

поля. В качестве массовой силы в уравнениях движения выступает сила Лоренца. Совместно с соотношениями на ненулевую компоненту вектора напряжённости магнитного поля, на плотность электрических зарядов вместе с уравнениями Максвелла относительно ненулевых компонент вектора напряжённости электрического поля и условиями ограниченности всех функций все упомянутые соотношения образуют начально-краевую задачу. Для ее решения используются преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по координате x , направленной вдоль границы полуплоскости. Показано, что даже для одномерного варианта оригиналы решения этой задачи аналитически найти невозможно. Поэтому используется разложение в степенные ряды по малому параметру, характеризующему связь механических и электромагнитных полей. Подстановка упомянутых рядов в исходную задачу приводит к рекуррентной последовательности краевых задач относительно ограниченных изображений коэффициентов рядов. Решение последней системы на коэффициенты рядов осуществляется поэтапно, записывая неизвестные функции механической и электрической частей в виде свёрток с соответствующими ядрами, которые являются функциями Грина. Функцию Грина электрической части задачи удаётся найти точно с помощью таблиц оригиналов. Построение решения краевых задач механической части задачи достаточно громоздко, но находится с помощью стандартных методов. Основная сложность связана с построением оригиналов. Их нахождение реализовано с помощью совместного обращения преобразования Фурье и Лапласа с использованием специального алгоритма, основанного на нахождении аналитического представления оригинала. Результатом реализации описанного алгоритма является нахождение точного решения рекуррентной системы на коэффициенты степенных рядов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-08-00788).

УДК 539.21:531.43/46:539.3

КИНЕМАТИКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ УЧЕТЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В МАТЕРИАЛАХ СЛОЕВ

С. А. ВОРОБЬЕВ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Силы внутреннего трения в конструкционных материалах, несмотря на их сравнительно малые величины, могут заметно проявлять себя при динамическом нагружении элементов конструкций и деталей машин.

Выполнена постановка задачи о динамическом нагружении круговой цилиндрической оболочки из изотропных материалов в виде трехслойного пакета. Пакет несимметричен по высоте относительно срединной поверхности жесткого несжимаемого в поперечном направлении заполнителя. На первом этапе постановки задачи материалы слоев считаются линейно упругими. Применив вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, используя кинематические гипотезы С. П. Тимошенко для каждого слоя и условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев, получены уравнения движения оболочки в перемещениях для малых деформаций.

Демпфирующие свойства материалов слоев трехслойной оболочки учитываются на основе концепции комплексного модуля упругости $E_k^* = E_k(a_k + ib_k)$, $G_k^* = G_k(a_k + ib_k)$, где E_k, G_k – модули упругости материала, $a_k = (4 - \gamma_k^2) / (4 + \gamma_k^2)$, $b_k = 4\gamma_k^2 / (4 + \gamma_k^2)$, γ_k – коэффициент внутреннего трения материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$), i – мнимая единица. Уравнения движения оболочки в этом случае получают заменой в уравнениях идеально упругой конструкции модулей упругости E_k, G_k на соответствующие операторы E_k^*, G_k^* :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [\tilde{L}]\{U\} = \{F\},$$

где $[M]$ – матрица масс; $\{U\}^T = \{u, v, w, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\}$ – искомая вектор-функция перемещений; $u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t)$ – тангенциальные перемещения точек срединной поверхности заполнителя

в направлении координатных осей (линий главных кривизн оболочки) $x_1 \equiv \varphi$ и $x_2 \equiv x$ (в окружном и продольном направлениях соответственно); $w(x_1, x_2, t)$ – прогиб; $\psi_1^{(k)}(x_1, x_2, t)$ и $\psi_2^{(k)}(x_1, x_2, t)$ – углы поворота прямолинейного элемента k -го слоя в координатных плоскостях x_1Oz и x_2Oz ; $[\tilde{L}] = [\tilde{l}_{ij}]$ ($i, j = 1, \dots, 9$) – квадратная матрица, элементами которой являются линейные дифференциальные операторы по координатам x_1 и x_2 с постоянными комплексными коэффициентами; $\{F\}$ – вектор нагрузок.

Рассмотрена модельная задача: воздействие мгновенного импульса $q_n(x_1, x_2, t) = \delta(t)q(x_1, x_2)$, $q(x_1, x_2) = \text{const}$ на верхний несущий слой оболочки. Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Решение сформулированной начально-краевой задачи построено на основе комбинации методов: комплексных амплитуд, Фурье и преобразования Лапласа по времени. Решение начально-краевой задачи строим в перемещениях, представляя компоненты вектор-функции $\{U\}$ в следующем виде:

$$u = \sum_{m,n} \tilde{U}_{mn}(t) \cos(m\varphi) \sin \hat{n}x ; \quad v = \sum_{m,n} \tilde{V}_{mn}(t) \sin(m\varphi) \cos(\hat{n}x) ; \quad (1)$$

$$w = \sum_{m,n} \tilde{W}_{mn}(t) \sin(m\varphi) \sin \hat{n}x \quad (k = 1, 2, 3) ;$$

$$\psi_1^{(k)} = \sum_{m,n} \tilde{\Psi}_{1mn}^{(k)}(t) \cos(m\varphi) \sin \hat{n}x ; \quad \psi_2^{(k)} = \sum_{m,n} \tilde{\Psi}_{2mn}^{(k)}(t) \sin(m\varphi) \cos \hat{n}x ,$$

где $m = 1, 2, \dots, \infty$; $\hat{n} = n\pi / L$; $n = 1, 2, \dots, \infty$; $\tilde{U}_{mn}(t)$, $\tilde{V}_{mn}(t)$, $\tilde{W}_{mn}(t)$, $\tilde{\Psi}_{1mn}^{(k)}(t)$, $\tilde{\Psi}_{2mn}^{(k)}(t)$ – искомые комплексные функции действительной переменной t .

Однородные граничные условия свободного опирания кромок оболочки на жесткие неподвижные опоры при $x = 0$; $x = L$ (L – длина оболочки) можно представить так:

$$u_{,1} = v_{,2} = w = \psi_1^{(k)}{}_{,1} = \psi_2^{(k)}{}_{,2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Выражения (1) обеспечивают автоматическое выполнение граничных условий (2) на торцах оболочки $x = 0$ и $x = L$.

Сделана оценка влияния демпфирующих свойств материалов слоев на кинематические параметры (перемещения, скорости, ускорения) колебаний оболочки.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т16Р-010).

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

А. Ю. ГЛУХОВ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

В данной работе в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями [2] рассмотрены задачи о распространении осесимметричных волн в слоистом несжимаемом композитном материале с начальными напряжениями.

Рассматривается слоистый композитный материал с начальными напряжениями, который состоит из чередующихся слоев двух типов, в каждом из которых материалы и начальные напряженно-деформированные состояния являются одинаковыми для рассматриваемого типа слоев. Материалы слоев – гиперупругие изотропные с произвольной структурой упругих потенциалов, начальное напряженное состояние – однородное.

Рассматриваются два случая контакта между слоями композитного материала: полный (жесткий) контакт и полное проскальзывание (нежесткий контакт).

В соответствии с [1, 3] исследование закономерностей распространения осесимметричных упругих волн в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями сводится к по-