Решая систему (7) и подставляя найденные постоянные в представления (5), (6), получаем выражения для функций перемещений и напряжений.

Для подсчёта коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) на концах трещины используются следующие формулы:

$$K_{I-}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^2\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}},\ K_{I+}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^2\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}};$$
$$K_{II-}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^1\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}},\ K_{II+}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^1\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}(n+1)}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

В работе представлена новая методика решения плоской задачи теории упругости для полубесконечной полосы с поперечной трещиной, основанная на сведении исходной задачи к одномерной путём применения интегрального преобразования по обобщённой схеме. Подсчитаны КИН на концах трещины. Установлены границы применимости метода ортогональных многочленов.

Список литературы

1 **Попов, Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.

2 **Vaysfel'd, N.** On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip / N. Vaysfel'd, Z. Zhuravlova // Acta Mechanica. – 2015. – Vol. 226, № 12. – P. 4159–4172. – DOI: 10.1007/s00707-015-1452-x.

3 **Zhuravlova, Z.** Stress analysis near the tips of a transverse crack in an elastic semi-strip / Z. Zhuravlova // Applied Mathematics and Mechanics (English edition). – 2017. – P. 1–22. – DOI: 10.1007/s10483-017-2217-6.

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТОВ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Я. А. ВАХТЕРОВА, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, (НИИ механики),
Российская Федерация

Рассматривается однородный упругий прямолинейный стрежень конечной длины l в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Сечение стержня с координатой $x=0$ жестко закреплено, а на противоположном конце стержня задана внешняя осевая сила $P(t)$, зависящая от времени. Требуется решить прямую задачу о нестационарных колебаниях стержня и обратную задачу по идентификации дефектов (изменений площади поперечного сечения) стержня.

В прямой задаче о нестационарных колебаниях полагается, что стержень имеет переменную площадь поперечного сечения $F(x)$, незначительно отличающуюся от некоторой постоянной величины F_0:

$$F(x)=F_0+F_1(x),\ \frac{|F_1(x)|}{F_0}<<1. \quad (1)$$

Математическая постановка прямой задачи включает в себя уравнение движения стержня переменного поперечного сечения, граничные и начальные условия:

$$\rho F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=E\frac{\partial}{\partial x}\left[F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]; \quad (2)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0,\ EF(l)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=-P(t); \quad (3)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad (4)$$

где u – продольные перемещения; E, ρ – модуль Юнга и плотность материала стержня.

С целью линеаризации поставленной задачи [1] введём малый параметр ε следующим образом:

$$\frac{F(x)}{F_0} = 1 + \varepsilon\eta(x). \tag{5}$$

Искомые перемещения разложим в ряд по малому параметру ε:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n. \tag{6}$$

Подстановка (6) в (2)–(3) приводит к рекуррентной последовательности задач для определения коэффициентов ряда (6):

$$n = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\ u_0\big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -P_*(t),\ u_0\big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial u_0}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{7}$$

$$n > 0$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + p_n(x,t),\ u_n\big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial u_n}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -\eta(l)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\bigg|_{x=l},\ u_n\big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial u_n}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

где $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$, $P_*(t) = -\dfrac{P(t)}{EF_0}$, $p_n(x,t) = c^2\left[\eta'(x)\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + \eta(x)\left(\dfrac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2}\right)\right]$.

Для решения этих задач используются граничные и объёмные функции Грина для волнового уравнения движения однородного стержня постоянного поперечного сечения [2, 3].

В обратной задаче полагается, что перемещения конца стержня $u_d(t) = u(l,t)$ известны. На практике эта информация может поступать с датчика перемещений, установленного в сечении $x = l$ стержня. Функция $\eta(x)$, характеризующая относительной изменение площади поперечного сечения, является искомой. Используя решение прямой задачи, обратная задача сводится к двумерному интегральному уравнению типа Вольтера относительно искомой функции $\eta(x)$. Для его решения используется регуляризация А. Н. Тихонова и метод механических квадратур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-38-50034).

Список литературы

1 **Ватульян, А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.

2 Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

3 **Вахтерова, Я. А.** Обратная задача об идентификации нестационарной нагрузки для балки Тимошенко / Я. А. Вахтерова, Е. В., Серпичева, Г. В. Федотенков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 4. – Тула : Изд-во ТудГУ, 2017. – С. 82–92.

УДК: 539.3

ОБ ОДНОЙ СВЯЗАННОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В. А. ВЕСТЯК, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт, НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация

Рассматривается нестационарное движение электромагнитоупругой изотропной полуплоскости $z \geq 0$ в декартовой системе координат в предположении, что происходящие процессы являются плоскими. Предполагается, что в начальный момент времени полуплоскость находится в невозмущённом состоянии. На её поверхности заданы перемещения или напряжённость электрического