

В качестве примера получена зависимость виброускорения a на границе пластины при $z = 0$ от частоты волны ω и длины пластины x при толщине пластины $h = 0,1$ м, длине $l = 5$ м и диапазоне частот $\omega = 1 - 200$ Гц (рисунок 1, где 1 – модуль виброускорения a на границе пластины; 2 – модуль виброускорения $a \cdot 10^{28}$ на расстоянии 10 м).

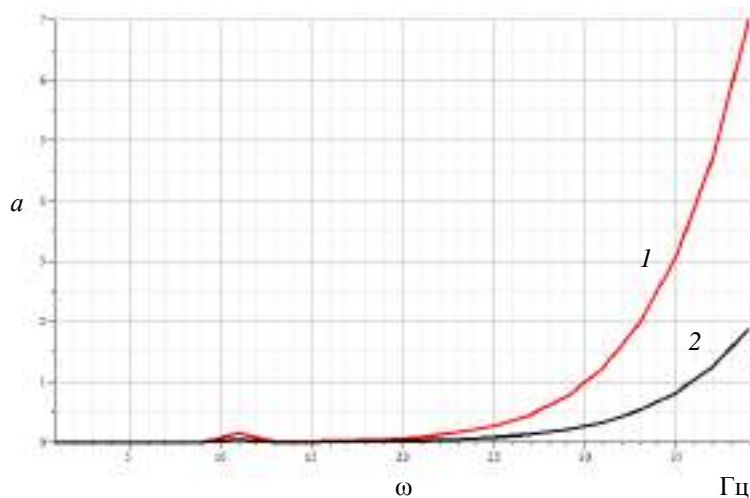


Рисунок 1

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-58-00034).

Список литературы

- 1 Волны в сплошных средах : учеб. пособ. / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
- 2 **Иванов, В. А.** Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) / В. А. Иванов, В. Н. Паймушин, Т. В. Полякова // Изв. вузов. Матем. – 1995. – № 3. – С. 15–24.
- 3 Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
- 4 Свод правил по проектированию и строительству СП 23-105–2004 «Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена». – М. : ГОССТРОЙ РОССИИ. – 2014.

УДК 539.37

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

И. В. ЛУЦКАЯ, В. А. МАКСИМЮК, И. С. ЧЕРНЫШЕНКО
 Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Оболочки некругового поперечного сечения широко применяются в современном инженерном деле. Так, в строительстве эллиптические полые профили сочетают в себе преимущества круглых и прямоугольных профилей. Замкнутые тонкие тороидальные оболочки представляют интерес как элементы наземных и космических конструкций. К последним [1] относятся сверхлегкие надувные спутниковые компоненты, которые служат поддерживающими конструкциями космических телескопов и антенн.

Тороидальные оболочки представляют также теоретический интерес с точки зрения тестирования методов расчета оболочек, поскольку при определенном соотношении их параметров они принимают форму таких конструкций, в некоторых частях которых напряженно-деформированное состояние (НДС) оказывается очевидным [2]. Кроме того, такие оболочки представляют методологический интерес как объект тестирования на так называемое мембранное запирание (locking). Дело в том, что подобные тесты являются преимущественно двумерными. Осесимметричное деформирование оболочек вращения двойкой кривизны вследствие,

по-видимому, присущему им самоподкрепляющему эффекту происходит, в основном, без мембранного запираания. Однако в замкнутой тороидальной оболочке эллиптического поперечного сечения под действием внутреннего давления [2] мембранное запираание может возникнуть. В этом случае поперечное сечение, подобно, как и в длинной цилиндрической оболочке [3], будет стремиться приобрести близкую к окружности форму, что приведет при небольших растяжениях к значительным изгибам возле большой и малой полуосей эллипса. Тогда в расчетах численными методами без применения целенаправленных подходов против запираания может наблюдаться замедленная сходимост [2].

Ускорить сходимост можно на основе смешанных функционалов, в которых дополнительно варьируются заведомо малые компоненты деформаций [4]. Этот подход является достаточно универсальным. Так, чтобы избежать мембранного запираания можно построить смешанный функционал $\Pi u, \varepsilon^f$, в котором дополнительно варьируются мембранные $(\varepsilon_{11}^f, \varepsilon_{22}^f, \varepsilon_{12}^f)$ деформации. Его можно представить [4] через функционал Πu , в котором варьируются только перемещения u_1, u_2, u_3 , следующим образом:

$$\Pi u, \varepsilon^f = \Pi u - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [G_{11}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^f)^2 + G_{22}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^f)^2 + G_{12}(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^f)^2] d\Omega.$$

Следует отметить использование обозначений для деформаций, которое подчеркивает различие между деформациями-формулами $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$ и деформациями-функциями $(\varepsilon_{11}^f, \varepsilon_{22}^f, \varepsilon_{12}^f)$.

Численно исследовано НДС тороидальной оболочки, поперечное сечение которой представляет гладкую плоскую кривую $F(x, y) = 0$ и описывается уравнением

$$F(x, y) = \left(\frac{x-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0,$$

где a и b – полуоси эллипса; c – удаление центра поперечного сечения от оси вращения.

Срединная поверхность оболочки, находящейся под действием внутреннего давления (q) и несенная к полугеодезической криволинейной системе координат (s, θ, γ) , имеет следующие геометрические параметры: $\tilde{a} = a/h = 100$; $\tilde{b} = b/h = 1000$; $\tilde{c} = c/h = 200$; $\tilde{s} = s/s_k = 2032$ – половина дуги эллипса, т.е. поперечное сечение, сильно вытянутое вдоль оси симметрии, а протяженная часть тороидальной оболочки представляет собой две соединенные по торцам коаксиальные цилиндрические оболочки с характерными величинами напряжений для них. Поперечное сечение разбивалось на ряд равностоящих узловых точек при помощи алгоритма типа касательной [2, 4]. Численные расчеты выполнялись на основе вариационно-разностного метода (ВРМ) [4]. Количество узловых точек последовательно удваивалось до совпадения максимальных компонент НДС с точностью до трех значащих цифр. Кроме того, применялся также интегральный критерий точности, заключающийся в равенстве величин внутренних (F) и внешних (P) сил, вычисляемых согласно формулам

$$F = h \int_0^{s_k} \sigma_{\theta\theta} ds ; \quad P = \frac{1}{2} \pi abq.$$

Ранее [2] для достижения указанной точности расчетов ВРМ на основе классического функционала Лагранжа, т. е. без применения целенаправленных подходов против запираания, потребовалось разбиение половины дуги эллипса на 20000 узловых точек. При этом наблюдалась замедленная, но устойчивая сходимост. Применение смешанного функционала, в котором дополнительно варьируется меридиональная деформация (ε_{ss}) , позволило несколько ускорить сходимост и уменьшить разбиение до 5000 узловых точек. Столь незначительный по сравнению с другими более показательными примерами [4] эффект можно объяснить сложным характером НДС в такой сильно вытянутой тороидальной оболочке, в одних частях которой имеют место большие изгибы, а в других – растяжения.

Список литературы

- 1 Pазhооh, M. Danesh. Finite Element Modal Analysis of an Inflatable, Self-rigidizing Toroidal Satellite Component / Pазhооh M. Danesh, Dokainish M. A., Ziada S. // Experimental and Applied Mechanics. – 2011. – 6, No. 1. – P. 281–288.

2 Chernyshenko, I. S. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials / I. S. Chernyshenko, V. A. Maksimyyuk // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No. 1. – P. 90–97.

3 Аброров, Ю. Ю. Деформування довгої тонкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу / Ю. Ю. Аброров, В. А. Максимюк, В. С. Тарасюк // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 2. – С. 5–10.

4 Maksimyyuk, V. A. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V. A. Maksimyyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, No. 6. – P. 613–687.

УДК 539.3

К ПОСТАНОВКЕ И ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В. Ф. МЕЙШ, Е. Д. БЕЛОВ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Ю. А. МЕЙШ

Национальный транспортный университет, г. Киев, Украина

Рассматривается задача о нестационарном деформировании усеченной дискретно подкрепленной конической оболочки эллиптического сечения в рамках модели теории оболочек и стержней Тимошенко [1, 3] при распределенной внутренней импульсной нагрузке. Уравнения срединной поверхности оболочки в параметрическом виде задаются согласно соотношениям [2]

$$X = k_1 x^1 \cos x^2, \quad Y = x^1 \sin x^2, \quad Z = k_2 x^1, \quad (1)$$

где X, Y, Z – декартова система координат; x^1, x^2 – координаты на срединной поверхности оболочки; $k_1 = a/b$; $k_2 = c/b$. Схематически объект представлен на рисунке 1, где H – высота усеченного конуса. Уравнения линии центра тяжести продольного ребра в параметрическом виде задаются согласно формулам (1) при фиксированном значении x^2 (в нашем случае $x^2 = (l-1)\pi/2$, $l = \overline{1, 4}$).

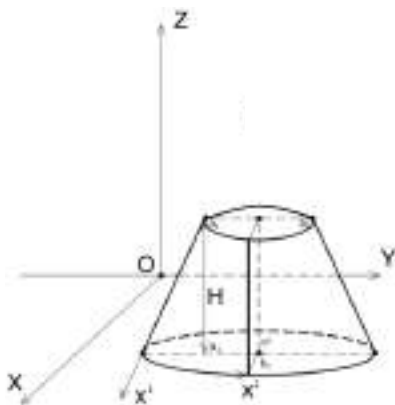


Рисунок 1

Уравнения (1) определяют коэффициенты первой и второй квадратичной формы срединной поверхности рассматриваемой оболочки согласно формулам

$$a_{ij} = \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} + \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} + \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j}, \quad (i, j = 1, 2); \quad (2)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} - \frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} - \frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Z}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{\partial X}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j} - \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j} \right].$$

При этом, согласно (1),

$$a_{11} = k_1^2 \cos^2 x^2 + \sin^2 x^2 + k_2^2; \quad a_{22} = (x^1)^2 (k_1^2 \sin^2 x^2 + \cos^2 x^2); \quad a_{12} = 0, 5x^1(1 - k_1^2) \sin 2x^2; \\ b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = k_1 k_2 (x^1)^2 / \sqrt{g},$$

где g – фундаментальный определитель метрического тензора, $g = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Аналогично определяются коэффициенты для линии центра тяжести поперечного сечения продольного ребра при условии $x^2 = \text{const}$.

Для описания динамического поведения конических оболочек принимается линейный вариант уточненной теории тонких оболочек типа Тимошенко [1, 3]. Для вывода уравнений колебаний