конических оболочек используется вариационный принцип Гамильтона – Остроградского $\int_{t_1}^{t_2}(\delta K - \delta\Pi + \delta A)\, dt = 0$, где Π, K – полные потенциальная и кинетическая энергии оболочки и ребер, A – работа внешних сил. После стандартного преобразования в вариационном функционале получаем соответствующие уравнения колебаний исходной гладкой конической оболочки и подкрепляющих ребер. В частности, уравнения колебаний конической оболочки в общем виде имеют вид

$$\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_i T^{ij} - b_i^j T^{i3} + P^i, \quad (i,\ j = 1,\ 2); \tag{3}$$

$$\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \nabla_i T^{i3} + b_{ij} T^{ij} + P_3;$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i;$$

$$\nabla_k T^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \left(\sqrt{g}\, T^{ik}\right) + \Gamma^i_{\alpha k} T^{\alpha k};$$

$$\nabla_k M^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \left(\sqrt{g}\, T^{ik}\right) + \Gamma^i_{\alpha k} T^{\alpha k}; \quad g = a_{11} a_{22} - a_{12}^2; \quad a_{12} \neq 0 .$$

В формулах (3) индексами 1, 2 обозначены переменные по координатам x^1, x^2: $u^1, u^2, u_3, \varphi^1, \varphi^2$ – контрвариантные компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} – контрвариантные компоненты тензоров усилий и моментов; P^i, P_3, m^i – компоненты усилий на поверхности оболочки; ∇_i – контрвариантная производная; ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки; $I = h^3/12$.

Уравнения колебаний (3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. Для построения численного алгоритма используется интегро-интерполяционный подход построения конечно-разностных схем по пространственным координатам x^1, x^2 и явной разностной аппроксимации по временной координате t [1].

Список литературы

1 **Головко, К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш ; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – Киев : Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

2 **Гуляев, В. Н.** Устойчивость нелинейных механических систем / В. Н. Гуляев, В. А. Баженов, Е. А. Гоцуляк. – Львов : Вища школа, 1982. – 255 с.

3 Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / под ред. К. З. Галимова. – Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1977. – 212 с.

УДК 539.3

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ О ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ (СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ) В ДВУХСЛОЙНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК

В. Ф. МЕЙШ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Ю. А. МЕЙШ

Национальный транспортный университет, г. Киев, Украина

Рассматривается задача распространения сферических волн в двухслойной грунтовой среде. Предполагается, что к границе замкнутой сферической полости радиуса $r = r_0$ приложена импульсная нагрузка $F(t)$. Для описания поведения слоев грунтовой среды используется модель нелинейной жидкой многокомпонентной среды согласно В. М. Ляхову [1, 2]. Уравнение состояния данной модели записываются в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left[\frac{\gamma_i \;\; P-P_0}{\rho_{i0}c_{i0}^2}+1\right]^{-\chi_i}, \qquad (1)$$

где $\chi_i = 1/\gamma_i$, γ_i – показатель изентропы i-й компоненты.

Для уравнения состояния трехкомпонентной среды (водонасыщенного грунта) (1) вводятся следующие обозначения: α_i – содержание по объему компонент; ρ_{io} – плотность; V_{io} – их удельный объем; c_{io} – скорость звука в компонентах при атмосферном давлении P_o; i – номер компоненты (1 – воздух, 2 – жидкость, 3 – твердые частички). При давлении $P = P_o$ плотность среды ρ_o и удельный объем V_o определяется по формулам

$$\rho_0=\frac{1}{V_0}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\rho_{i0}, \qquad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i=1.$$

Характеристика каждого слоя определяется величинами α_i, ρ_{io} [1, 2].

Движение двухслойной грунтовой среды для случая распространения сферических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\;\rho U\;\;+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\;\;\rho U^2+P\;\;\right]-\frac{2}{r}P=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\;\;\rho U\;\;\right]=0.$$

В уравнениях (2) r – пространственная координата, t – временная координата, U – скорость, ρ – плотность, P – давление.

Уравнения движения грунтовой среды (2) дополняются уравнением состояния (1) вида $F(P,\rho)=0$, где

$$F(P,\rho)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\left[\frac{\gamma_i(P-P_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2}+1\right]^{-1/\gamma_i}-\frac{\rho_0}{\rho}. \qquad (3)$$

Предполагаемый алгоритм решения основывается на использовании разностных схем Мак – Кормака для численного решения динамических задач о поведении сжимаемой жидкости [4, 5].

Список литературы

1 **Ляхов, В. М.** Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / В. М. Ляхов. – М. : Недра, 1982. – 288 с.

2 Механический эффект взрыва в грунтах / И. А. Лучко [и др.] – Киев : Наук. думка, 1989. – 232 с.

3 **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. И. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.

4 **Головко, К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных загрузках : [моногр.] / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш ; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – Киев : Изд.-полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

5 **Флетчер, К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2 / К. Флетчер. – М. : Мир, 1991. – 526 с.

УДК 539.3

УДАР СИСТЕМЫ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ ПО АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ПРЕГРАДЕ

Е. Ю. МИХАЙЛОВА, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, А. Н. УЛЬЯШИНА, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (НИИ),
Российская Федерация

В работе исследуется удар системы концентрических оболочек со слоем жидкости между ними (ударник) по жесткой преграде (основание). Здесь рассматриваются оболочки типа Тимошенко. В начальный момент времени ударник движется со скоростью v_0 нормально к поверхности основания.