УДК 539.3

В. М. ХВИСЕВИЧ, А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК
Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛА НА РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Рассматривается решение плоских краевых задач стационарной термоупругости изотропных тел с учетом их неоднородности методом граничных интегральных уравнений теории потенциала.

Ключевые слова: метод потенциала, термоупругость, плоская задача.

Введение. Современный уровень развития техники и технологий выдвигает перед инженерами требования по созданию эффективных методов расчета инженерных конструкций, позволяющих снизить материалоемкость элементов при их достаточной прочности и надежности. Основная цель таких методов – исследовать напряженно-деформированное состояние тел, а также распределение температурного поля. Для этого необходимо поставить и решить краевые задачи механики деформируемого твердого тела и, в частности, теории упругости, теплопроводности, термоупругости [1–4]. Во многих случаях достаточно ограничиться рассмотрением плоской области. Немаловажным аспектом с позиции снижения материалоемкости конструктивных элементов является также учет неоднородности материала, обусловленной зависимостью характеристик от температуры [5].

Особое значение для построения математических моделей краевых задач механики деформируемого твердого тела имеет теория потенциала. Ее практическим воплощением стало появление методов граничных элементов. Длительное время в инженерной практике исследователи отдавали предпочтение методу конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ) [1, 2]. Однако ряд работ, например [3, 4], позволил развить методы граничных интегральных уравнений (ГИУ) и показал их преимущества перед МКР и МКЭ.

В данной статье рассматривается развитие метода граничных интегральных уравнений на решение плоских стационарных краевых задач термоупругости изотропных непрерывно-неоднородных тел.

1 Постановка задачи. Рассмотрим решение краевых задач термоупругости для случая, при котором тепловые и физические характеристики материала зависят от температуры, т. е. коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$, теплового линейного расширения $\alpha(T)$ и модуль упругости $E(T)$ являются непрерывными функциями координат.

Как отмечается в работе [6], коэффициент теплопроводности материалов зависит от химического состава, физического строения и состояния вещества, а также и от температуры. Для многих металлов коэффициент теплопроводности уменьшается с повышением температуры по линейному закону:

$$\lambda(T) = \lambda_0 (1 - kT), \tag{1}$$

где k – определяется с помощью экспериментальных кривых [7]; λ_0 – коэффициент теплопроводности при исходной температуре.

Температурный коэффициент линейного расширения α металлов и сплавов с ростом температуры увеличивается, поэтому используем рекомендации [6]

$$\alpha(T) = \alpha_0 (1 + \gamma T), \tag{2}$$

где α_0 – значение коэффициента теплового расширения для исходного состояния; γ – постоянная величина, определяемая по результатам экспериментов.

Данные экспериментальных исследований показывают, что при нагревании модуль упругости металлов E уменьшается. Зависимости модуля упругости от температуры для металлов и конструкционных сплавов могут определяться по формуле [8]

$$E(T) = E_0 (1 - \beta_1 T), \tag{3}$$

где E_0 – модуль упругости при начальной температуре; β_1 – эмпирический коэффициент. В некоторых случаях используется квадратичная и экспоненциальная зависимости:

$$E(T) = E_0 \left(1 - \beta_2 T^2\right), \tag{4}$$

$$E(T) = E_0 \exp(\beta_3 T), \tag{5}$$

где β_2, β_3 – эмпирические коэффициенты.

В работе [9] отмечено, что для многих материалов в широких диапазонах температур при существенном изменении модуля упругости от температуры наблюдается постоянство коэффициента Пуассона (υ = const).

Рассматриваются непрерывно-неоднородные материалы, для которых параметры Ламе являются непрерывными детерминированными функциями координат. Задача термоупругости неоднородных тел состоит в определении перемещений u_i (через которые выражаются компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}), удовлетворяющих в области D, занимаемой телом, с учетом переменных $E(T)$, $\alpha(T)$, $\lambda(T)$ и постоянного υ, уравнениям равновесия:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T \alpha(T)\,dT\right) = -\varphi B_j \frac{2(1+\upsilon)}{E}\sigma_{ij}, \tag{6}$$

а на контуре L области D граничным условиям:

$$\sigma_{ij} n_j = q_i(x_L), \tag{7}$$

где $\Theta = \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}$, n_j – вектор внешней нормали к L; $q_i(x_L)$ – плотность заданных поверхностных сил; φ – малый параметр, который, согласно Тростелю, определяется из соотношения [10]

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dT}=\frac{d}{dT}\left[\ln\frac{E}{E_0}\right]=\varphi\Psi(T)\,.$$

При этом $\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x_j}=\frac{1}{E}\frac{dE}{dT}\frac{\partial T}{\partial x_j}=\varphi\Psi(T)\frac{\partial T}{\partial x_j}=\varphi B_j(x_s)$, $\quad B_j(x_s)=\Psi(T)\frac{\partial T}{\partial x_j}$, $i,j=1,2$.

С использованием гипотезы Дюамеля-Неймана запишем выражения для напряжений:

$$\sigma_{ij}=\frac{E(T)}{1+\upsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\Theta\delta_{ij}-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\alpha T\right], \tag{8}$$

где $\Theta=\varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема; δ_{ij} – символ Кронекера.

Температура T определяется в результате решения уравнения теплопроводности [6]

$$div(\lambda gradT)=0\,. \tag{9}$$

2 Построение сингулярных интегральных уравнений (СИУ) плоской задачи термоупругости с учетом зависимости коэффициента $\alpha(T)$. Применив метод возмущений (малого параметра) для решения плоской краевой задачи термоупругости непрерывно-неоднородных тел, последняя сводится к решению краевой задачи термоупругости

$$\Delta u_i^{(0)}+\frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial x_i}=\frac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^T\alpha(T)\,dT\right),\sigma_{ij}^0 n_j=q_i(x_L)\,,$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}=\frac{E(T)}{1+\upsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}\right)+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\Theta^{(0)}\delta_{ij}-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\int_0^T\alpha(T)\,dT\,\delta_{ij}\right], \tag{10}$$

где i, j = 1,2, и последовательности краевых задач теории упругости однородного тела

$$\Delta u_i^k+\frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial\Theta^{(k)}}{\partial x_i}=-\frac{2(1+\upsilon)}{E^2}\frac{dE}{dT}\frac{\partial T}{\partial x_j}\sigma_{ij}^{(k-1)}\,,\sigma_{ij}^k n_j=0\,,$$

$$\sigma_{ij}^{(k)}=\frac{E(T)}{1+\upsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i}\right)+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\Theta^{(k)}\delta_{ij}\right],\ \Theta^k=\frac{\partial u_j^k}{\partial x_j},\ k=0,1,2,\ldots. \tag{11}$$

Вопросы сходимости метода возмущений обсуждены в [5, 11]. Рассмотрим решение задачи термоупругости (10) на нулевом приближении. Запишем дифференциальное уравнение равновесия этой задачи в перемещениях

$$\Delta u_i^{(0)}+\frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{2(1+\upsilon)}{1-2\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^{\alpha(T)}\alpha(T)\,dT,\quad i,j=1,2, \tag{12}$$

где $u_i^{(0)}$ – вектор перемещений, соответствующий нулевому члену степенного ряда $u_i = u_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k u_i^k$, в виде которого ищется решение [12].

Решение (12) найдем как сумму общего решения однородного уравнения теории упругости без учёта объёмных и массовых сил и частного решения неоднородного уравнения

$$u_i^{(0)} = u_i^U + u_i^T. \tag{13}$$

Общее решение u_i^U соответствует решению однородного дифференциального уравнения теории упругости. Частное решение представим как градиент некоторой функции W

$$u_i^T = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT\right). \tag{15}$$

Согласно [12], уравнение (12) удовлетворяется, если принять

$$\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\int_0^{\alpha(T)} \alpha(T)\,dT. \tag{16}$$

Используя зависимость $\alpha(T)$ (2), из (16) получаем соотношение

$$\Delta W = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0\left(T + \frac{T^2}{2}\gamma\right) = a\left(T + \frac{T^2}{2}\gamma\right). \tag{17}$$

Температура T подчиняется уравнению теплопроводности (9) и не является гармонической функцией, однако если ввести функцию теплопроводности

$$T^* = \int_0^T \lambda(T)\,dT, \tag{18}$$

T можно неявно выразить через гармоническую функцию T^* соотношением

$$T = \frac{1}{k}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k}{\lambda_0}T^*}\right). \tag{19}$$

Внося (19) в (17), получим

$$\Delta W = a\left(bT - cT^*\right), \tag{20}$$

где $a = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\alpha_0$, $b = 1 + \frac{\gamma}{k}$, $c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$.

В правой части (20) находится алгебраическая сумма функций температуры T и гармонической функции T^*. Гармоническую функцию T^* можно представить в форме

$$T(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i+L_e}\chi(y)\frac{\cos\varphi}{r}dl_y+\sum_{i=1}^{n}A_i\ln r_{A_i}\ , \tag{21}$$

если рассматривается внутренняя краевая задача, и

$$iT(x)=T_\infty+\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\chi(y)\frac{\cos\varphi}{r}dl_y+\sum_{k=1}^{m}A_k\ln r_{A_k}\ , \tag{22}$$

в случае внешней краевой задачи, где $\chi(y)$ – плотность потенциала, $r=|y-x|=\sqrt{(y_i-x_i)(y_i-x_i)}$, $i=1,2$, $y\in L$; φ – угол между направлением $\overline{r}$ и вектором внешней нормали $\overline{n}(y)$ в точке y; $\cos\varphi=n_i(y)\beta_i$, β_i – направляющие косинусы вектора нагрузки, r_{Ak} – расстояние от источника до точки x границы L; A_k – мощность фиктивных источников тепла. То есть T^* выражается одномерным интегралом по контуру L.

Попытка представить температуру T интегралами по контуру не принесла желаемого результата. Поэтому функцию T будем выражать через δ-функцию Дирака $\delta(y–x)$, а T^* представим в форме (21). Тогда (20) примет вид

$$\begin{gathered}\Delta W=-\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\Delta\left(\ln\frac{1}{r}\right)dF_y-ac\left\{\int_L\chi(y)\Delta\left[\frac{r}{4}\cos\varphi\times\right.\right.\\ \left.\left.\times(1-2\ln r)\,dl_y+\sum_{k=1}^{n}A_k\Delta\left[\frac{r_{A_k}^2}{4}\left(1-\ln r_{A_k}\right)\right]\right]\right\},\end{gathered} \tag{23}$$

откуда

$$W=-\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\ln\frac{1}{r}dF_y-ac\left[\int_L\chi(y)\frac{r}{4}\cos\varphi(1-2\ln r)\,dl_y+\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{r_{A_k}^2}{4}\left(1-\ln r_{A_k}\right)\right], \tag{24}$$

где F – плоская область интегрирования.

На основании W строим интегральные формулы добавок температурных перемещений, напряжений и фиктивной температурной нагрузки, т. е. задачу (10) сводим к задаче изотермической теории упругости. Представим W в виде суммы двух слагаемых

$$W=\overset{(\alpha)}{W}+\overset{(k)}{W}\ , \tag{25}$$

где

$$\overset{[\alpha]}{W}=-\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\ln\frac{1}{r}dF_y\ ,\ \Delta\overset{(\alpha)}{W}=abT. \tag{26}$$

Дифференцируя (26), найдем

$$\frac{\partial \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i} = -\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\frac{\beta_i}{r}dF_y\ , \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y)\frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2}dF_y\ . \tag{28}$$

Термоэластопотенциалы (27) и (28) необходимы для построения формул перемещений и напряжений соответственно. Исследуя свойства интеграла в (27), легко видеть, что при переходе через кривую контура L, ограничивающего область D^+, он не испытывает разрыва. Интеграл в (27) является сходящимся, порядок особенности $1/r$ меньше размерности области интегрирования. Интеграл в (28) представляет собой частную производную второго порядка от логарифмического потенциала площади. Этот интеграл особенный и необходимо выразить его неинтегральный член, для чего в окрестности особой точки опишем окружность малого радиуса ε. Применяя формулу Гаусса, получим

$$I = \int_F T(x)\frac{\partial^2(\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j}dF_y \cong T(y)\int_F \frac{\partial^2(\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j}dF_y = T(y)\int_L n_j(x)\frac{\partial(\ln 1/r)}{\partial x_i}dl_y\ , \tag{29}$$

где L – контур интегрирования. Так как для окружности в полярных координатах $dL = \varepsilon d\nabla$, а $n_j = \beta_j$, то интеграл примет вид

$$I = T(y)\int_L \beta_i\beta_j d\vartheta. \tag{30}$$

Выполняя интегрирование по контуру окружности в пределах от нуля до 2π, имеем

$$I = \pi,\ \text{если}\ i = j;\ I = 0,\ \text{если}\ i \neq j. \tag{31}$$

На основании вышеизложенного при $x = y$ (28) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi}\left(\pi T(x) + \int_F T(y)\frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2}dF_y\right). \tag{32}$$

Когда точка x стремится к точкам границы области, вторые производные логарифмического потенциала площади имеют определенные пределы. Эти пределы различны для точек x, стремящихся к границе из внутренней D^+ и внешней D^- области. Используя теорему Гюгонио-Адамара [2] и предполагая, что плотность потенциала $T(y)$ такова, что его внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, определяем скачки этих производных

$$I = \eta\pi T(x)n_i(x)n_j(x) + \int_F T(y)\frac{\partial^2(\ln 1/r)}{\partial x_i \partial x_j}dF_y\ , \tag{33}$$

где $\eta = -\pi$ для внутреннего предела и $\eta = \pi$ для внешнего предела.

Тогда термоэластопотенциал (28) в граничных точках выражается формулой

$$\frac{\partial^2 \overset{[\alpha]}{W}}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{ab}{2\pi}\left(\eta\pi T(x) n_i(x) n_j(x) + \int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right). \tag{34}$$

Имея (30), (32), (34), составим выражения температурных добавок напряжений, используя формулу

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \delta_{ij} \right). \tag{35}$$

Запишем на основании (14) и (27) выражение добавок перемещений

$$\overset{(\alpha)}{u}{}_i^T = -\frac{ab}{2\pi}\int_F T(y) \frac{\beta_i}{r} dF_y . \tag{36}$$

Добавки напряжений для точек внутри области

$$\overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^T(x) = -\frac{E(T)ab}{2\pi(1+\upsilon)}\left[\int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y + 2\pi T(x)\delta_{ij} \right]. \tag{37}$$

В особых точках напряжения определяем, учитывая (32),

$$\overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^T(x_0) = -\frac{E(T)ab}{2\pi(1+\upsilon)}\left[3\pi T(x)\delta_{ij} + \int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right], \tag{38}$$

а в граничных точках – с учетом (34)

$$\overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^{T}(x_L) = -\frac{E(T)ab}{2\pi(1+\upsilon)}\left(\pi T(x_L)\left[\eta n_i(x_L) n_j(x_L) + 2\delta_{ij}\right] + \int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right). \tag{39}$$

Тогда формула температурных добавок перемещений примет вид

$$u_i^T(x) = \overset{(\alpha)}{u}{}_i^T + \overset{(q)}{u}{}_i^T = -\frac{a}{2}\Bigg(\frac{b}{\pi}\int_F T(y)\frac{\beta_i}{r} dF_y -$$

$$-c\left\{ \int_L \chi(y)\left[n_i(y)(2\ln r - 1) + 2\beta_i \cos\varphi \right] dl_y + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k\left[\beta_i^{(A_k)} r_{A_k}\left(2\ln r_{A_k} - 1\right)\right] \right\}\Bigg). \tag{40}$$

Температурные добавки напряжений внутри области определяются так:

$$\sigma_{ij}^T(x) = \overset{(\alpha)}{\sigma}{}_{ij}^T + \overset{(q)}{\sigma}{}_{ij}^T = -\frac{aE(T)}{2(1+\upsilon)}\Bigg(\frac{b}{\pi}\left[2\pi T(x)\delta_{ij} + \int_F T(y) \frac{2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dF_y \right] +$$

$$+c\Bigg\{ \int_L \chi(y)\frac{1}{r}\left[n_i(x)\beta_j + n_j(x)\beta_i - \left(2\beta_i\beta_j - \delta_{ij}\right)\cos\varphi \right] dl_y + \tag{41}$$

$$+\sum_{k=1}^{n} A_k\left[\left(0{,}5 + \ln r_{A_k}\right)\delta_{ij} - \beta_i^{(A_k)}\beta_j^{(A_k)} \right]\Bigg\}\Bigg).$$

Для особых точек вместо (37) в формуле (41) используется (38).

Формулы температурных добавок напряжений в граничных точках составляем на основе (39) с учетом (24)

$$\sigma_{ij}^{T}(x_L)=\overset{(\alpha)^T}{\sigma}_{ij}(x_L)+\overset{(q)^T}{\sigma}_{ij}(x_L)=-\frac{aE(T)}{2(1+\upsilon)}\Big\{bT(x_L)\big[\eta n_i(x_L)n_j(x_L)+2\delta_{ij}\big]+$$
$$+c\pi\chi(x_L)\big[\eta n_i(x_L)n_j(x_L)-\delta_{ij}\big]+\frac{b}{\pi}\int_L T(y)\frac{2\beta_i\beta_j-\delta_{ij}}{r^2}dl_y+\text{V.p.}\overset{(q)^T}{\sigma}_{ij}, \qquad (42)$$

где V.p. – обозначает главное значение сингулярного интеграла по Коши.

Полные термические перемещения определяем по формуле (13), где u_i^U – выражаются в виде эластопотенциала простого слоя, определяющего перемещение в точке x плоскости от действия распределенных на контуре L сил интенсивностью $\upsilon_i(y)$

$$q_i(x)=\int_L \upsilon_i(y)u_{ij}(x,y)\,dl_y, \qquad (43)$$

где u_{ij} – фундаментальное решение плоской задачи теории упругости [3].

Полные напряжения во внутренних точках области определяются по формуле

$$\sigma_{ij}(x)=\sigma_{ij}^{U}(x)+\sigma_{ij}^{T}(x), \qquad (44)$$

где $\sigma_{ij}^{U}(x)$ соответствуют перемещению u_i^U и определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{U}(x)=-\int_L \upsilon_k(y)T_{ij}^{k}(x,y)\,dl_y=\frac{1}{2\pi(1-\upsilon)}\int_L \upsilon_k(y)\Big[(1-2\upsilon)\big(\delta_{ik}\beta_j+$$
$$+\delta_{jk}\beta_i-\delta_{ij}\beta_k\big)+2\beta_i\beta_j\beta_k\Big]\frac{dl_y}{r(x,y)},\quad i,j=1,2, \qquad (45)$$

а $\sigma_{ij}^{T}(x)$ определены соотношениями (41). Аналогично вычисляем напряжения в граничных точках

$$\sigma_{ij}(x_L)=\sigma_{ij}^{U}(x_L)+\sigma_{ij}^{T}(x_L), \qquad (46)$$

где $\sigma_{ij}^{U}(x_L)$ определяем по формуле

$$\sigma_{ij}^{U}(x_L)=\upsilon_i(x_L)n_i(x_L)\left[1+\frac{n_j^2(x_L)}{1-\upsilon}\right]+\upsilon_{ji}(x_L)n_j(x_L)\left[\frac{n_j^2(x_L)}{1-\upsilon}-1\right]+\text{V.p.}\sigma_{ij}(x_L),$$
$$i,j=1,2,\ i\neq j \qquad (47)$$

где $n_i(x)$ – направляющие косинусы вектора внешней нормали из области, а $\sigma_{ij}^{T}(x_L)$ выражаются формулой (42).

Для получения СИУ данной задачи подставляем (46) в граничные условия (10). После подстановки и соответствующих преобразований получаем [12]

$$\upsilon_i(x_L)+\frac{1}{2\pi(1-\upsilon)}\int_L \Big(\upsilon_i(y)\cos\psi\big[(1-2\upsilon)+2\beta_i^2\big]+$$
$$+\upsilon_j(y)\Big\{(1-2\upsilon)\big[n_j(x_L)\beta_i-n_i(x_L)\beta_j\big]+2\beta_i\beta_j\cos\psi\Big\}\Big(\frac{dl_y}{r}=f_i(x_L)+f_i^T(x_L), \tag{48}$$

где $f_i(x_L)$ – заданные механические нагрузки; $f_i^T(x_L)$ – фиктивная поверхностная температурная нагрузка.

Представим $f_i^T(x_L)$ в упрощенном виде:

$$f_i^T(x_L)=-\sigma_{ij}^T(x_L)\,n_j(x_L). \tag{49}$$

Таким образом, решение краевой задачи термоупругости с переменным коэффициентом $\alpha(T)$ сведено к решению задачи изотермической теории упругости с поверхностными нагрузками $f_i(x_L)$ и $f_i^T(x_L)$. Полные напряжения, вычисленные по формулам (44), (46), используются далее на первом приближении при решении краевой задачи теории упругости как компоненты плотности массовых сил.

3 Построение СИУ краевых задач теории упругости с фиктивными массовыми силами. После решения краевой задачи термоупругости (10) и определения напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ необходимо решить последовательность краевых задач теории упругости (11). Правая часть дифференциальных уравнений равновесия этих задач содержит произведение частных производных температуры, компонент тензора напряжений и дифференциала функции $E(T)$.

Запишем дифференциальное уравнение равновесия задачи теории упругости, возникающей на первом приближении после применения метода возмущений,

$$\Delta u_i^{(1)}+\frac{1}{1-2\upsilon}\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_i\partial x_j}=-\frac{2(1+\upsilon)}{E^2}\frac{dE}{dT}\frac{\partial T}{\partial x_j}\sigma_{ij}^{(0)}. \tag{50}$$

Величины, стоящие в правой части (50), кроме $\frac{\partial T}{\partial x_j}$, известны: компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ находим после решения краевой задачи термоупругости (10) на нулевом приближении. Будем искать решение (50) в виде

$$u_i^{(1)}=u_i^U+u_i^N, \tag{51}$$

где u_i^U – общее решение однородного дифференциального уравнения теории упругости, u_i^N – частное решение:

$$u_i^N = 2(1+\upsilon)\int\limits_F \left(\frac{1}{E^2}\frac{dE}{dT}\frac{\partial T}{\partial x_p}\sigma_{jp}^{(0)}\right) u_{ij}\, dF_y \; . \tag{52}$$

Выражение в скобках правой части (52) является плотностью массовых сил, F – область, занятая телом в двумерном пространстве E_2. Запишем (52) в виде

$$u_i^N = -\frac{(1+\upsilon)^2}{2\pi(1-\upsilon)}\int\limits_F \left(\frac{1}{E^2}\frac{dE}{dT}\frac{\partial T}{\partial x_p}\sigma_{jp}^{(0)}\right)\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{ij} + \beta_i\beta_j\right]\frac{1}{E(T)}dF \; . \tag{53}$$

Для получения тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(N)}$, соответствующего вектору перемещений $u_i^{(N)}$, внесём (53) в уравнения (11). Дифференцируя (53) с учетом зависимости $E(T)$ от координат и выполняя преобразования, окончательно получим для внутренних точек области компоненты добавок напряжений $\sigma_{ij}^N(x)$, обусловленные неоднородностью материала [12]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^N(x) = &-\frac{(1+\upsilon)E(T)}{2\pi(1-\upsilon)}\int\limits_F \rho_k^\rho(y)\frac{1}{E^3(T)}\frac{dE}{dT}\left(\frac{1}{r}\left[(1-2\upsilon)\left(\delta_{ik}\beta_j +\right.\right.\right.\\ &\left.\left.+\delta_{jk}\beta_i - \delta_{ij}\beta_k\right) + 2\beta_i\beta_j\beta_k\right] - \frac{1}{2E}\frac{dE}{dT}\left\{\frac{\partial T}{\partial x_i}\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{jk} + \beta_j\beta_k\right] +\right.\\ &\left.\left.+\frac{\partial T}{\partial x_j}\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{ik} + \beta_i\beta_k\right] + \delta_{ij}\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial x_m}\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{mk} + \beta_m\beta_k\right]\right\}\right)dF_y,\end{aligned} \tag{54}$$

где $\rho_1^\rho = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\sigma_{11}^{(0)} + \frac{\partial T}{\partial x_2}\sigma_{12}^{(0)}\right)$, $\rho_2^\rho = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\sigma_{21}^{(0)} + \frac{\partial T}{\partial x_2}\sigma_{22}^{(0)}\right)$.

Интеграл в (54) имеет слабую особенность. Поэтому добавки напряжений в граничных точках рассматриваемой области можно вычислять по этой же формуле. Полные перемещения определим, подставив (43) и (53) в (51):

$$\begin{aligned}u_i^{(1)} = \frac{1+\upsilon}{2\pi(1-\upsilon)}&\left\{\frac{1}{E_0}\int\limits_L \upsilon_i(y)\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r} + \beta_i\beta_j\right]dl_y - \right.\\ &\left.-(1+\upsilon)\int\limits_F \rho_k^\rho(y)\frac{1}{E(T)}\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{ij} + \beta_i\beta_j\right]dF_y\right\}.\end{aligned} \tag{55}$$

Полные напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}(x)$ выражаем формулой

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x) = \sigma_{ij}^U(x) + \sigma_{ij}^N(x), \tag{56}$$

где $\sigma_{ij}^U(x)$ соответствует вектору u_i^U и приведен в [13].

Полностью формула для определения $\sigma_{ij}^{(1)}(x)$ внутри области с учётом (45) и (54) запишется в виде

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x)=\frac{1}{2\pi(1-\upsilon)}\left(\int_L \upsilon_k(y)\frac{1}{r}\Big[(1-2\upsilon)\left(\delta_{ik}\beta_j+\delta_{jk}\beta_i-\delta_{ij}\beta_k\right)+2\beta_i\beta_j\beta_k\Big]dl_y-\right.$$

$$-(1+\upsilon)E(T)\int_F \rho_k^{\rho}(y)\frac{1}{E^3(T)}\frac{dE}{dT}\left(\frac{1}{r}\Big[(1-2\upsilon)\left(\delta_{ik}\beta_j+\delta_{jk}\beta_i-\delta_{ij}\beta_k\right)+2\beta_i\beta_j\beta_k\Big]-\right.$$

$$-\frac{1}{2E}\frac{dE}{dT}\left\{\frac{\partial T}{\partial x_i}\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{jk}+\beta_j\beta_k\right]+\frac{\partial T}{\partial x_j}\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{ik}+\beta_i\beta_k\right]+\right. \tag{57}$$

$$\left.\left.\left.+\delta_{ij}\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial x_m}\left[(3-4\upsilon)\ln\frac{1}{r}\delta_{mk}+\beta_m\beta_k\right]\frac{2}{1-2\upsilon}\right\}\right)dF_y\right).$$

Напряжения в граничных точках определяем согласно (57), но с учётом скачков при $x\to L$ для $\sigma_{ij}^{U}(x)$ согласно (47):

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x_L)=\upsilon_i(x_L)n_i(x_L)\left[1+\frac{n_j^2(x_L)}{1-\upsilon}\right]+\upsilon_j(x_L)n_j(x_L)\left[\frac{n_j^2(x_L)}{1-\upsilon}-1\right]+\text{V.p.}\sigma_{ij}^{U}(x_L)+\sigma_{ij}^{N}(x_L). \tag{58}$$

Подставляя предельные значения напряжений в граничные условия задачи (11), получим систему сингулярных интегральных уравнений плоской краевой задачи теории упругости с массовыми силами, которую представим в виде:

$$\upsilon_i(x_L)+\text{V.p.}\sigma_{ij}^{U}(x_L)n_j(x_L)=f_i(x_L)+f_i^{N}(x_L). \tag{59}$$

В правой части системы (59) присутствует фиктивная поверхностная нагрузка $f_i^N(x_L)$ и заданная механическая нагрузка $f_i(x_L)$. Нагрузка $f_i^N(x_L)$ определяется следующим образом:

$$f_i^N(x_L)=-\sigma_{ij}^{N}(x_L)n_j(x_L). \tag{60}$$

Определив $f_i^N(x_L)$, можно решить систему сингулярных интегральных уравнений (59) относительно плотности $\upsilon_i(y)$ и по формулам (55), (57), (58) определить перемещения и напряжения. Однако для этого необходимо найти способ вычисления частных производных $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ в формулах (53), (54), (57).

4 О вычислении частных производных функции температуры *T* и способе понижения особенности в интегралах. Как отмечено выше, в формулах добавок перемещений u_i^N (53) и напряжений σ_{ij}^N (54) присутствуют частные производные от температуры. Температура T не является гармонической функцией и тем самым не удовлетворяет уравнению Лапласа. Однако функцию T можно неявно выразить через гармоническую функцию T^*, воспользовавшись соотношением (19). Дифференцируя (19), получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_p} = \frac{\partial T^*}{\partial x_p} \frac{1}{\lambda_0 \sqrt{1 - \frac{2k}{\lambda_0} T^*}} . \tag{61}$$

Гармоническую функцию T^* можно представить формулой (21) в случае внутренней температурной задачи и (22) в случае внешней. Тогда, дифференцируя (21), получим

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_p} = \int_L \chi(y) \frac{2\beta_i \cos\varphi - n_p(y)}{r^2} dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\beta_i^{(A_k)}}{r_{A_k}} . \tag{62}$$

Плотность потенциала $\chi(y)$ определяется в результате решения интегрального уравнения внешней плоской краевой задачи теплопроводности

$$T_\infty - \pi\chi(x_L) + \text{V.p.}\int_{L_i} \chi(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln r_{A_k} = F(x_L) , \tag{63}$$

и внутренней краевой задачи Дирихле

$$\pi\chi(x_L) + \text{V.p.}\sum_{i=1}^{n} \int_{L_i + L_e} \chi(y) \frac{\cos\varphi}{r} dl_y + \sum_{i=1}^{n} A_i \ln r_{A_i} = F(x_L), \tag{64}$$

и считается заданной функцией на контуре L. Продолжим функцию внутрь области D^+ и дополним ее до полного евклидова пространства E_2.

Пусть, например, в области

$$\Delta\chi = 0. \tag{65}$$

Запишем вторую формулу Грина для χ и функции u, которая удовлетворяет уравнению Пуассона [14]

$$\int_F (\chi\Delta u - u\Delta\chi)\, dF_y = \int_L \left(\chi \frac{du}{dn} - u \frac{d\chi}{dn} \right) dl_y , \tag{66}$$

или с учётом (65) и функции u имеем

$$2\pi\chi = \int_L \left[\chi \frac{d(\ln 1/r)}{dn} - \ln\frac{1}{r} \frac{d\chi}{dn} \right] dl_y . \tag{67}$$

Дифференцируя обе части (67), окончательно получаем

$$\int_L \chi \frac{2\beta_i \cos\varphi - n_i(y)}{r^2} dl_y = \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y . \tag{68}$$

Устремляя точку x к L, из дополненной области определяем предельные значения интеграла в правой части (68)

$$I(x) = \pi n_i(x) \frac{d\chi}{dn} + \int_L \frac{d\chi}{dn} \frac{\beta_i}{r} dl_y . \tag{69}$$

Интеграл в (69) имеет слабую особенность и его можно вычислить методом механических квадратур.

Таким образом, предложенный способ позволяет заменить расходящийся интеграл (62) интегралом (69) со слабой особенностью. Частные производные $\frac{\partial T^*}{\partial x_p}$ внутри области вычисляем по формуле (62), а в граничных точках

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_p} = \pi n_p(x)\frac{d\chi}{dn} + \int_L \frac{d\chi}{dn}\frac{\beta_i}{r}dl_y + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\beta_\rho^k}{r_{A_k}}. \tag{70}$$

Для определения $\frac{\partial\chi}{dn}$ представим функцию χ на контуре L потенциалом простого слоя

$$\chi = \int_L \upsilon(y)\ln\frac{1}{r}dl_y\ . \tag{71}$$

Эта функция считается найденной в результате решения соответствующей температурной задачи, поэтому из (71) можно определить плотность потенциала $\upsilon(y)$. Дифференцируя левую и правую часть (71) по нормали $n(x)$, получаем

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = \int_L \upsilon(y)\frac{\cos\psi}{r}dl_y\ , \tag{72}$$

где $\cos\psi = n_i(x)\beta_i$.

В граничных точках контура L интеграл в правой части (72) изменяется скачкообразно

$$\frac{d\chi}{dn} = \eta\pi\upsilon(x) + \int_L \upsilon(y)\frac{\cos\psi}{r}dl_y\ , \tag{73}$$

где $\eta = 1$ при $x \to L$ из области D^-, $\eta = -1$ при $x \to L$ из области D^+.

Определив из (73) производную $\frac{d\chi}{dn}$ и подставляя ее в (70), находим частные производные $\frac{\partial T^*}{\partial x_p}$ в граничных точках плоской области и по соответствующим формулам п. 2 определяем перемещения и напряжения плоской задачи теории упругости, возникающей на n-м приближении метода возмущений.

Особенности алгоритма численного решения плоской краевой задачи термоупругости неоднородных тел описаны в [12, 15].

Заключение. В статье разработана механико-математическая модель, построены сингулярные интегральные уравнения плоской задачи термоупругости изотропных непрерывно-неоднородных тел. Построены СИУ плоских краевых задач теории упругости с фиктивными массовыми силами. Рассмотрены особенности вычисления частных производных функции температуры, входящих в выражения для перемещений и напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Самарский, А. А.** Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 293 с.

2 **Сегерлинд, Л. Дж.** Применение метода конечных элементов / Л. Дж. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

3 **Гюнтер, Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : Гостехиздат, 1953. – 415 с.

4 **Бенерджи, П.** Метод граничных элементов в прикладных науках : пер. с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984. – 404 с.

5 **Подстригач, Я. С.** Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.

6 **Лыков, А. В.** Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа. – 1967. – 599 с.

7 **Шнейдер, П.** Инженерные проблемы теплопроводности / П. Шнейдер. – М. : ИЛ. – 1960. – 340 с.

8 Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов [и др.]. – М. : Машиностроение, 1965. – 567 с.

9 Прочность материалов при высоких температурах / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев : Наукова думка, 1966. – 480 с.

10 **Trostel, R.** Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten / R. Trostel // Ingenieur-Archiv. – 1958. – Vol. 26, No. 6. – P. 416–434.

11 **Терновской, Б. П.** О сходимости метода последовательных приближений в плоской задаче теории упругости для прямолинейной пластинки / Б. П. Терновской // Прочность и устойчивость инженерных конструкций. – Барнаул, 1989. – С. 59–66.

12 **Веремейчик, А. И.** К решению плоских краевых задач термоупругости неоднородных тел методом потенциала / А. И. Веремейчик, В. В. Гарбачевский, В. М. Хвисевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – Вып. 30. – С. 184–189.

13 **Хвисевич, В. М.** Интегральные уравнения и алгоритм решения плоской краевой задачи стационарной термоупругости методом потенциала / В. М. Хвисевич // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. – № 2. – С. 48–51.

14 **Хвисевич, В. М.** Прямое решение трехмерных краевых задач несвязанной стационарной термоупругости методом интегральных уравнений теории потенциала: дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 / В. М. Хвисевич. – М. : МИСИ, 1980. – 230 с.

15 **Веремейчик, А. И.** Об алгоритме численного решения плоских краевых задач неоднородной термоупругости / А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич // Высокие технологии, фундаментальные и прикладные исследования, промышленность: сб. тр. VIII междунар. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 27–28 октября 2009 г. / Санкт-Петерб. гос. ун-т. – СПб., 2009. – С. 75–76.

V. M. HVISEVITCH, A. I. VERAMEICHYK
Brest State Technical University, Brest, Belarus

THE DEVELOPMENT OF THE POTENTIAL METHOD FOR SOLUTION OF PLANE BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMOELASTICITY ISOTROPIC CONTINUOUS-INHOMOGENEOUS BODIES

There is considered the solution of the plane boundary value problems of stationary thermo-elasticity of isotropic bodies with account of their heterogeneity by the boundary integral equations method of the theory of potential.

Получено 13.06.2018