Для решения поставленной задачи применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и интегральное преобразование Г. Я. Попова по угловой координате θ [1] с формулами прямого

$$w_{sk}(r)=\int_0^{\omega}\sin\theta P_{\nu_k}^1(\cos\theta)w_s(r,\theta)d\theta \tag{6}$$

и обратного

$$w_s(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{\nu_k}^1(\cos\theta)w_{sk}(r)}{\left\|P_{\nu_k}^1(\cos\theta)\right\|^2} \tag{7}$$

преобразований, где s – параметр преобразования Лапласа, $P_{\nu_k}^1(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, ν_k – корни трансцендентного уравнения;

$$\left.\frac{\partial P_{\nu_k}^1(\cos\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\omega}-\mathrm{ctg}\,\omega\,P_{\nu_k}^1(\cos\omega)=0. \tag{8}$$

В результате интегральных преобразований в пространстве трансформант получена одномерная краевая задача

$$\begin{gathered}(r^2w'_{sk})'-\nu_k(\nu_k+1)w_{sk}-\frac{r^2}{c^2}s^2w_{sk}=0;\\ w_{sk}(a)=\alpha_s\,l\,\gamma_k,\quad w_{sk}(b)=0;\\ \alpha_s=\int_0^{\infty}e^{-st}\alpha(t)\,dt,\quad \gamma_k=\int_0^{\omega}\sin^2\theta P_{\nu_k}^1(\cos\theta)d\theta.\end{gathered} \tag{9}$$

Для указанной задачи построена функция Грина $G_k(r,\xi)$. В пространстве трансформант построено точное решение задачи (9)

$$w_{sk}(r)=r^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\frac{Y_{\nu_k+1/2}(rq)J_{\nu_k+1/2}(bq)-Y_{\nu_k+1/2}(bq)J_{\nu_k+1/2}(rq)}{Y_{\nu_k+1/2}(aq)J_{\nu_k+1/2}(bq)-Y_{\nu_k+1/2}(bq)J_{\nu_k+1/2}(aq)}\alpha_s l\gamma_k. \tag{10}$$

Здесь $J_{\nu_k+1/2}(bq)$, $Y_{\nu_k+1/2}(rq)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

К выражению (10) применяется обратное преобразование (7). Таким образом, в пространстве трансформант Лапласа построено точное решение исходной начальной краевой задачи (1)–(3), (5). Угол поворота, входящий в полученную формулу, найден из условия (4).

Численная реализация поставленной задачи детализирована для случая установившихся колебаний, для чего в полученных формулах нужно положить $s=i\omega$, где ω – частота колебаний.

Проведен численный анализ волнового поля конуса в зависимости от частоты колебаний, выявлены собственные частоты.

Список литературы

1 **Попов, Г. Я.** Новые интегральные преобразования с применением к некоторым краевым задачам математической физики / Г. Я. Попов // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1642–1652.

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ КОНЦОВ ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПОЛУПОЛОСЕ

Н. Д. ВАЙСФЕЛЬД, В. В. РЕУТ, З. Ю. ЖУРАВЛЁВА
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Украина

Рассматривается упругая полуполоса, которая занимает область, описываемую в декартовой системе координат соотношениями $0<x<a, 0<y<\infty$. Левая боковая грань защемлена – $u(0,y)=0, v(0,y)=0,$ а правая находится в условиях гладкого контакта с окружающей средой – $u(a,y)=0, \tau_{xy}(a,y)=0$. По короткому торцу полуполосы заданы условия

$$\begin{aligned} &\sigma_y\big|_{y=0} = p(x), \quad \tau_{xy}\big|_{y=0} = 0, \qquad a_0 < x < a \\ &v\big|_{y=0} = 0, \qquad\quad \tau_{xy}\big|_{y=0} = 0, \qquad 0 < x < a_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Внутри полуполосы по линии $c_0 < x < c_1, y = B$ расположена поперечная трещина

$$\begin{aligned} &u(x, B-0) - u(x, B+0) = \langle u(x, B)\rangle = \psi_1(x) \neq 0, \quad c_0 < x < c_1; \\ &v(x, B-0) - v(x, B+0) = \langle v(x, B)\rangle = \psi_2(x) \neq 0, \quad c_0 < x < c_1; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(x, B-0) - \tau_{xy}(x, B+0) = \langle \tau_{xy}(x, B)\rangle = 0, \quad c_0 < x < c_1; \\ &\sigma_y(x, B-0) - \sigma_y(x, B+0) = \langle \sigma_y(x, B)\rangle = 0, \quad c_0 < x < c_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Необходимо определить смещения и напряжения, которые удовлетворяют краевым условиям на боковых гранях, на коротком торце (1), условиям на трещине (2)–(3) и уравнениям равновесия Ламе.

Исходная задача сводится к одномерной путём применения полубесконечного sin-, cos-преобразования Фурье по переменной y по обобщённой схеме [1]. Задача в пространстве трансформант формулируется в векторном виде. Её решение ищется в виде суперпозиции общего и частного решений [2]. Общее решение задачи строится с помощью аппарата матричного дифференциального исчисления, а частное – с помощью матричной функции Грина, полученной в билинейной форме.

После обращения интегрального преобразования получаем выражения для функций перемещений, зависящие от неизвестных функций $\chi(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$, где $\chi(x) = v(x, 0)$.

Подставляя выражения для функций перемещений в условия

$$\sigma_y\big|_{y=0} = p(x), \ \tau_{xy}\big|_{y=B-0} = 0, \ \sigma_y\big|_{y=B-0} = 0,$$

приходим к системе трёх интегро-дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\tilde{\chi}(\xi)\ln\frac{1}{|\xi - x|}d\xi + \tilde{K}_0(x) = \tilde{r}(x), \quad -1 < x < 1; \\ \dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\tilde{\psi}_1(\xi)\ln\frac{1}{|\xi - x|}d\xi + \tilde{K}_1(x) = 0, \quad -1 < x < 1; \\ \dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\tilde{\psi}_2(\xi)\ln\frac{1}{|\xi - x|}d\xi + \tilde{K}_2(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $\tilde{\chi}(\xi) = \chi\left(\dfrac{(a - a_0)\xi + (a_0 + a)}{2}\right)$, $\tilde{\psi}_i(\xi) = \psi_i\left(\dfrac{(c_1 - c_0)\xi + (c_0 + c_1)}{2}\right)$, $i = 1, 2$, $\tilde{r}(x)$, $\tilde{K}_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ – известные регулярные функции при $c_0 > \varepsilon_0$, $c_1 < a - \varepsilon_1$, $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$.

Система уравнений (4) решается методом ортогональных многочленов, для чего неизвестные функции раскладываются в ряды по многочленам Чебышёва второго рода:

$$\tilde{\chi}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^0 \sqrt{1 - \xi^2}\, U_n(\xi), \ \xi \in (-1; 1); \tag{5}$$

$$\tilde{\psi}_i(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^i \sqrt{1 - \xi^2}\, U_n(\xi), \ \xi \in (-1; 1), \ i = 1, 2. \tag{6}$$

Выражения (5), (6) подставляются в систему уравнений (4) и применяется стандартная схема метода ортогональных многочленов. В результате решение системы (4) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\vec{S}_m + \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn}\vec{S}_n = \vec{f}_m, \ m = 0, 1, 2 \ldots, \tag{7}$$

где $\vec{S}_m = \begin{pmatrix} s_m^0 \\ s_m^1 \\ s_m^2 \end{pmatrix}$, компоненты $D_{mn} = \left(d_{mn}^{ij}\right)$, $i, j = 0, 1, 2$, $\vec{f}_m = \begin{pmatrix} f_m^0 \\ f_m^1 \\ f_m^2 \end{pmatrix}$ являются известными постоянными.

Решая систему (7) и подставляя найденные постоянные в представления (5), (6), получаем выражения для функций перемещений и напряжений.

Для подсчёта коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) на концах трещины используются следующие формулы:

$$K_{I-}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^2\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}\,(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}},\quad K_{I+}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^2\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}\,(n+1)}{\sqrt{2}};$$
$$K_{II-}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^1\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}\,(n+1)(-1)^k}{\sqrt{2}},\quad K_{II+}=\sum_{k=0}^{\infty}s_k^1\frac{\sqrt{\pi(c_1-c_0)}\,(n+1)}{\sqrt{2}}. \tag{8}$$

В работе представлена новая методика решения плоской задачи теории упругости для полубесконечной полосы с поперечной трещиной, основанная на сведении исходной задачи к одномерной путём применения интегрального преобразования по обобщённой схеме. Подсчитаны КИН на концах трещины. Установлены границы применимости метода ортогональных многочленов.

Список литературы

1 **Попов, Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.

2 **Vaysfel'd, N.** On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip / N. Vaysfel'd, Z. Zhuravlova // Acta Mechanica. – 2015. – Vol. 226, № 12. – P. 4159–4172. – DOI: 10.1007/s00707-015-1452-x.

3 **Zhuravlova, Z.** Stress analysis near the tips of a transverse crack in an elastic semi-strip / Z. Zhuravlova // Applied Mathematics and Mechanics (English edition). – 2017. – P. 1–22. – DOI: 10.1007/s10483-017-2217-6.

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТОВ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Я. А. ВАХТЕРОВА, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, (НИИ механики),
Российская Федерация

Рассматривается однородный упругий прямолинейный стрежень конечной длины l в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Сечение стержня с координатой $x=0$ жестко закреплено, а на противоположном конце стержня задана внешняя осевая сила $P(t)$, зависящая от времени. Требуется решить прямую задачу о нестационарных колебаниях стержня и обратную задачу по идентификации дефектов (изменений площади поперечного сечения) стержня.

В прямой задаче о нестационарных колебаниях полагается, что стержень имеет переменную площадь поперечного сечения $F(x)$, незначительно отличающуюся от некоторой постоянной величины F_0:

$$F(x)=F_0+F_1(x),\quad \frac{|F_1(x)|}{F_0}<<1. \tag{1}$$

Математическая постановка прямой задачи включает в себя уравнение движения стержня переменного поперечного сечения, граничные и начальные условия:

$$\rho F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=E\frac{\partial}{\partial x}\left[F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]; \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad EF(l)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=-P(t); \tag{3}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{4}$$

где u – продольные перемещения; E, ρ – модуль Юнга и плотность материала стержня.