  близка к линейной и представлена на рисунке 4. Производная по времени от функции управляемости представлена на рисунке 5.

Таким образом, в статье установлены границы изменения коэффициента нелинейного вязкого трения, при которых перевод в положение равновесия осуществляется таким же управлением, как и в отсутствие трения. Приведен пример расчета для одного из возможных случаев.

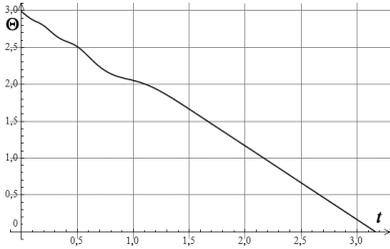


Рисунок 4 – Функция управляемости

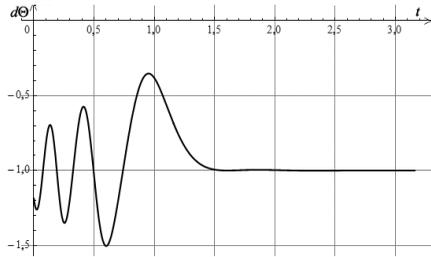


Рисунок 5 – Производная по времени от функции управляемости

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Поляк, Б. Т.** Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.
- 2 **Коробов, В. И.** Метод функции управляемости / В. И. Коробов. – М.–Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. – 576 с.
- 3 **Коробов, В. И.** Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / В. И. Коробов // Мат. сб. – 1979. – Т. 109(151), № 4(8). – С. 582–606.
- 4 **Korobov, V. I.** Robust feedback synthesis problem for systems with a single perturbation / V. I. Korobov, T. V. Revina // Communications in Mathematical Analysis. – 2014. – Vol. 17, № 2. – P. 217–230.
- 5 **Polyakov, A.** Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach / A. Polyakov, D. Efimov, W. Perruquetti // Automatica. – 2015. – Vol. 51.– P. 332–340.
- 6 **Коробов, В. И.** Решение задачи робастного позиционного синтеза для канонической системы / В. И. Коробов, Т. В. Ревина // Доповіді Національної академії наук України, рубрика Математика. – 2015. – № 6. – С. 13–18.
- 7 **Купріянич, Л. В.** Робастна стабілізація нелінійних механічних систем / Л. В. Купріянич // Нелінійні коливання. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 462–475.

*V. I. KOROBOV, T. V. REVINA*

*V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov, Ukraine*

## CONTROLLABILITY OF THE MATERIAL POINT MOTION CONSIDERING THE UNKNOWN FRICTION

There is considered the definition problem of the control taking the material point to equilibrium state during the finite time in the conditions of unknown friction. The solution is based on the controllability function method conceived by V. I. Korobov. The goal of paper is to find out the limits of the non-linear viscous friction coefficient changes for the case when the material point is taken to the equilibrium state by the same control as for the motion without friction.

Получено 13.02.2016