$$w_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \quad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \tag{4}$$

где $U_{1m}^n$, $U_{2m}^n$, $W_{1m}^n$, $W_{2m}^n$ – искомые амплитуды перемещений.

**Повторное знакопеременное нагружение.** Пусть, начиная с момента $t_1$, осуществляется мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями обратного знака $p''$, $q''$, изменяющимися по тому же закону, что и при нагружении из естественного состояния. Эти усилия создадут в $k$-м слое стержня поле перемещений $u_i''(x)$, $w_i''(x)$, деформации $\varepsilon_{ij}''^{(k)}$ и напряжения $\sigma_{ij}''^{(k)}(x,z)$. При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения температура во всех точках тела остается неизменной. Она совпадает с полем температуры к моменту начала разгрузки, т. е. $T'(z) = T(z,t_1)$ и модули упругости материалов слоев приняли фиксированные значения при этой температуре.

Для всех параметров напряженно-деформированного состояния и нагрузки ведем разности, в которых величины с одним штрихом – перемещения и нагрузки в стержне перед разгрузкой, два штриха – второй полуцикл:

$$u_i^* = u_i' - u_i'', \quad w_i^* = w_i' - w_i', \quad q^* = q' - q'' \quad (k = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия для перемещений со звездочками в итерационном виде будет по виду совпадать с системой (2), граничные условия – с (3). Внешняя нагрузка и дополнительные усилия со звездочками также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды.

Искомые амплитуды перемещений $U_{1m}^n$, $U_{2m}^{*n}$, $W_{1m}^{*n}$, $W_{2m}^{*n}$ определяются по той же схеме, что и при однократном нагружении. Затем вычисляются искомые перемещения со звездочками. Соответствующее решение задачи на втором полуцикле получим из соотношений (5):

$$u_k''(x,z) = u_k'(x,z) - u_k^*(x,z), \quad w_k'(x,z) = w_k'(x,z) - w_k^*(x,z) \quad (k = 1, 2).$$

*Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).*

УДК 539.37

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ ОТВЕРСТИЙ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*Е. А. СТОРОЖУК, И. С. ЧЕРНЫШЕНКО, С. Б. ХАРЕНКО*
*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев*

**Введение.** Тонкостенные элементы современных конструкций находят широкое применение в ракетной технике, на транспорте, в промышленном и гражданском строительстве. В большинстве случаев эти элементы по конструктивным или технологическим соображениям имеют отверстия различной формы.

Основные результаты по проблеме концентрации напряжений в оболочках с отверстиями при действии разного вида нагрузок получены на основе решения линейных задач [1]. Большинство исследований по данной проблеме с учетом нелинейных факторов проведено для оболочек с одним отверстием. Для инженерной практики представляют интерес исследования напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций в случае нескольких отверстий.

**Постановка задачи. Основные уравнения.** Тонкую оболочку толщины $h$, изготовленную из однородного изотропного материала и ослабленную несколькими криволинейными отверстиями, отнесем к ортогональной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ .

Деформирование оболочки опишем соотношениями теории непологих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява. Выражения для компонент мембранной $(\varepsilon_{ij})$ и изгибной $(\mu_{ij})$ деформаций представим в векторной форме [2]:

$$\varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{12} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \alpha_2};$$
$$\mu_{11} = \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad 2\mu_{12} = \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{A_2 \partial \alpha_2}; \tag{1}$$
$$e_{11} = \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12} \quad (1 \to 2),$$

где $A_1, A_2$ – параметры Ламе; $\vec{u} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n}$ – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ – орты системы координат $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ ; $\vec{\varphi} = \varphi_1 \vec{e}_1 + \varphi_2 \vec{e}_2$ – вектор углов поворота нормали, которые определяются по формулам: $\varphi_1 = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial \alpha_1} \quad (1 \to 2)$.

При исследовании упругопластического деформирования оболочек используем соотношения теории течения с изотропным упрочнением, в которой принято условие пластичности Мизеса, а приращения пластических деформаций определяются на основе асоциированного закона текучести.

Система разрешающих уравнений получена из принципа возможных перемещений с использованием процедуры пошагового нагружения, метода дополнительных напряжений и метода конечных элементов.

**Числовые результаты.** С помощью разработанной методики исследовано упруго-пластическое состояние конической оболочки с двумя круговыми отверстиями радиуса $r_0$, центры которых расположены на общей образующей. Оболочка изготовлена из сплава АМг-6 и нагружена равномерным внутренним давленим интенсивности $q = 3 \cdot 10^5$ Па .

Исследования проведены при таких значениях геометрических параметров оболочки: $R_c / h = 200$; $r_0 / h = 20$; $\alpha = 45^o$; $d / r_0 = 2{,}5; 4$; $\ell_c / h = 200$, где $R_c$ – радиус кривизны нормального сечения оболочки, которое проходит через центр перемычки; $d$ – расстояние между центрами отверстий; $2\alpha$ – угол при вершине осевого сечения конуса; $\ell_c$ – расстояние от вершины конуса до центра перемычки.

В таблице 1 приведены значения окружных напряжений $\sigma_\theta^o$ ($\sigma_\theta = \sigma_\theta^o \cdot 10^5$ Па) в нескольких точках контуров отверстий ($r = r_0$; $0 \le \theta \le \pi$, где полярный угол $\theta = 0$ соответствует наиболее удаленной от вершины конуса точке контура отверстия) на внешней и внутренней поверхностях оболочки ($\xi = \gamma / h = \pm 0{,}5$). Отметим также, что центр отверстия 1 находится ближе к вершине конуса. Данные представлены для двух значений расстояния между центрами отверстий $d / r_0 = 2{,}5$ и $d / r_0 = 4$ как для задач в линейно-упругой постановке (ЛЗ), так и в физически нелинейной (ФНЗ).

*Таблица 1* – **Распределение окружных напряжений вдоль контуров отверстий**

| $d / r_0$ | $\theta$ | $\xi$ | Отверстие 1 | | Отверстие 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ЛЗ | ФНЗ | ЛЗ | ФНЗ |
| 2,5 | 0 | 0,5 | 791 | 1805 | 2511 | 1695 |
| | | –0,5 | 5345 | 2493 | 4373 | 1984 |
| | $\pi/2$ | 0,5 | 1825 | 1461 | 2232 | 1644 |
| | | –0,5 | –2127 | –1655 | –2032 | –1634 |
| | $\pi$ | 0,5 | 1565 | 1353 | 1328 | 1860 |
| | | –0,5 | 4181 | 1935 | 5989 | 2506 |
| 4 | 0 | 0,5 | 1568 | 1325 | 2719 | 1705 |
| | | –0,5 | 3640 | 1816 | 4553 | 1986 |
| | $\pi/2$ | 0,5 | 1833 | 1493 | 2369 | 1656 |
| | | –0,5 | –2033 | –1577 | –2183 | –1682 |
| | $\pi$ | 0,5 | 1413 | 1301 | 2226 | 1571 |
| | | –0,5 | 3965 | 1878 | 4761 | 1984 |

Из приведенных данных следует, что при действии внутреннего давления заданной интенсивности наиболее опасной является точка, которая расположена на контуре второго отверстия в сечении ($r = r_0$; $\theta = \pi$) на внутренней поверхности оболочки ($\xi = -0{,}5$). При уменьшении параметра $d$

наблюдается увеличение максимальных напряжений, которое составляет 25,8 % для ЛЗ и 26,3 % для ФНЗ. Учет пластических деформаций материала оболочки приводит к выравниванию напряжений как по толщине оболочки, так и по контурам отверстий, а также к уменьшению максимальных напряжений по сравнению с результатами линейно-упругого решения на 58,2 % для $d / r_0 = 2{,}5$ и на 58,3 % – для $d / r_0 = 4$.

**Список литературы**


1 Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь [и др.]. – Киев : Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т.; Т. 1).

2 **Maksimyuk, V. A.** Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V. A. Maksimyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, No. 6. – P. 613–687.



УДК 621.763


# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ


*В. В. ТАЛЕЦКИЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*


При объемном упругом напряженном состоянии связь между напряжениями и деформациями дает *обобщенный закон Гука*, по которому в любой точке упругодеформированного тела каждый из шести компонентов тензора напряжений является линейной функцией шести компонентов тензора деформаций и наоборот. В случае упругого *анизотропного материала* между напряжениями и деформациями при объемном напряженном состоянии будет иметь место система линейных уравнений, которую сокращенно можно записать в виде $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$, где матрица величин $C_{ijkl}$ называется тензором модулей (постоянных коэффициентов) упругости. Таким образом анизотропное тело характеризуется 36 упругими постоянными $C_{ijkl}$. Но если $C_{ijkl} = C_{klij}$, то остается 21 независимая постоянная. При этом направления главных напряжений и главных деформаций совпадают. Если координатные плоскости совпадают с плоскостями симметрии свойств материала (то есть материал будет обладать одинаковыми свойствами по осям $x$, $y$ и $z$), то количество независимых упругих постоянных еще уменьшится и станет равным девяти. Система уравнений примет вид

$$\sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z;\ \tau_{xy} = C_{44}\gamma_{xy};$$

$$\sigma_y = C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z;\ \tau_{yz} = C_{55}\gamma_{yz};$$

$$\sigma_z = C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z;\ \tau_{xz} = C_{66}\gamma_{xz},$$

Такой материал называется *ортотропным*.

Для определения постоянных коэффициентов упругости ортотропного материала можно провести испытание шести образцов в приборе с независимо регулируемыми главными напряжениями [1].

При определении коэффициентов $C_{11}$, $C_{12}$ и $C_{13}$ один образец испытывается на осевое сжатие в направлении оси $\boldsymbol{x}$, при ограничении деформаций в направлении осей $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, то есть $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$. Уравнения в этом случае будут иметь вид $\sigma_x = C_{11}\varepsilon_x$; $\sigma_y = C_{21}\varepsilon_x$; $\sigma_z = C_{31}\varepsilon_x$. Тогда $C_{11} = \sigma_x / \varepsilon_x$, $C_{21} = \sigma_y / \varepsilon_x$, $C_{31} = \sigma_z / \varepsilon_x$.

Аналогичными испытаниями второго и третьего образцов ортотропного материала при нагружении по оси $\boldsymbol{y}$ и ограничении деформаций по осям $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$, и при нагружении по оси $\boldsymbol{z}$ и ограничении деформаций по осям $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяем соответственно $C_{12}$, $C_{22}$, $C_{32}$ и $C_{13}$, $C_{23}$ и $C_{33}$.

Учитывая, что $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$, $C_{23} = C_{32}$, мы при испытании трех образцов определили шесть постоянных коэффициентов упругости.

Для определения коэффициента $C_{44}$ четвертый образец вырезается и помещается в прибор таким образом, чтобы угол наклона плоскости изотропии по оси $\boldsymbol{z}$, к направлению действия напряжений $\sigma_x$ и $\sigma_y$ был 45°. Образец нагружается по девиаторической траектории в плоскости $\boldsymbol{xoy}$, ортогональ-