Для решения задач сравнительного анализа возможностей возникновения взаимодействий вводится также понятие «порядок точки отрыва». Физический смысл понятия «порядок точки отрыва» связан с особенностями соотношений элементов набора кинематических параметров движения. Более сложные движения с отрывом в рамках данной работы не рассматриваются, но они возможны и определяются законом периодического движения поверхности и особенностями действующих дополнительных сил.

Заключение. На основе использования функции зазора и условий отрыва получен ряд аналитических выражений для характеристик траекторий движения щетки после отрыва в точках второго и третьего порядка. На основе обобщенного подхода исследованы закономерности формирования траектории с непрерывным подбрасыванием.

Получены аналитические соотношения ряда ключевых характеристик: условия отрыва щетки от поверхности колебания, оценки длительности полета, зависимости от постоянных дополнительных сил и возможных сил сопротивления. Установлена роль кратности периода свободного полета в формировании свойств режимов с непрерывным подбрасыванием и др.

Список литературы

1 **Орленко, А. И.** Комплексная диагностика тягового электродвигателя электровоза : [моногр.] / А. И. Орленко, М. Н. Петров, О. А. Терегулов. – Красноярск, 2016.– 218 с.

2 **Елисеев, А. В.** Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей : [моногр.] / А. В. Елисеев, В. В. Сельвинский, С. В. Елисеев. – Новосибирск : Наука, 2015. – 332 с.

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ

В. С. ПАРФЕНОВА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Рассматривается несимметричная по толщине круглая ступенчатая упругая трехслойная пластина с жестким заполнителем. Система координат r, φ, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета используется *гипотеза «ломаной» линии*: в тонких несущих слоях *1*, *2* справедливы гипотезы Кирхгофа, в жестком несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе *3* нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Между слоями склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Деформации считаются малыми.

Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложены произвольные распределенные нагрузки $q(r)$, $p(r)$, к контуру пластины – погонные усилия и моменты $T_r^0, H_r^0,\ M_r^0, Q^0$. В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ, то есть $w = w(r)$, $u = u(r)$, $\psi = \psi(r)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу R, силовые характеристики – к 1 Па. Толщины несущих слоёв – ступенчато-переменные.

Через h_k обозначена толщина k-го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом

$$h_1 = h_{10} + h_{11}H_0(r - r_0)\,;\ \ h_3 = 2c\ ,\ h_2 = h_{20} + h_{21}H_0(r - r_0)\,,$$

где $h_{10}, h_{11}, h_{20}, h_{21}, c$ – константы; r_0 – координата сечения, в которой изменяется толщина пластины; $H_0(x)$ – функция Хевисайда.

Используя вариационный принцип Лагранжа, получаем следующую систему дифференциальных уравнений равновесия для рассматриваемой пластины:

$$\mathrm{L}_2(a_1u+a_2\psi-a_3w,_r)+H(r-r_0)\mathrm{L}_2(a_{10}u+a_{20}\psi-a_{30}w,_r)=-p\,,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2u+a_4\psi-a_5w,_r)+H(r-r_0)\mathrm{L}_2(a_{20}u+a_{40}\psi-a_{50}w,_r)-2cG_3\psi=0\,,$$
$$\mathrm{L}_3(a_3u+a_5\psi-a_6w,_r)+H(r-r_0)\mathrm{L}_3(a_{30}u+a_{50}\psi-a_{60}w,_r)=-q\,. \qquad (1)$$

Здесь коэффициенты a_k определяются через упругие и геометрические характеристики слоёв; дифференциальные операторы L_2 (*оператор Бесселя*), L_3 определяются соотношениями

$$\mathrm{L}_2(g)\equiv\left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r=g,_{rr}+\frac{g,_r}{r}-\frac{g}{r^2}\,,\quad \mathrm{L}_3(g)\equiv\frac{1}{r}(r\mathrm{L}_2(g)),_r\equiv g,_{rrr}+\frac{2g,_{rr}}{r}-\frac{g,_r}{r^2}+\frac{g}{r^3}\,.$$

В системе дифференциальных уравнений (1) коэффициенты a_k являются кусочно-непрерывными. Поэтому решение системы проводим раздельно во всех областях непрерывности ее коэффициентов: I – до точки изменения толщины ($r<r_0$); II – после нее ($r\geq r_0$). В первой области функция Хевисайда обращается в ноль и для несущих слоев: $h_1=h_{10}$, $h_2=h_{20}$, $K_k^+=K_{k0}^+$. Искомые перемещения и операторы в этой области пометим индексом «1» внизу. Система (1) преобразуется к виду

$$\mathrm{L}_2(a_1u_1+a_2\psi_1-a_3w_1,_r)=-p,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2u_1+a_4\psi_1-a_5w_1,_r)-2cG_3\psi_1=0\,;$$
$$\mathrm{L}_3(a_3u_1+a_5\psi_1-a_6w_1,_r)=-q\,. \qquad (2)$$

Решением системы (2) при $p=0$, $q=\mathrm{const}$ будет

$$\psi_1=C_{21}I_1(\beta_1r)-\frac{b_{21}q}{4cb_{31}G_3}r\,;$$
$$w_1=\frac{1}{b_{31}}[(b_{21}+1)(\frac{C_{21}}{\beta_1}I_0(\beta_1r)-\frac{b_{21}qr^2}{8cb_{31}G_3})+\frac{r^3q}{16}+\frac{C_{51}r^2}{4}+C_{41}],$$
$$u_1=\frac{a_3}{a_1a_6-a_3^2}[\frac{r^3q}{16}+(a_5-\frac{a_2a_6}{a_3})(C_{21}I_1(\beta_1r)-\frac{b_{21}q}{4cb_{31}G_3}r)+C_{71}r]. \qquad (3)$$

Теперь рассмотрим систему уравнений равновесия стержня (1) во второй области, где функция Хевисайда равна единице ($r\geq r_0$) и для несущих слоев: $h_1=h_{10}+h_{11}$, $h_2=h_{20}+h_{21}$. Искомые перемещения и операторы в этой области пометим индексом «2» внизу. Общее решение данной системы будет

$$\psi_2=C_{22}I_1(\beta_2r)+C_{32}K_1(\beta_2r)-K_1(\beta_2r)\int I_1(\beta_2r)f_2(r)r\mathrm{d}r+I_1(\beta_2r)\int K_1(\beta_2r)f_2(r)r\mathrm{d}r\,;$$
$$w_2=\frac{b_{22}}{b_{32}}\int\psi_2\mathrm{d}r-\frac{a_{31}}{b_{32}a_{11}}\int\mathrm{L}_2^{(-1)}(p)\mathrm{d}r+\frac{1}{b_{32}}\int\mathrm{L}_3^{(-1)}(q)\mathrm{d}r-\frac{1}{4b_{32}}C_{12}r^2(\ln r-1)+\frac{C_{52}r^2}{4b_{32}}+C_{62}\ln r+C_{42},\,;$$
$$u_2=\frac{a_{31}}{a_{11}}w_2,_r-\frac{a_{21}}{a_{11}}\psi_2-\frac{1}{a_1}\mathrm{L}_2^{-1}(p)+\frac{C_{72}r}{2}+\frac{C_{82}}{r}\,. \qquad (4)$$

Искомое решение исходной системы дифференциальных уравнений (1) можно теперь записать в виде суммы решений (3), (4):

$$\psi(r)=\psi_1(r)+(\psi_2(r)-\psi_1(r))H(r-r_0)\,;$$
$$u(r)=u_1(r)+(u_2(r)-u_1(r))H(r-r_0)\,;$$
$$w(r)=w_1(r)+(w_2(r)-w_1(r))H(r-r_0)\,.$$

Подобным образом можно построить решение краевой задачи об изгибе пластины с любым количеством областей регулярности – постоянства толщины несущих слоев.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).