

УДК 539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ИМПУЛЬСНЫЕ НАГРУЖЕНИЯ КРУГОВЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Рассмотрены осесимметричные поперечные колебания круглой упругой трехслойной пластинки, скрепленной с упругим инерционным основанием, под действием импульсных поверхностных нагрузок. Реакция основания описывается моделью Пастернака. Кинематика несимметричного по толщине пакета определяется гипотезой ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Аналитические решения получены с использованием обобщенной функции дельта-функции Дирака. Проведен численный анализ полученных решений.

Ключевые слова: трехслойная пластина, основание Пастернака, импульсное нагружение, вынужденные колебания.

Введение. В монографиях [1, 2], а также статьях [3–6] изучено поведение трехслойных конструкций, не связанных с упругим основанием. Колебания слоистых стержней и пластин на упругом основании Винклера при импульсных и резонансных нагрузках рассмотрено в работах [7–9]. Терморadiационное деформирование трехслойных круговых пластин на упругом основании исследовано в [10, 11]. Статическое деформирование круговых трехслойных пластин на основании Пастернака рассмотрено в [12]. В статьях [13, 14] выполнен параметрический анализ собственных колебаний трехслойных пластин, в том числе, скрепленных с основанием Пастернака.

Здесь рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластинки круглой формы, скрепленной с основанием Пастернака, вызванные импульсными поверхностными нагрузками.

Постановка задачи. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Для тонких внешних несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q = q(r, t)$. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , то есть $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Через h_k и ρ_k обозначены толщина и плотность материала k -го слоя.

Связь между реакцией и прогибом принимаем в соответствии с моделью Пастернака [15], согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w - t_f \Delta w + m_f \ddot{w}, \quad (1)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия среды, формально совпадающий с коэффициентом жесткости модели Винклера; t_f – коэффициент сдвига среды; m_f – массовый член (удельная масса) упругого основания; Δ – оператор Лапласа в полярных координатах

$$\Delta w = w_{,rr} + \frac{w_{,r}}{r},$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены из вариационного принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - A) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W - \delta A) dt = 0, \quad (2)$$

где $A = A_1 + A_2$ – суммарная потенциальная энергия внешних нагрузок и контурных силовых факторов; W – потенциальная энергия деформации; K – кинетическая энергия системы.

При определении потенциальной энергии считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложена поверхностная нагрузка $q(r, t)$, к наружной поверхности второго несущего слоя – реакция основания q_R , на контур пластины воздействуют силы и моменты T_r^1, H_r^1, M_r^1, Q^1

$$\delta A_1 = - \iint_S (q - q_R) \delta w dS, \quad \delta A_2 = - r_1 \int_0^{2\pi} (T_r^1 \delta u + H_r^1 \delta \psi + M_r^1 \delta w_{,r} + Q^1 \delta w) d\varphi,$$

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \epsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \epsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] dS, \quad \delta K = \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k}{2} \iint_S \int_{h_k} \delta \left[(\dot{u}_r^{(k)})^2 + \dot{w}^2 \right] dz dS.$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круглой трехслойной пластинки без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Гамильтона (2) с учетом (1)

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0; \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) + t_f \Delta w - M_0^* \ddot{w} - \kappa_0 w = -q. \quad (3)$$

где M_0^* – удельная масса пластины и основания

$$M_0^* = M_0 + m_f;$$

коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями в [1].

В качестве начальных принимаем условия

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (4)$$

Задача отыскания функций $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ замыкается присоединением к (3) начальных (4) и граничных условий.

Решение начально-краевой задачи. Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластинки, следует из (3) при $q = 0$. Ее решение рассмотрено в [14]. В результате построена система собственных ортонормированных функций $v_n^* \equiv v_n^*(s_n^\pm)$, которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n^*(s_n^\pm, r) = \frac{1}{d_n^*} \left[J_0(s_n^- r) - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{I_0(s_n^+ r_1)} I_0(s_n^+ r) \right], \quad (5)$$

Здесь J_0 , I_0 – функции Бесселя нулевого порядка [16]; $s^\pm(\lambda, t_p)$ – параметр, выражаемый через величины t_p и λ

$$s^\pm(\lambda, t_p) = \sqrt{\sqrt{t_p^4 + \lambda^4} \pm t_p^2},$$

где λ , t_p – характеристики системы пластина – основание.

Коэффициенты d_n определяются из требования нормировки системы (5)

$$\begin{aligned} (d_n^*)^2 = & \frac{r_1^2}{2} \left[J_0^2(s_n^- r_1) + J_1^2(s_n^- r_1) \right] - \frac{r_1 J_0(s_n^- r_1)}{\sqrt{t^4 + \lambda_n^4} I_0(s_n^+ r_1)} \left[J_1(s_n^- r_1) I_0(s_n^+ r_1) s_n^- + \right. \\ & \left. + J_0(s_n^- r_1) I_1(s_n^+ r_1) s_n^+ \right] + \frac{r_1^2 J_0^2(s_n^- r_1)}{2 I_0^2(s_n^+ r_1)} \left[I_0^2(s_n^+ r_1) - I_1^2(s_n^+ r_1) \right]. \end{aligned}$$

В задаче о вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим инерционным основанием Пастернака, внешнюю нагрузку и искомое решение разлагаем в ряды

$$\begin{aligned} w(r, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^* T_n(t), \\ u(r, t) = & b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^* T_n(t), \quad q(r, t) = M_0^* \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* q_n(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где q_n – коэффициенты разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций (5)

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0^*} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n^* r dr,$$

$$\Phi_n^*(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n^*} \left[s_n^- J_1(s_n^- r_1) \frac{r}{r_1} - s_n^- J_1(s_n^- r) + \frac{s_n^+ J_0(s_n^- r_1)}{I_0(s_n^+ r_1)} \left(I_1(s_n^+ r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(s_n^+ r) \right) \right].$$

Алгебраические уравнения для определения собственных чисел λ_n следуют из граничных условий. Например, при заделке контура пластины должны выполняться требования $u = \psi = w = w_{,r} = 0$.

Функции времени $T_n(t)$ определяются выражением

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) q_n(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий движения (4)

$$A_n = \int_0^{r_1} f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{r_1} g(r) v_n r dr,$$

так как интеграл в (7) при $t = 0$ обращается в нуль.

Пусть в начальный момент времени на всю внешнюю поверхность пластины, связанной с упругим инерционным основанием Пастернака, воздействует мгновенный равномерно распределенный силовой импульс

$$q(r, t) = q_1 \delta(t), \quad q_1 = \text{const}, \quad (8)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака [17].

Подставляя нагрузку (8) в (6), получаем интегральное выражение для параметров $q_n(t)$

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \frac{q_1 \delta(t)}{d_n^* M_0^*} \int_0^{r_1} r \left[J_0(s_n^- r) - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{I_0(s_n^+ r_1)} I_0(s_n^+ r) \right] dr = \\ &= \frac{q_1 r_1 \delta(t)}{d_n^* M_0^*} \left(\frac{J_1(s_n^- r)}{s_n^-} - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{s_n^+ I_0(s_n^+ r_1)} I_1(s_n^+ r) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Искомая функция времени (7) с учетом (9)

$$T_n(t) = \frac{q_1 r_1 \sin(\omega_n t)}{d_n^* M_0^* \omega_n} \left(\frac{J_1(s_n^- r)}{s_n^-} - \frac{J_0(s_n^- r_1)}{s_n^+ I_0(s_n^+ r_1)} I_1(s_n^+ r) \right).$$

Численное исследование. Численный счет проводился для защемленной по контуру пластины, слою которой набраны из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [1].

На рисунке 1 показано изменение максимальных прогибов (a) и относительных сдвигов в заполнителе (b) пластины в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания Пастернака κ_0 при различных удельных массах основания m_f для случая $t_f = 4,75$ МПа·м. Импульсная нагрузка ($q_1 = 1$ кПа·с) действует на всю внешнюю поверхность слоя 1. Существенное уменьшение перемещений наблюдается при основаниях средней и высокой жесткости $10^6 < \kappa_0 < 10^{11}$. Из графиков следует, что учет инерции основания (2, 3, 4) приводит к уменьшению перемещений на 40–60 % по сравнению с безынерционным основанием (1).

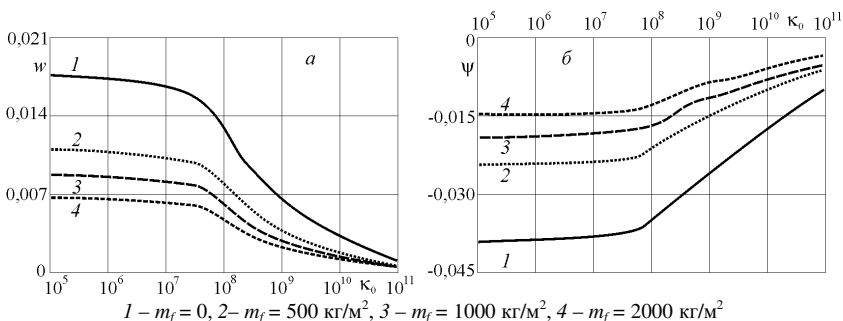


Рисунок 1 – Изменение максимальных прогиба (а) и сдвига (б) защемленной по контуру пластины в зависимости от коэффициента κ_0

Изменение прогиба во времени защемленной по контуру трехслойной пластины, скрепленной с основаниями Винклера (а) и Пастернака (б), показано на рисунке 1: 1 – безынерционное основание, 2 – инерционное основание. Учет инерционности основания уменьшает максимальные прогибы на 40 %. При расчетах по модели Пастернака по сравнению с моделью Винклера амплитуды прогибов и период колебаний уменьшаются.

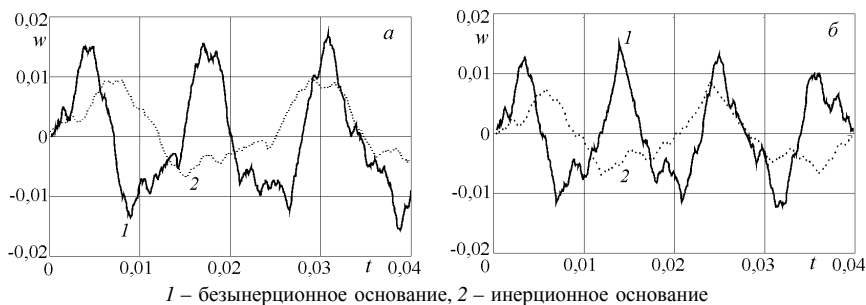
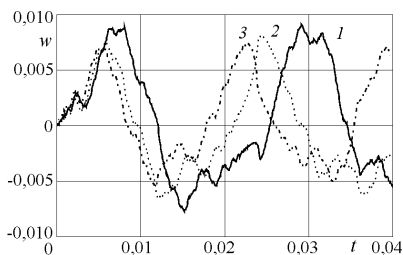


Рисунок 2 – Изменение прогиба во времени защемленной по контуру трехслойной пластины, скрепленной с основаниями Винклера (а) и Пастернака (б)

Графики изменения прогибов во времени в центре рассматриваемой пластины, связанной с инерционным ($m_f = 641 \text{ кг/м}^2$) основанием Пастернака, приведены на рисунке 3. Кривые построены при различных значениях коэффициента сдвига основания: 1 – $t_f = 0$ (основание Винклера), 2 – $t_f = 4 \text{ МПа}\cdot\text{м}$, 3 – $t_f = 8 \text{ МПа}\cdot\text{м}$. Увеличение коэффициента сдвига приводит к уменьшению амплитудных значений прогибов и периода колебаний.

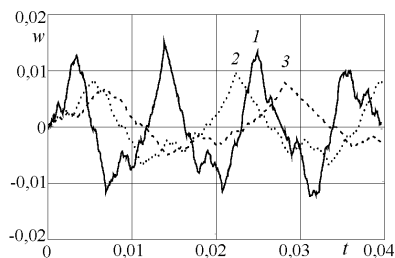
Рисунок 4 иллюстрирует изменение прогибов во времени в центре пластины на инерционном основании Пастернака при действии импульсной нагрузки интенсивностью $q = 1 \text{ кПа}\cdot\text{с}$. Кривые построены при различных значениях удельной массы основания для $t_f = 4,75 \text{ МПа}\cdot\text{м}$. Увеличение удельной массы приводит к уменьшению амплитудных значений прогибов и

к увеличению периода колебаний. Рост коэффициента m_f в 2 раза вызывает уменьшение максимальных значений прогибов примерно на 15 %.



1 – $t_f = 0$ (модель Винклера), 2 – $t_f = 4$ МПа·м,
3 – $t_f = 8$ МПа·м

Рисунок 3 – Зависимость от времени прогиба защемленной по контуру трехслойной пластины, скрепленной с инерционным основанием



1 – $m_f = 0$ (безынерционное основание),
2 – $m_f = 500$ кг/м², 3 – $m_f = 1000$ кг/м²

Рисунок 4 – Зависимость от времени прогиба защемленной по контуру трехслойной пластины, скрепленной с основанием Пастернака

Выводы. Таким образом, в работе рассмотрена методика исследования вынужденных колебаний трехслойных круговых пластин, скрепленных с упругим основанием Пастернака, находящихся под воздействием импульсных нагрузок. Установлено, что при импульсном нагружении рассматриваемой пластины расчеты по модели Пастернака дают существенное уменьшение перемещений и периода колебаний при основаниях средней и высокой жесткости по сравнению со значениями, получаемыми по модели Винклера; подобный эффект дает увеличение жесткости основания на сдвиг. Рост плотности основания приводит к увеличению периода колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Старовойтов, Э. И. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.
- 2 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
- 3 Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.
- 4 Старовойтов, Э. И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.
- 5 The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – № 133. – P. 1127–1136.
- 6 Grover, N. An Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Supersonic Flutter Characteristics of Multilayered Composite Plates / N. Grover, B. N. Singh, D. K. Maiti // Aerospace Science and Technology. – 2016. – Vol. 52. – P. 41–51.

7 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.

8 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием импульсных нагрузок / Д. В. Леоненко // *Механика. Исследования и инновации*. – 2016. – Вып. 9. – С. 78–84.

9 **Леоненко, Д. В.** Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д. В. Леоненко // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.

10 **Starovoitov, E. I.** Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 47, No. 5. – P. 580–589.

11 **Starovoitov, E. I.** Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, No. 9. – P. 1032–1040.

12 **Козел, А. Г.** Перемещения круговой трехслойной пластины на двухпараметрическом основании / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 80–86.

13 **Паймушин, В. Н.** Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории / В. Н. Паймушин, В. И. Иванов, В. Р. Хусаинов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2002. – Т. 8, № 4. – С. 543–554.

14 **Старовойтов, Э. И.** Анализ собственных колебаний круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Материалы. Технологии. Инструменты*. – 2013. – Т. 18, No. 4. – С. 14–17.

15 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Стройиздат, 1954. – 56 с.

16 **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1966. – Т. 2. – 295 с.

17 **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973 – 832 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

IMPULSE LOADS OF CIRCULAR THREE-LAYER PLATES ON THE ELASTIC PASTERNAK'S FOUNDATION

There are considered the axisymmetrical transversal oscillations of the round elastic three-layer plate, fastened to the elastic inertial foundation under the action of impulsive superficial loadings. The foundation reaction is described by the Pasternak's model. For the kinematic description of the package asymmetrical in thickness the broken normal hypothesis was accepted. The filler is light. The analytical solutions are obtained using the generalized Dirac delta function. The numerical analysis of the obtained results is performed.

Получено 14.05.2018