2 **Chernyshenko, I. S.** On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials / I. S. Chernyshenko, V. A. Maksimyuk // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No. 1. – P. 90–97.

3 **Абросов, Ю. Ю.** Деформування довгої тонкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу / Ю. Ю. Абросов, В. А. Максимюк, В. С. Тарасюк // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 2. – С. 5–10.

4 **Maksimyuk, V. A.** Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V. A. Maksimyuk, E. A Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, No. 6. – P. 613–687.

УДК 539.3

К ПОСТАНОВКЕ И ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В. Ф. МЕЙШ, Е. Д. БЕЛОВ
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Ю. А. МЕЙШ
Национальный транспортный университет, г. Киев, Украина

Рассматривается задача о нестационарном деформировании усеченной дискретно подкрепленной конической оболочки эллиптического сечения в рамках модели теории оболочек и стержней Тимошенко [1, 3] при распределенной внутренней импульсной нагрузке. Уравнения срединной поверхности оболочки в параметрическом виде задаются согласно соотношениям [2]

$$X = k_1 x^1 \cos x^2, \quad Y = x^1 \sin x^2, \quad Z = k_2 x^1, \tag{1}$$

где X, Y, Z – декартовая система координат; x^1, x^2 – координаты на срединной поверхности оболочки; $k_1 = a / b$; $k_2 = c / b$. Схематически объект представлен на рисунке 1, где H – высота усеченного конуса. Уравнения линии центра тяжести продольного ребра в параметрическом виде задаются согласно формулам (1) при фиксированном значении x^2 (в нашем случае $x^2 = (l-1)\pi / 2$, $l = \overline{1, 4}$).

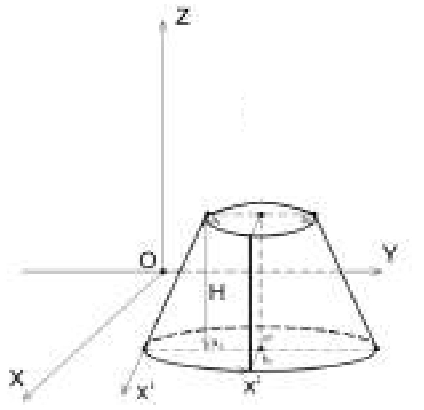

Рисунок 1

Уравнения (1) определяют коэффициенты первой и второй квадратичной формы срединной поверхности рассматриваемой оболочки согласно формулам

$$a_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x^i}\frac{\partial X}{\partial x^j} + \frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{\partial Y}{\partial x^j} + \frac{\partial Z}{\partial x^i}\frac{\partial Z}{\partial x^j}, \quad (i,\ j = 1,2); \tag{2}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{\partial Z}{\partial x^j} - \frac{\partial Z}{\partial x^i}\frac{\partial Y}{\partial x^j}\right)\frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Z}{\partial x^i}\frac{\partial X}{\partial x^j} - \frac{\partial X}{\partial x^i}\frac{\partial Z}{\partial x^j}\right)\frac{\partial^2 Y}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial X}{\partial x^i}\frac{\partial Y}{\partial x^j} - \frac{\partial Y}{\partial x^i}\frac{\partial X}{\partial x^j}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j}\right].$$

При этом, согласно (1),

$$a_{11} = k_1^2 \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 + k_2^2; \; a_{22} = (x^1)^2 (k_1^2 \sin^2 x^2 + \cos^2 x^2); \quad a_{12} = 0{,}5 x^1 (1 - k_1^2) \sin 2x^2;$$

$$b_{11} = 0, \; b_{12} = 0, \; b_{22} = k_1 k_2 (x^1)^2 / \sqrt{g},$$

где g – фундаментальный определитель метрического тензора, $g = a_{11} a_{22} - a_{11}^2$. Аналогично определяются коэффициенты для линии центра тяжести поперечного сечения продольного ребра при условии $x^2 = \text{const}$.

Для описания динамического поведения конических оболочек принимается линейный вариант уточненной теории тонких оболочек типа Тимошенко [1, 3]. Для вывода уравнений колебаний конических оболочек используется вариационный принцип Гамильтона – Остроградского $\int_{t_1}^{t_2}(\delta K - \delta\Pi + \delta A)\,dt = 0$, где Π, K – полные потенциальная и кинетическая энергии оболочки и ребер, A – работа внешних сил. После стандартного преобразования в вариационном функционале получаем соответствующие уравнения колебаний исходной гладкой конической оболочки и подкрепляющих ребер. В частности, уравнения колебаний конической оболочки в общем виде имеют вид

$$\rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \nabla_i T^{ij} - b_i^j T^{i3} + P^i, \quad (i,\ j = 1,\ 2); \tag{3}$$

$$\rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \nabla_i T^{i3} + b_{ij} T^{ij} + P_3;$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2} = \nabla_i M^{ij} - T^{i3} + m^i;$$

$$\nabla_k T^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \left(\sqrt{g}\, T^{ik}\right) + \Gamma^i_{\alpha k} T^{\alpha k};$$

$$\nabla_k M^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \left(\sqrt{g}\, T^{ik}\right) + \Gamma^i_{\alpha k} T^{\alpha k}; \quad g = a_{11} a_{22} - a_{12}^2; \quad a_{12} \neq 0.$$

В формулах (3) индексами 1, 2 обозначены переменные по координатам x^1, x^2: $u^1, u^2, u_3, \varphi^1, \varphi^2$ – контрвариантные компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; T^{ij}, T^{i3}, M^{ij} – контрвариантные компоненты тензоров усилий и моментов; P^i, P_3, m^i – компоненты усилий на поверхности оболочки; ∇_i – контрвариантная производная; ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки; $I = h^3/12$.

Уравнения колебаний (3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. Для построения численного алгоритма используется интегро-интерполяционный подход построения конечно-разностных схем по пространственным координатам x^1, x^2 и явной разностной аппроксимации по временной координате t [1].

Список литературы

1 **Головко, К. Г.** Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш ; под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя. – Киев : Изд.-полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

2 **Гуляев, В. Н.** Устойчивость нелинейных механических систем / В. Н. Гуляев, В. А. Баженов, Е. А. Гоцуляк. – Львов : Вища школа, 1982. – 255 с.

3 Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / под ред. К. З. Галимова. – Казань : Изд-во Казанского ун-та, 1977. – 212 с.

УДК 539.3

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ О ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ (СФЕРИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ) В ДВУХСЛОЙНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК

В. Ф. МЕЙШ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Ю. А. МЕЙШ

Национальный транспортный университет, г. Киев, Украина

Рассматривается задача распространения сферических волн в двухслойной грунтовой среде. Предполагается, что к границе замкнутой сферической полости радиуса $r = r_0$ приложена импульсная нагрузка $F(t)$. Для описания поведения слоев грунтовой среды используется модель нелинейной жидкой многокомпонентной среды согласно В. М. Ляхову [1, 2]. Уравнение состояния данной модели записываются в виде