УДК 517.997.14

М. О. БЕБИЯ
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, Украина

ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗОВ, СОЕДИНЕННЫХ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРУЖИНОЙ

В настоящей работе построен класс управлений, решающих задачу гашения колебаний грузов, соединенных нелинейной пружиной. Эти управления обеспечивают остановку колебаний грузов за конечное время. Решение задачи проводится на основе метода функции управляемости.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух грузов, которые движутся без трения по горизонтальной прямой (рисунок 1); m_1 и m_2 – массы первого и второго грузов соответственно. Эти грузы соединены нелинейной пружиной, сила упругости которой $F=kx^3$, где k – коэффициент жесткости пружины, x – ее удлинение. Пусть x_1 и x_2 – смещения грузов от положения, в котором пружина находится в ненапряженном состоянии. На правый груз действует управляющая сила u.

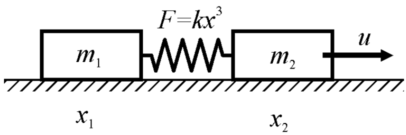

Рисунок 1 – Модель движения грузов

Наша задача состоит в гашении колебаний грузов за счет выбора управляющей силы u. Причем такое гашение должно быть произведено за конечное время. Решение задачи проводится на основе метода функции управляемости В. И. Коробова [1].

Движение рассматриваемой системы описывается уравнениями

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2-x_1)^3, \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2-x_1)^3+u. \end{cases}$$

Введем новые переменные $z_1=\dot{x}_2-\dot{x}_1$, $z_2=x_2-x_1$, $z_3=\dot{x}_1$, $z_4=x_1$. Тогда движение грузов будет описываться системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\left(\dfrac{k}{m_1}+\dfrac{k}{m_2}\right)z_2^3+u, \\ \dot{z}_2 = z_1, \\ \dot{z}_3 = \dfrac{k}{m_1}z_2^3, \\ \dot{z}_4 = z_3. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in R^4$. Теперь задача гашения колебаний грузов свелась к построению такой управляющей функции $u = u(z)$, что траектория $z(t)=\left(z_1(t),z_2(t),z_3(t),z_4(t)\right)$ ($z(0)=z_0$, где $z_0\in R^4$) системы (1), замкнутой управлением $u=u(z)$, удовлетворяет условию $z_1(t)\to 0$, $z_2(t)\to 0$, $z_3(t)\to 0$ при $t\to T(z_0)$. Здесь $T(z_0)<+\infty$ – время попадания из точки z_0 в ноль по первым трем координатам в силу системы (1) с $u=u(z)$.

Для того чтобы решить задачу о гашении колебаний грузов нам достаточно рассмотреть подсистему

$$\dot{z}_1=-\left(\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}\right)z_2^3+u,\ \ \dot{z}_2=z_1,\ \ \dot{z}_3=\frac{k}{m_1}z_2^3. \tag{2}$$

Итак, наша задача состоит в выборе такой управляющей силы $u = u(z)$, чтобы скорость левого груза, удлинение пружины и скорость удлинения пружины стали нулевыми в некоторый конечный момент времени $T(z_0)$ (z_0 – начальное состояние системы). Основную трудность при решении этой задачи представляет тот факт, что система (2) является неуправляемой по первому приближению. Классические методы решения задачи стабилизации для системы (2) неприменимы, как это отмечается в ряде работ [2–10].

Идея построения управления для подобных систем была изложена в статье [2]. Решение, предложенное в ней, было выполнено на основе метода функции управляемости В. И. Коробова [1]. Далее управление для системы (2) будет построено в виде обратной связи $u=u(z_1,z_2,z_3)$.

Пусть a_1, a_2, a_3, $a_4 < 0$ – некоторые константы, которые будут определены ниже. Введем в рассмотрение действительные матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{12}\dfrac{a_3}{a_2} \\ f_{12} & f_{22} & f_{22}\dfrac{a_3}{a_2} \\ f_{12}\dfrac{a_3}{a_2} & f_{22}\dfrac{a_3}{a_2} & f_{33} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Предположим, что f_{11}, f_{12}, f_{33} удовлетворяют условиям

$$f_{11}>0,\ \ f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0,\ \ f_{33}>f_{22}\frac{a_3^2}{a_2^2}.$$

Тогда матрица F положительно определена.

Определим функцию управляемости $\Theta=\Theta(z)$ (где $z\in R^3$) при $z\neq 0$ как положительный корень уравнения

$$2a_o\Theta^{14}=\left(C^{-1}FC^{-1}D(\Theta)z,D(\Theta)z\right), \qquad (4)$$

где a_0 – некоторое положительное число, $D(\Theta)=\mathrm{diag}(\Theta^6,\Theta^5,1)$ и $C=\mathrm{diag}\left(1,1,\dfrac{k}{m_1}\right)$ – диагональные матрицы размерности 3×3.

Положим Θ(0) = 0. Тогда уравнение (4) имеет единственное положительное решение при каждом фиксированном $z\in R^3$, если матрица

$$F^1=\begin{pmatrix} 2f_{11} & 3f_{12} & 8f_{12}\dfrac{a_3}{a_2} \\ 3f_{12} & 4f_{22} & 9f_{22}\dfrac{a_3}{a_2} \\ 8f_{12}\dfrac{a_3}{a_2} & 9f_{22}\dfrac{a_3}{a_2} & 14f_{33} \end{pmatrix}$$

является положительно определенной. В этом случае функция $\Theta(z)$ является непрерывной при всех $z\in R^3$ и непрерывно-дифференцируемой при $z\neq 0$.

Определим управление формулой вида

$$u(z)=a_1\frac{z_1}{\Theta(z)}+a_2\frac{z_2}{\Theta^2(z)}+\frac{a_3}{k}\frac{m_1z_3}{\Theta^7(z)}+a_4\frac{z_2^3}{\Theta^6(z)}+\left(\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}\right)z_2^3. \qquad (5)$$

Выберем a_1, a_2, a_3, a_4 так, чтобы

$$\dot{\Theta}(z(t))\le-\beta,$$

где $\beta>0$ – некоторая константа, $z(t)$ – траектория системы (2), замкнутой управлением $u=u(z)$ вида (5).

Выберем константы $a_1<0$, $a_2<0$, $a_3<0$ произвольным образом. Пусть $W_2=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22}\end{pmatrix}$ – произвольная положительно определенная матрица.

Определим положительно определенную матрицу F_2 равенством

$$F_2=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22}\end{pmatrix}=\int_0^\infty e^{A_2^*t}W_2e^{A_2t}dt, \text{ где } A_2=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица F вида (3), при любом f_{33} таком, что $f_{33}>f_{22}\dfrac{a_3^2}{a_2^2}$, является положительно определенным решением сингулярного матричного уравнения (см. [3], Теорема 2)

$$A^*F+FA=-W\ , \quad \text{где} \quad W=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{12}\dfrac{a_3}{a_2} \\ w_{12} & w_{22} & w_{22}\dfrac{a_3}{a_2} \\ w_{12}\dfrac{a_3}{a_2} & w_{22}\dfrac{a_3}{a_2} & w_{22}\dfrac{a_3^2}{a_2^2} \end{pmatrix}.$$

Причем матрица W неотрицательно определена. Пусть

$$a_4=-\frac{f_{33}}{f_{12}}\cdot\frac{a_2}{a_3}. \tag{6}$$

Обозначим

$$b_1=\left(f_{11}f_{33}-f_{12}^2\frac{a_3^2}{a_2^2}\right)\frac{a_2}{a_3}>0\ , \quad b_2=\left(f_{33}-f_{22}\frac{a_3^2}{a_2^2}\right)\frac{a_2}{a_3}>0\,.$$

Окончательно получаем, что производная функции управляемости в силу системы (2), замкнутой управлением $u = u(z)$ формы (5), имеет вид

$$\dot{\Theta}(z(t))=-\frac{(Wy(z),y(z))+2b_1z_1z_2^3\Theta^7(z)+2b_2z_2^4\Theta^6(z)}{(F^1y(z),y(z))}, \tag{7}$$

где $y(z) = D(\Theta(z))\,z$. Из (4) на основании положительной определенности матрицы F следует, что

$$2a_o\Theta^{14}(z)=\big(FD(\Theta(z))z,D(\Theta(z))z\big)\geq \lambda_{\min}(F)(z_1^2\Theta^{12}(z)+z_2^2\Theta^{10}(z)+z_3^2)\ ,$$

где $\lambda_{\min}(F) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы F. Тогда

$$\frac{z_1^2}{\Theta^2(z)}\leq\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)},\quad \frac{z_2^2}{\Theta^4(z)}\leq\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}\ ,\quad \frac{z_3^2}{\Theta^{14}(z)}\leq\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}. \tag{8}$$

Выберем произвольное значение ε из условия $0 < \varepsilon < w_{11}$. Введем в рассмотрение матрицу

$$G(z)=\begin{pmatrix} \varepsilon & b_1\dfrac{z_2}{\Theta^2(z)} \\ b_1\dfrac{z_2}{\Theta^2(z)} & 2b_2 \end{pmatrix}.$$

Из (8) следует, что матрица G положительно определена при любом a_0, удовлетворяющем условию $0<a_0<\lambda_{\min}(F)\dfrac{b_2\varepsilon}{b_1^2}$. Действительно,

$$\det(G)=2b_2\varepsilon-b_1^2\frac{z_2^2}{\Theta^4(z)}\geq 2b_2\varepsilon-b_1^2\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}>0\,,$$

и согласно критерию Сильвестра матрица $G(z)$ положительно определена при любом фиксированном ненулевом $z\in R^3$.

Неравенства (8) означают, что управление $u(z)$ можно сделать малым по модулю в достаточно малом шаре $\|z\|\leq r$ $(r>0)$ за счет выбора достаточно малого $a_0 > 0$. Из (7) следует, что

$$\dot{\Theta}(z(t)) = -\frac{((W-\varepsilon P)y(z),y(z))+(G(z)h(z),h(z))}{(F^1 y(z),y(z))}\,,$$

где $h(z) = (z_1\Theta(z)^6,\, z_2^2\Theta^3(z))$, $P=\mathrm{diag}(1,0,0)$ – диагональные матрицы размерности 3×3.

В работе [3, с. 81] было показано, что матрица $W-\varepsilon P$ неотрицательно определена. Тогда $\dot{\Theta}(z(t))<0$. Это означает, что функция управляемости $\Theta = \Theta(z)$ является функцией Ляпунова системы (2) с $u = u(z)$, а траектории этой системы стремятся к нулю с ростом времени. В работе [2, Теорема 3] доказано, что существует константа $\beta > 0$ такая, что $\dot{\Theta}(z(t))\leq-\beta$ и траектория системы (2) попадает в ноль за конечное время $T(z_0)=\frac{1}{\beta}\Theta(z_0)$.

Таким образом, мы построили класс управлений, каждое из которых решает задачу гашения колебаний грузов за конечное время. Приведем конкретный пример такого управления.

Примем $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -2$. Пусть $W_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Также положим $f_{33} = 3$. Тогда

$$F_2=\int_0^\infty e^{A_2^*t}W_2e^{A_2t}dt=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix},\quad F=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 7 & 7\\ 1 & 7 & 12\end{pmatrix}.$$

В этом случае матрицы F и F^1 положительно определены. Согласно (6) положим $a_4=-\frac{12}{7}$. Пусть $a_0 = 0{,}03$. Функция управляемости $\Theta(z)$ согласно (4) определяется как положительный корень уравнения

$$0{,}024\Theta^{14}=3z_1^2\Theta^{12}+2z_1z_2\Theta^{11}+2\frac{m_1}{k}z_1z_3\Theta^6+14\frac{m_1}{k}z_2z_3\Theta^5+7z_2^2\Theta^{10}+12\frac{m_1^2}{k^2}z_3^2\,.$$

Тогда согласно (5) управление

$$u(z) = -\frac{z_1}{\Theta(z)} - 2\frac{z_2}{\Theta^2(z)} - \frac{2}{k}\frac{m_1 z_3}{\Theta^7(z)} - \frac{12}{7}\frac{z_2^3}{\Theta^6(z)} + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) z_2^3$$

решает задачу о гашении колебаний грузов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Коробов, В. И.** Метод функции управляемости / В. И. Коробов. – М.–Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. – 576 с.

2 **Bebiya, M. O.** Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity / M. O. Bebiya // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 82. – P. 49–64.

3 **Бебия, М. О.** Стабилизация систем со степенной нелинейностью / М. О. Бебия // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математика, прикладна математика і механіка. – 2014. – Т. 69, № 1120. – С. 75–84.

4 **Kawski, M.** Stabilization of nonlinear systems in the plane / M. Kawski // Systems & Control Letters. –1989. – Vol. 12, № 2. – P. 169–175.

5 **Коробов, В. И.**, Стабилизация одного класса нелинейных систем неуправляемых по первому приближению / В. И Коробов, М. О. Бебия // Доповіді Національної академії наук України, рубрика Математика. – 2014. – № 2. – С. 20–25.

6 **Khalil, N. K.** Nonlinear systems / N. K. Khalil. – New York: Prentice Hall, 2002. – 734 p.

7 **Zhao, G. A.** Continuous state feedback controller design for high-order nonlinear systems with polynomial growth nonlinearities // G. Zhao, N. Duan // International Journal of Automation and Computing. – 2013. – Vol. 10, № 4. – P. 267–274.

8 **Lin, W.** Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high order lower-triangular systems / W. Lin, C. Quan // Systems Control Letters. – 2000. – Vol. 39, № 5.– P. 339–351.

9 **Lin, W.** Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: an adding a power integrator technique / W. Lin, C. Quan // Systems Control Letters. – 2000. – Vol. 39, № 5.– P. 353–364.

10 **Korobov, V. I .** Robust stabilization of one class of nonlinear systems / V. I. Korobow, A. V. Lutsenko // Automation and Remote Control. – 2014.– Vol. 75, № 8.– P. 1433–1444.

M. O. BEBIYA
V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov, Ukraine

OSCILLATIONS DAMPING OF LOADS CONNECTED BY NONLINEAR SPRING

In the presented paper there was created a class of controls that solve the oscillation damping problem for nonlinear mass-spring model. These controls ensure the finite-time damping of oscillations. The solution is based on the controllability function method.

Получено 17.02.2016